ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LVIII, Disp. 1ª, 1922-1923

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1923

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1922-923

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1922 - 19 novembre	1922 - 26 novembre
» - 3 dicembre	» - 10 dicembre
» - 17 »	» - 24 »
» - 31 »	1923 - 7 gennaio
1923 - 14 gennaio	» - 21 »
» - 28 »	» - 4 febbraio
» - 11 febbraio	» - 18 »
» - 25 »	» - 4 marzo
» - 11 marzo	» - 18 »
» - 25 »	» - 8 aprile
» - 15 aprile	» - 22 »
» - 29 »	» - 6 maggio
» - 13 maggio	» - 20 »
» - 27 »	» - 10 giugno
» - 17 giugno	» - 24 »

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME CINQUANTOTTESIMO

1922-1923

TORINO

Libreria FRATELLI BOCCA

Via Carlo Alberto, 3.

1923

PRESIDENTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

dalla sua fondazione

ELEZIONE	PRESIDENTI PERPETUI (*)
1783, 25 luglio	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Giuseppe Angelo). Offrì le dimissioni dalla carica e furono accettate (7 settembre 1788) conferendogli il titolo di *Presidente emerito*.
" "	**La Grange Tournier** (Giuseppe Luigi), *Onorario*.
1788, 30 novembre	**Morozzo di Bianzé** (conte Carlo Lodovico).
1801, 24 gennaio (4 piovoso a. IX)	**Saluzzo** (cittad. Angelo Giuseppe) ex-conte di Monesiglio.
1801, 15 febbraio	Col Regolamento del 26 piovoso anno IX (15 febbr. 1801) essendosi stabilito che l'Accademia Nazionale rinnovata col *Decreto della Commissione esecutiva del Piemonte* del 22 nevoso anno IX (17 gennaio 1801) non avesse più che due presidenti di classe, cessarono queste funzioni del Saluzzo.
1804, 25 febbraio (5 ventoso a. XII)	**Bonaparte** (Napoleone) primo console della Repubblica Francese, *Onorario*.
1815, 25 novembre	**Balbo di Vinadio** (conte Prospero).
1837, 26 "	**Lascaris di Ventimiglia** (marchese Agostino).
1838, 18 "	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Alessandro).
1851, 18 dicembre	**Plana** (barone Giovanni).
1864, 1° maggio	**Sclopis di Salerano** (conte Federigo).

(*) Dal volume *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783-1883)*. Torino, 1883, pag. 141.

ELEZIONE	PRESIDENTI TRIENNALI (*)
1879, 9 marzo	**Ricotti** (Ercole).
1882, 12 febbraio	**Ricotti** (Ercole) rieletto.
1883, 6 maggio	**Fabretti** (Ariodante).
1885, 12 aprile	**Genocchi** (Angelo).
1888, 8 „	**Genocchi** (Angelo) rieletto.
1889, 28 „	**Lessona** (Michele) termina il 2° triennio iniziato dal GENOCCHI.
1891, 24 maggio	**Lessona** (Michele).
1894, 24 giugno	**Lessona** (Michele) rieletto, † 20 luglio 1894.
1895, 13 gennaio	**Carle** (Giuseppe).
1898, 9 „	**Carle** (Giuseppe) rieletto.
1901, 13 „	**Cossa** (Alfonso) † 23 ottobre 1902.
1902, 14 dicembre	**D'Ovidio** (Enrico) termina il triennio iniziato dal COSSA.
1904, 21 febbraio	**D'Ovidio** (Enrico).
1907, 17 marzo	**D'Ovidio** (Enrico) rieletto.
1910, 24 aprile	**Boselli** (Paolo).
1913, 18 maggio	**Boselli** (Paolo) rieletto.
1916, 28 „	**Camerano** (Lorenzo) † 22 novembre 1917.
1918, 3 febbraio	**Naccari** (Andrea) continua il triennio iniziato dal CAMERANO.
1919, 7 aprile	**Naccari** (Andrea).
1922, 7 maggio	**Ruffini** (Francesco).

(*) A norma dell'art. 3 dello *Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, approvato con R. Decreto 2 febbraio 1882, il Presidente dura in carica un triennio e può essere rieletto per un altro triennio.

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1922

NB. — *Negli elenchi degli Accademici la prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Ruffini (Francesco), Senatore del Regno, Professore ordinario di diritto ecclesiastico nella R. Università di Torino, Grand'Uff. ❋ e ▭. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

Eletto alla carica il 7 maggio 1922 per il triennio dal 20 aprile 1922 al 19 aprile 1925.

VICE-PRESIDENTE

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Professore ordinario di Geologia nella R. Università di Torino, Comm. ❋ e ▭.

Eletto alla carica il 7 maggio 1922 per il triennio dal 20 aprile 1922 al 19 aprile 1925.

TESORIERE

Prato (Giuseppe), Professore ordinario di Economia politica e Scienza delle finanze nel R. Istituto superiore di Studi commerciali di Torino, ▭. — *Via Bertola, 37.*

Rieletto alla carica il 9 luglio 1922 per il triennio dal 1° luglio 1922 al 30 giugno 1925.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Segre (Corrado), Professore ordinario di Geometria superiore nella R. Università di Torino, ✻ e Comm. ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 85.*
Eletto alla carica l'11 aprile 1920 per il triennio dal 9 febbraio 1920 all'8 febbraio 1923.

Segretario

Mattirolo (Oreste), Professore ordinario di Botanica nella R. Università di Torino, ✻ e Comm. ✠. — *Torino, Orto Botanico (al Valentino).*
Eletto alla carica il 25 giugno 1922 per il triennio dall'11 giugno 1922 al 10 giugno 1925.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Comm. ✠. — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*
29 gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Professore emerito di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✻ e ✠. — *Torino, Via Sebastiano Valfrè, 14.*
29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), Professore emerito della R. Università di Torino, Comm. ✻ e ✠. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*
5 dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Segre (Corrado), *predetto.*
10 febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Professore ordinario di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, ✻ e Comm. ✠. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*
25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Professore ordinario di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Comm. ✻, Gr. Uff. ♔, Gr. Uff. Corona del Belgio. — *Torino, Corso Valentino, 40.*
3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guidi (Camillo), Professore ordinario di Statica grafica e Scienza delle costruzioni, Uff. ✻, Gr. Uff. ♔. — *Torino, Corso Valentino, 7.*
31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), *predetto.*
15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), *predetto.*
10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica nel R. Politecnico di Torino, Uff. ✻, Comm. ♔. — *Torino, Via Cernaia, 40.*
9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Professore ordinario di Fisica matematica nella R. Università di Torino, Comm. ✻ e ♔. — *Corso Vinzaglio, 75.*
5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Panetti (Modesto), Professore ordinario di meccanica applicata alle macchine e di Costruzioni Aeronautiche nel R. Politecnico di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻ e ♔. — *Via S. Francesco da Paola, 36.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 27 aprile 1919.

Ponzio (Giacomo), Professore ordinario di chimica generale nella R. Universitàdi Torino, ♔. — *Torino, Corso Massimo d'Azeglio, 48.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918.

Sacco (Federico), Prof. ordinario di Geologia applicata nel R. Politecnico, Comm. ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele II, n° 18.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918.

Majorana (Quirino), Professore ordinario di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna, Comm. ✻ e ♔. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918.

Herlitzka (Amedeo), Professore ordinario di Fisiologia nella R. Università di Torino, ♔. — *Torino, Corso Re Umberto, 60.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Pochettino (Alfredo), Professore ordinario di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, ✻ e ♔. — *Torino, Via Giuria, 1.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Zambonini (Ferruccio), Professore ordinario di mineralogia nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Bagetti, 27.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Professore ordinario di Fisica matematica nella R. Univ. di Roma, ✠, Comm. ✻, Gr. Cord. ✠. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Bianchi (Luigi), Professore ordinario di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, ✠, ✻, ✠. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Professore Emerito di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Comm. ✻, Gr. Cord. ✠, Cav. ✠. — *Pavia, Corso Vitt. Eman. 77.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Bertini (Eugenio), Professore ordinario di Geometria superiore nella R. Università di Pisa, ✻, ✠. — *Pisa, Lungarno Mediceo, Palazzo Schiff.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Romualdo), Professore ordinario di Botanica nell'Università di Roma, ✠, Gr. Uff. ✠. — *Roma (3), Via Milano, 41, Istituto Botanico.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Rosa (Daniele), Professore ordinario di Zoologia ed anatomia comparata nella R. Università di Modena, ✠. — *Modena, R. Università.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Levi-Civita (Tullio), Professore ordinario di analisi superiore nella R. Università di Roma, ✠. — *Roma, Via Sardegna, 50.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Cantone (Michele), Professore ordinario di fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, Comm. ✠. — *Napoli, Istituto fisico, Via A. Tari, 3.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Grassi (Giambattista), Professore di anatomia comparata nella R. Università di Roma, Senatore del Regno,
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Göttingen.
10 gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Thomson (John Joseph), Professore nella Università di Cambridge. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Rutherford (Sir Ernesto), Professore di fisica sperimentale nell'Università di Cambridge.
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Hale (Giorgio), Astronomo. — *Pasadena, Mount Wilson Observatory (California).*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Kamerlingh Onnes (Heike), Professore di fisica nell'Università di Leida.
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Picard (Emilio), Segretario perpetuo per le scienze matematiche dell'Accademia delle Scienze di Parigi. — *Parigi (6), Quai Conti, 25.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Geikie (Arcibaldo), Geologo e Mineralogo. — *Surrey, Sheperd's Down, Haslemere.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Michelson (Alberto), Professore di fisica nell'Università di Chicago. — *Chicago, Kimbark Avenue, 5756.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Lorentz (Enrico), Professore di fisica teoretica nell'Università di Leida. — *Harlem, Juliana straat, 49.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore all'Università di Stoccolma. — 12 gennaio 1896.
Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.
Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.
Berzolari (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — 24 febbr. 1918.
Marcolongo (Roberto), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Pincherle (Salvatore), Professore nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Ricci-Curbastro (Gregorio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
Severi (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Appell (Paul Emile), Professore di meccanica analitica alla Sorbona, Parigi. — 11 giugno 1922.
Borel (Emile), Professore di calcolo delle probabilità e di fisica matematica, Parigi. — Id. id.
Loria (Gino), Professore di geometria superiore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Study (Eduard), Professore di matematiche nell'Università di Bonn. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Edinburg. — 27 maggio 1894.
Cerulli (Vincenzo), Direttore dell' Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.
Boussinesq (Valentino), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — Id. id.
Albenga (Giuseppe), Professore nella R. Università di Bologna. — 24 febbraio 1918.
Colonnetti (Gustavo), Professore nel R. Politecnico di Torino, — Id. id.
Maggi (Gian Antonio), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Mesnager (Agostino), Professore nella Scuola Nazionale dei Ponti e Strade, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 29 dicembre 1918.
Fantoli (Gaudenzio), Professore di idraulica nel R. Istituto tecnico superiore di Milano. — 11 giugno 1922.
Planck (Max), Professore di fisica matematica nell'Università di Berlino. — Id. id.
Prandtl (Ludwig), Professore di meccanica applicata nell'Università di Gottinga. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 giugno 1903.
Garbasso (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze. — 15 maggio 1910.
Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.
Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.
Corbino (Orso Mario), Professore nella R. Università di Roma. — 24 febbraio 1918.
Lombardi (Luigi), Professore nel Politecnico di Roma. — Id. id.
Marconi (Guglielmo), Dottore in scienze, Londra. — Id. id.
Palazzo (Luigi), Direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma. — Id. id.
Rizzo (Giovanni Batt.), Professore di fisica terrestre nella R. Università di Messina. — 11 giugno 1922.
Bragg (W. H.), Professore di fisica nel Collegio Universitario di Londra. — Id. id.
Perrin (Jean), Professore di chimica-fisica alla Sorbona, Parigi. — Id. id.
Laue (Max von), Professore di fisica teoretica nell'Università di Berlino. — Id. id.
Amerio (Alessandro), Professore di fisica sperimentale nella R. Università di Messina. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.
Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — Id. id.
Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 giugno 1903.
Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.
Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — Id. id.
Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.

Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 maggio 1910.
Willstätter (Richard), Professore nell'Università di Monaco. — Id. id.
Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.
Angeli (Angelo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento di Firenze. — 24 febbraio 1918.
Le Chatelier (Enrico Luigi), dell'Istituto di Francia, Parigi. — Id. id.
Nasini (Raffaele), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.
Piutti (Arnaldo), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Bruni (Giuseppe), R. Politecnico di Milano. — 15 giugno 1919.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 febbraio 1885.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.
Suess (Franc. Edoardo), Professore nella " Deutsche Technische Hochschule " di Praga. — Id. id.
Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
Kilian (Carlo Vilfredo), Membro dell'Istituto di Francia. Professore nella Università di Grenoble. — Id. id.
Artini (Ettore), Professore e Direttore del Museo Civico di Storia Naturale di Milano. — 24 febbraio 1918.
Brugnatelli (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Dal Piaz (Giorgio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
De Stefani (Carlo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Day (Arturo L.), Direttore del Laboratorio geo-fisico dell'Istituzione Carnegie, Washington, D. C. — 11 giugno 1922.
Washington (Enrico Stefano), Laboratorio geo-fisico di Washington. — Id. id.
Franchi (Secondo), Ingegnere, Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.
Gortani (Michele), Professore di geologia nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Novarese (Vittorio), Ingegnere, Professore; Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.

De Vries (Ugo), Professore nella Università di Amsterdam. — 13 genn. 1918.
Bower (Federico Orpen), Professore nella Università di Glasgow. — 24 febbraio 1918.
De Toni (Giovanni Batt.), Prof. nella R. Università di Modena. — Id. id.
Chodat (Roberto), Professore di botanica nell'Università di Ginevra. — 25 giugno 1922.
Longo (Biagio), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Pisa. — Id. id.
Gola (Giuseppe), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Padova. — Id. id.
Warming (Eugenio), Professore di botanica nell'Univessità di Kopenhagen. — Id. id.
Massart (Giovanni), Professore nell'Università libera di Bruxelles. — Id. id.
Bois (Desiderato), Professore nel Museo di storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 febbraio 1898.
Boulenger (Giorgio Alberto), Giardino botanico dello Stato, Bruxelles. — 28 gennaio 1900.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.
Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British-Museum of Natural History*. — 5 marzo 1905.
Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell' Università di Madrid. — 15 maggio 1910.
Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.
Albertoni (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella Università di Bologna. — 24 febbr. 1918.
Bovero (Alfonso), Professore alla Facoltà di Medicina, S. Paolo del Brasile. — Id. id.
Chiarugi (Giulio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento di Firenze. — Id. id.
Vialleton (L.), Professore di Anatomia Microscopica, Montpellier. — Id. id.
Bottazzi (Filippo), Professore di fisiologia sperimentale nella R. Università di Napoli. — 11 giugno 1922.
Cesaris-Demel (Antonio), Professore di anatomia patologica nella R. Università di Pisa. — Id. id.
Gley (E.), Prof. di biologia generale nel *Collège de France*, Paris. — Id. id.
Hamburger (H. J.), Professore di Fisiologia nella R. Università di Groningen. — Id. id.
Richet (Charles), Professore di fisiologia nell'Università di Parigi. — Id. id.
Sherrington (Ch. S.), Professore di fisiologia nell'Università di Oxford. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

De Sanctis (Gaetano), Professore ordinario di Storia antica nella R. Università di Torino, ✻, Gr. Uff. ✠, Cav. Gr. Cr. del S. M. O. del Santo Sepolcro. — *Torino, Corso Vittorio Em., 44.*
Eletto alla carica il 18 giugno 1922 per il triennio dal 20 aprile 1922 al 19 aprile 1925.

Segretario.

Vidari (Giovanni), Professore ordinario di Pedagogia nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✻ e ✠. — *Torino, Via Valeggio, 15.*
Eletto alla carica il 18 giugno 1922 per il triennio dal 20 aprile 1922 al 19 aprile 1925.

ACCADEMICI RESIDENTI

Boselli (S. E. Paolo), Senatore del Regno, Primo Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano, ecc., Cav. Ord. Supr. SS. Annunziata, ✠, Gr. Cord. ✻ e ✠. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*
15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), *predetto.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), Professore ordinario di Letteratura latina nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✻ e ✠. — *Piazza Vittorio Veneto, 10.*
20 maggio 1906 - 9 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

Brondi (Vittorio), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione e Rettore della R. Università di Torino, Comm. ✻ e ✠. — *Torino, Via Montebello, 26.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato 4 febbraio 1917.

Einaudi (Luigi), Senatore del Regno, Professore ordinario di Scienza delle finanze e Diritto finanziario nella R. Università di Torino, Comm. ♛. — *Torino, Piazza Statuto, 16.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 13 dicembre 1917.

Baudi di Vesme (Alessandro dei conti), Soprintendente alle Gallerie ed ai Musei medioevali, ecc. del Piemonte e della Liguria. — *Via dei Mille, 54.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 4 luglio 1918.

Schiaparelli (Ernesto), Direttore del R. Museo di Antichità in Torino, Uff. ✱, Comm. ♛.
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 11 luglio 1918.

Patetta (Federico), Professore ordinario di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, ✱, Comm. ♛. — *Via S. Massimo, 44.*
3 maggio 1914 - 11 giugno 1914. — Pensionato 27 ottobre 1918.

Vidari (Giovanni), *predetto.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 23 febbraio 1920.

Prato (Giuseppe), *predetto.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 30 dicembre 1920.

Cian (Vittorio), Professore ordinario di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Comm. ♛. — *Via G. Berchet, 2.*
20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 2 ottobre 1922.

Pacchioni (Giovanni), Professore ordinario di diritto civile nella R. Università di Torino, ♛. — *Via Cibrario, 54.*
20 maggio 1917 - 10 giugno 1917.

Valmaggi (Luigi), Professore ordinario di Grammatica greca e latina nella R. Università di Torino, Comm. ♛. — *Via S. Secondo, 31.*
20 maggio 1917 - 10 giugno 1917.

Faggi (Adolfo), Professore ordinario di Storia della filosofia nella R. Università di Torino, Comm. ♛. — *Torino, Corso Re Umberto, 57.*
18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920.

Luzio (Alessandro), Sovrintendente del R. Archivio di Stato di Torino, ✱, Comm. ♛. — *Via Principe Tommaso, 4.*
18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920.

Mosca (Gaetano), Senatore del Regno, Professore ordinario di diritto costituzionale nella R. Università di Torino, Comm. ✱, Gr. Uff. ♛. — *Torino, Corso Re Umberto, 45.*
18 gennaio 1920 — 12 febbraio 1920.

Jannaccone (Pasquale), Professore ordinario di statistica nella R. Università di Torino, Comm. ♛. — *Torino, Via Principe Tommaso, 39.*
20 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e del R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, ✠, Uff. ✻, Comm. ♕. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 marzo 1892 - 26 marzo 1892.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Gr. Cr. ✻ e ♕. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Senatore del Regno, Professore emerito di Lingue e Letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, ✠, Gr. Uff. ✻ e ♕. — *Firenze (22), Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Senatore del Regno, Professore emerito di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, ✠, Uff. ✻, Comm. ♕, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Senatore del Regno, Professore emerito di Paleoetnologia nella R. Università di Roma, ✠, Comm. ✻, Gr. Uff. ♕. — *Roma, Via del Collegio Romano, 26.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore ordinario di Storia comparata delle letterature neo-latine nella R. Università di Napoli, ✠, Comm. ✻ e ♕. — *Napoli, Largo Latilla, 6.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Sabbadini (Remigio), Professore ordinario di Letteratura latina nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano, Comm. ♕. — *Milano (10), Foro Bonaparte, 52.*
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Pareto (Marchese Vilfredo), Professore di Sociologia nell'Università di Lausanne (Svizzera).
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Salandra (S. E. Antonio), Deputato al Parlamento, Professore ordinario di Diritto amministrativo nella R. Università di Roma, Cavaliere dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, ✠, Gr. Cr. ✻ e ♕, ecc. — *Roma, Via Girolamo Fracastoro, 7.*
22 dicembre 1918 - 12 gennaio 1919.

ACCADEMICI STRANIERI

Mercier (Sua Eminenza Desiderato), Arcivescovo di Malines.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Wilson (Woodrow Tommaso), già Professore e Rettore dell'Università di Princeton, già Presidente della Repubblica degli Stati Uniti d'America.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Nolhac (Pietro de), Professore nell'École pratique des hautes études di Parigi.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Marshall (Alfredo), già Professore nell'Università di Cambridge (Inghilterra).
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Hauvette (Enrico), Professore di lingua e letteratura italiana alla Sorbona, Parigi.
28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nella Scuola Politecnica di Parigi. — 15 marzo 1896.

Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — Id. id.

Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.

Gentile (Giovanni), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 maggio 1914.

Martinetti (Pietro). Prof. nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — Id. id.

Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.

Varisco (Bernardino), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 marzo 1886.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Brandileone (Francesco), Professore nella R. Università di Bologna. — 10 giugno 1906.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Senatore del Regno, Prof. emerito della R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — 17 maggio 1914.
Ranelletti (Oreste), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 23 giugno 1918.
Romano (Santi), Professore di diritto costituzionale nella R. Università di Pisa. — 28 maggio 1922.
Sella (Emanuele), Professore di economia politica nella R. Università di Parma. — Id. id.
Dallari (Gino), Professore di filosofia del diritto nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 marzo 1896.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — 17 maggio 1914.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.
Pareti (Luigi), Professore di storia antica nel R. Istituto di studi superiori di Firenze. — 28 maggio 1922.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano. — 14 marzo 1886.
Barnabei (Felice), Roma. — 28 aprile 1895.

Orsi (Paolo), Dirett. del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Halbherr (Federico), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Marucchi (Orazio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Paribeni (Roberto), Direttore del Museo Nazionale Romano (delle Terme). — Id. id.
Breccia (Evaristo), Direttore del Museo Greco-Romano di Alessandria di Egitto. — 28 maggio 1922.

Sezione di Geografia.

Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 31 maggio 1908.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Parodi (Ernesto Giacomo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.
Nallino (Carlo Alfonso), Professore nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Vacca (Giovanni), Professore di lingue e letterature dell'estremo Oriente nel R. Istituto di studi superiori di Firenze. — 28 maggio 1922.
Levi Della Vida (Samuele Giorgio), Professore di lingue semitiche nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Senatore del Regno, Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 marzo 1890.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio alle Querce in Firenze. — Id. id.
Vitelli (Gerolamo), Senatore del Regno, Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.
Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano — 26 febbraio 1911.
Rostagno (Enrico), Professore nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 23 giugno 1918.
Barbi (Michele), Professore nella R. Università di Messina (Taviano Pistoiese). — Id. id.
Galletti (Alfredo), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Scherillo (Michele), Professore di letteratura italiana presso la R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 28 maggio 1922.

Pascal (Carlo), Professore di letteratura latina nella R. Università di Pavia. — 28 maggio 1922.

Bassi (Domenico), Direttore dell'officina dei Papiri presso la Biblioteca nazionale di Napoli. — Id. id.

Sanesi (Ireneo), Professore di letteratura italiana nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Romagnoli (Ettore), Professore di letteratura greca nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Bignone (Ettore), Professore di letteratura greca nella R. Università di Palermo. — Id.

MUTAZIONI

avvenute nel Corpo Accademico

dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1922

ELEZIONI

SOCI

Faggi (Adolfo) . . . . .
Vidari (Giovanni) . . . .
Einaudi (Luigi) . . . . .
De Sanctis (Gaetano). . .
eletti nell'adunanza del 26 febbraio 1922 della Classe di scienze mor., stor. e filol. membri della Commissione per il premio Gautieri di Filosofia (triennio 1918-1920).

Zambonini (Ferruccio), eletto Socio nazionale residente nell'adunanza del 5 marzo 1922 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ed approvata l'elezione con R. D. del 30 marzo 1922.

Cantone (Michele) . . . .
Levi-Civita (Tullio) . . .
Grassi (Giambattista). . .
eletti Soci nazionali non residenti nell'adunanza del 5 marzo 1922 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ed approvata l'elezione con R. D. 30 marzo 1922.

Rutherford (Ernesto). . .
Hale (Giorgio) . . . . .
Kamerlingh Onnes (Heike)
Picard (Emilio). . . . .
Geikie (Arcibaldo) . . . .
Michelson (Alberto) . . .
Lorentz (Enrico) . . . .
eletti Soci stranieri nella adunanza del 5 marzo 1922 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ed approvata l'elezione con R. D. 30 marzo 1922.

Ruffini (Francesco), eletto presidente nell'adunanza a Classi unite del 7 maggio 1922, ed approvata l'elezione con R. D. 11 giugno 1922.

Parona (Carlo Fabrizio), eletto Vice Presidente, id. id.

Jannaccone (Pasquale), eletto Socio nazionale residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche il 28 maggio 1922, ed approvata l'elezione con R. D. 13 luglio 1922.

Hauvette (Enrico), eletto Socio straniero della medesima Classe nell'adunanza del 28 maggio 1922, ed approvata l'elezione con R. D. del 13 luglio 1922.

Bassi (Domenico)
Bignone (Ettore)
Breccia (Evaristo)
Dallari (Gino)
Levi Della Vida (Samuele G.)
Pareti (Luigi)
Pascal (Carlo)
Romagnoli (Ettore)
Romano (Santi)
Sanesi (Ireneo)
Scherillo (Michele)
Sella (Emanuele)
Vacca (Giovanni)

eletti Soci corrispondenti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 28 maggio 1922.

Amerio (Alessandro)
Appell (Paolo Emilio)
Borel (Emilio)
Bottazzi (Filippo)
Bragg (W. H.)
Cesaris-Demel (Antonio)
Day (Arturo)
Fantoli (Gaudenzio)
Franchi (Secondo)
Gley (E.)
Gortani (Michele)
Hamburger (H. J.)
Laue (Max von)
Loria (Gino)
Novarese (Vittorio)
Perrin (Jean)
Planck (Max)
Prandtl (Ludwig)
Richet (Charles)
Rizzo (Giovanni Battista)
Sherrington (Ch. S.)
Study (Eduard)
Washington (Enrico Stefano)

eletti Soci corrispondenti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza dell'11 giugno 1922.

De Sanctis (Gaetano), eletto Direttore della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 18 giugno 1922, ed approvata l'elezione con R. D. 13 luglio 1922.

Vidari (Giovanni), eletto Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 18 giugno 1922; elezione approvata con R. D. 13 luglio 1922.

Mattirolo (Oreste), eletto Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 25 giugno 1922, ed approvata l'elezione con R. D. 25 luglio 1922.

Bois (Desiderato) . . . . .
Chodat (Roberto) . . . . .
Gola (Giuseppe) . . . . . .
Longo (Biagio . . . . . .
Massart (Giovanni). . . . .
Warming (Eugenio) . . . .
eletti Soci corrispondenti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 25 giugno 1922.

Stampini (Ettore), eletto delegato al Consiglio di Amministrazione dalla Classe di scienze morali, storiche e filologiche il 2 luglio 1922.

Prato (Giuseppe), rieletto alla carica di Tesoriere dell'Accademia nella seduta a Classi unite del 9 luglio 1922, ed approvata l'elezione con R. D. del 13 agosto 1922.

Guidi (Camillo) . . .
Somigliana (Carlo). .
eletti delegati presso il Consiglio di amministrazione dalla Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 19 novembre 1922.

MORTI

. . . . . 1916.

Wiesner (Giulio), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di botanica e fisiologia vegetale).

31 agosto 1920.

Wundt (Guglielmo), acccademico straniero.

Gennaio 1922.

Jordan (Camillo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di matematiche pure).

9 febbraio 1922.

Liebisch (Teodoro), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di mineralogia, geologia e paleontologia).

17 marzo 1922.

Flamini (Francesco), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di filologia, storia letteraria, ecc.).

31 marzo 1922.

Taramelli (Torquato), Socio nazionale non residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

22 aprile 1922.

Duchesne (Luigi), accademico straniero.

28 maggio 1922.

Capellini (Giovanni), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

1° ottobre 1922.

Sforza (Giovanni), Socio nazionale residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

27 novembre 1922.

Issel (Arturo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

8 dicembre 1922.

Masci (Filippo), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Novembre 1922

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci SEGRE, PEANO, GUIDI, GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, SACCO, HERLITZKA, POCHETTINO e il Segretario MATTIROLO.

Hanno scusato l'assenza i Soci D'OVIDIO e NACCARI.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza il quale viene approvato senza osservazioni.

Il Presidente ricordando essere questa la prima adunanza del nuovo anno accademico, dopo aver dato il saluto di benvenuto ai Colleghi, comunica il telegramma inviato all'Accademia dal nuovo Ministro della Pubblica Istruzione S. E. GENTILE, nostro Socio corrispondente, al quale fu risposto dal Presidente.

Dà quindi la parola al Socio MATTIROLO il quale offre in omaggio all'Accademia:

1) *Una raccolta di scritti del Comm.* GIACOMO BONI *riuniti sotto il titolo* " *Urania* „.

2) *Osservazioni sopra due Ipogei della Cirenaica e considerazioni intorno ai Generi: Tirmania e Terfezia.*

3) *Contributo alla Micologia Ipogea della Venezia subalpina.*

4) *Commemorazione di Antonio Borzi.*

Di queste sue memorie egli discorre brevemente.

Il Socio Somigliana presenta e fa dono all'Accademia di una sua Nota: *Sulla trasformazione di Lorentz.* La esposizione sommaria dell'argomento da lui trattato, dà luogo ad una interessante discussione, alla quale prendono parte i Soci Pochettino, Grassi e Peano.

Il Socio Guidi fa omaggio all'Accademia di tre sue memorie e brevemente ne parla:

1) *Pali in acciaio-Beton centrifugati.*

2) *Sulle Scuole d'Ingegneria.*

3) *Appendice alla Statica delle Dighe per laghi artificiali.*

Il Socio Peano offre quindi in dono una sua Nota: *Operationes super Magnitudines.*

Sono presentate ed accettate per la stampa negli *Atti* le Note seguenti:

Contatti nella coppia vite-ruota elicoidale, del Sig. Ing.re Sesini, presentata dal Socio Panetti.

Osservazioni sulla Spermiogenesi di Erinaceus, del Dr Luigi Cognetti-De Martiis, presentata dal Vice Presidente Parona per conto del Socio Salvadori.

Il Presidente comunica all'Accademia, per incarico del Tesoriere, che le condizioni per la stampa delle Note negli *Atti* rimarranno immutate sino alla fine del corrente anno e che il Consiglio di amministrazione sarà chiamato a prendere nuove disposizioni per il venturo anno, in relazione alle condizioni del bilancio accademico.

In seduta privata si procedette alla nomina di due delegati della Classe presso il Consiglio d'amministrazione, e riuscirono eletti i Soci Guidi e Somigliana.

LETTURE

Contatti nella coppia vite-ruota elicoidale

Nota dell'Ing. OTTORINO SESINI
Presentata dal Socio nazionale residente Panetti

È noto che in una coppia cinematica rigida, del tipo più generale, che debba assicurare un determinato moto relativo fra i suoi due elementi, uno di tali elementi può essere conformato in modo arbitrario, purchè sia capace, nel suo moto relativo, di inviluppare una superficie, che deve costituire la superficie attiva dell'altro elemento della coppia. Procedendo in questo modo si ottengono due superficie che si toccano in ciascun istante lungo una linea, e precisamente lungo la linea luogo dei punti il cui moto relativo, nell'istante considerato, è diretto tangenzialmente alle due superficie.

Per giudicare adunque della capacità o meno di una superficie arbitrariamente scelta, a costituire un elemento di una coppia cinematica, dovremo anzitutto vedere quali punti di detta superficie hanno, nei successivi istanti, moto relativo tangenziale. Solo la porzione di superficie luogo di questi punti potrà dare un inviluppo ed essere attiva nella trasmissione del moto.

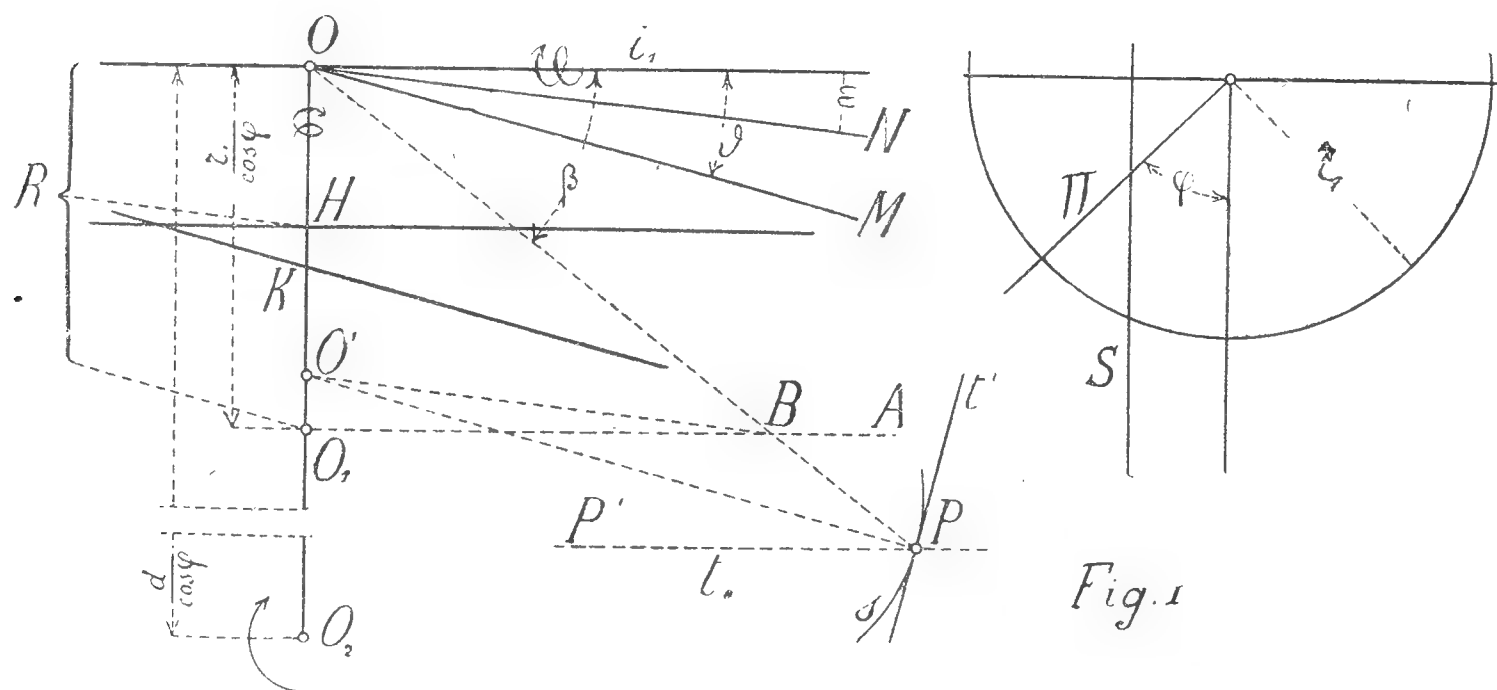
Una più approfondita analisi potrà poi escludere alcuni di questi contatti, ove si verifichino interferenze, e giudicare inoltre della maggiore o minore attitudine dei contatti stessi a trasmettere lavoro, sia per quanto riguarda il rendimento, sia per la resistenza allo schiacciamento degli elementi a contatto.

È questo il caso di quei rotismi per trasmissione fra assi sghembi, nei quali uno degli elementi viene praticamente tagliato da un creatore che ha la forma dell'altro elemento della coppia, forma nella cui scelta vi è alquanta arbitrarietà (vite perpetua e meccanismi analoghi).

Prendiamo in esame un comune rotismo a vite perpetua. I due assi, conduttore e condotto, sono ortogonali. La trattazione si può facilmente estendere ad assi in posizione qualsiasi, ma tale estensione avrebbe poco interesse pratico. Alla superficie attiva di uno degli elementi (vite) si dà la forma di elicoide, con asse coincidente coll'asse di rotazione. Vediamo quali sono nei successivi istanti i punti di contatto fra questa superficie e quella generata per inviluppo nel moto relativo.

Chiamo i_1 l'asse della vite, i_2 l'asse della ruota.

Considero una sezione fatta con un piano Π (piano del disegno, fig. 1) contenente l'asse i_1 e inclinato di un angolo φ sulla normale comune a i_1 e i_2, scelto come verso positivo di φ, quello che lascia il piede su i_2 della normale comune, sotto Π.

Sia O il piede di tale normale su i_1; O_2 la traccia di i_2; è $\overline{O\,O_2} = \frac{d}{\cos\varphi}$ se d è la distanza fra gli assi. Sia s la traccia della superficie elicoidale; la vite sia destra, il suo senso di rotazione quello indicato nel disegno (verso l'alto per la parte al di sopra di Π); ω_1 e ω_2 le velocità angolari della vite e della ruota.

Il moto relativo della vite rispetto alla ruota si può considerare composto di:

1° Una rotazione con velocità angolare ω_1 intorno a i_1;

2° Una rotazione con velocità angolare $-\omega_2 \operatorname{sen} \varphi$ intorno alla retta $O_2\,O$;

3° Una rotazione con velocità angolare $-\omega_2 \cos \varphi$ intorno al punto O_2 (nel piano Π).

Nel suddetto moto relativo la velocità di un punto generico P di s avrà una componente normale a Π di valore:

$$(\omega_1 \overline{PO} \operatorname{sen} \beta + \omega_2 \overline{PO} \operatorname{sen} \varphi \cos \beta)$$

verso l'alto, ove β è l'angolo che la $\overline{PO}$ fa con i_1; e una componente nel piano dovuta ad una rotazione con velocità angolare $-\omega_2 \cos \beta$, intorno ad O_2 (colle ipotesi fatte in senso contrario al moto delle lancette dell'orologio).

Se P è punto di contatto, dovrà la sua velocità relativa giacere nel piano tangente in P alla superficie elicoidale della vite, il quale piano è individuato dalla tangente t' alla traccia s e dalla tangente t all'elica di asse i_1, passo p_1 condotta per P (ammesso che sia p_1 il passo della vite). Quest'ultima retta si proietta su Π nella t_0, parallela a i_1, e fa con detta proiezione un angolo γ definito da:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\pi \overline{OP} \operatorname{sen} \beta}{p_1} .$$

Potremo dire che la velocità relativa di P è decomponibile secondo t e t'.

Dato che t' giace su Π, la componente secondo t darà proiezione sulla normale a Π uguale a:

$$\omega_1 \overline{PO} \operatorname{sen} \beta + \omega_2 \overline{PO} \operatorname{sen} \varphi \cos \beta ,$$

e perciò proiezione su Π:

$$(\omega_1 \overline{PO} \operatorname{sen} \beta + \omega_2 \overline{PO} \operatorname{sen} \varphi \cos \beta) \frac{p_1}{2\pi \overline{OP} \operatorname{sen} \beta} = \\ = \frac{p_1}{2\pi} \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{tg} \beta} \right)$$

diretta secondo PP'.

Questa proiezione sommata colla componente secondo t', deve dare la componente sul piano Π della velocità relativa di P, cioè, come si è detto, la velocità prodotta da una rotazione con velocità angolare $-\omega_2 \cos \varphi$ intorno a O_2; ossia il moto risultante in P da una velocità di rotazione $-\omega_2 \cos \varphi$

intorno a O_2 e da una traslazione $-\left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{tg}\,\beta}\right)\frac{p_1}{2\pi}$ secondo PP' deve essere diretto secondo t'.

Ciò significa che una rotazione intorno al punto O' giacente sulla $O\,O_2$ e distante da O_2 verso O di

$$\frac{1}{\omega_2 \cos\varphi}\left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{tg}\,\beta}\right)\frac{p_1}{2\pi} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2 \cos\varphi} + \frac{\text{tg}\,\varphi}{\text{tg}\,\beta}\right)\frac{p_1}{2\pi}$$

fa muovere P secondo t'; la normale in P ad s passa per O'. La distanza di O' da O che chiamo y (positiva verso il basso) è:

$$y = \frac{d}{\cos\varphi} - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2 \cos\varphi} + \frac{\text{tg}\,\varphi}{\text{tg}\,\beta}\right)\frac{p_1}{2\pi}\,.$$

Ma nel rotismo in parola, $\frac{\omega_1}{\omega_2}\,\frac{p_1}{2\pi}$ è uguale al raggio della così detta primitiva della ruota; $d - \frac{\omega_1}{\omega_2}\,\frac{p}{2\pi}$ è uguale ad r_1, raggio del così detto cilindro primitivo della vite. Si ha perciò:

$$y = \frac{r_1}{\cos\varphi} - \frac{p_1}{2\pi}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\text{tg}\,\beta}\,.$$

Se P è punto di contatto, la normale in P alla traccia s passa pel punto O' ora determinato.

La posizione di O' sulla retta $O\,O_2$ è funzione di φ e di β, cioè del piano Π e della retta $P\,O$. Tale punto può essere determinato graficamente tirando da O_1 (punto di $O\,O_2$ che dista di $\frac{r_1}{\cos\varphi}$ da O) la parallela $O_1 A$ a i_1 e da B, punto d'intersezione di $O_1 A$ con OP, una retta $B\,O'$ la cui inclinazione su $O_1 A$ è definita da:

$$\text{tg}\,\widehat{O_1 B O'} = \frac{p_1\,\text{tg}\,\varphi}{2\pi\,\text{tg}\,\beta} : \frac{r_1}{\cos\varphi\,\text{tg}\,\beta} = \frac{p_1\,\text{sen}\,\varphi}{2\pi\,r_1}\,.$$

Per un dato piano Π la punteggiata degli O' e il fascio delle rette $O\,P$ sono proiettivi.

Se, come avviene nelle comuni viti perpetue, la superficie attiva è un elicoide conoide con generatrici inclinate sull'asse i_1 di un angolo $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ (generalmente $\vartheta = 15^\circ$), s è rettilineo, e

le normali ad s divengono rette inclinate di ϑ su i_1, cioè parallele ad OM. I punti di contatto P si troveranno sulle intersezioni delle rette OB colle parallele a OM condotte per gli O' corrispondenti, cioè sulle intersezioni di rette omologhe di due fasci proiettivi di centro rispettivamente O ed il punto improprio di OM. Il luogo di P è una conica che passa per O e per il punto improprio di OM. Facendo tendere β a 0, si vede che P si porta nel punto improprio di i_1, altro punto della conica, che risulta perciò un'iperbole con asintoti paralleli a i_1 e ad OM. Essa è pienamente determinata, quando si osservi che passa per O_1 ed ammette come tangente in O la retta ON, parallela a BO' (inclinata di $\epsilon = \widehat{O_1 B O'}$ su i_1), come si vede, facendo avvicinare OP ad ON.

Essendo noti i due punti improprii, col solo teorema di Pascal, riesce facile determinare sia l'intersezione dell'iperbole con una parallela a i_1 o ad OM, sia gli asintoti.

Numerando i 5 vertici noti dell'esagono inscritto come segue:

1 = punto improprio di i_1; 2 = 3 = punti di tangenza di ON; 4 = O_1; 5 = punto improprio di OM, e facendo coincidere il punto 6 incognito col punto 1, si vede che l'asintoto 5-6 parallelo a i_1 si può costruire tirando da O_1 la parallela ad OM, dal punto R d'incontro di tale parallela con i_1 la parallela ad ON, fino ad incontrare in H la OO_1. Per H passa l'asintoto cercato. Risulta:

$$\overline{OH} = \frac{\overline{OO_1}}{\operatorname{tg}\vartheta} \cdot \frac{p_1 \operatorname{sen}\varphi}{2\pi r_1} = p_1 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\pi \operatorname{tg}\vartheta} .$$

L'altro asintoto, parallelo a OM, si può determinare in modo analogo, o, più semplicemente, portando $\overline{O_1 K} = \overline{OH}$, e da K la parallela ad ON.

La conoscenza degli asintoti può darci subito un'idea dell'andamento della linea dei contatti e del suo modo di variare al variare di φ (cioè del piano Π) o degli elementi della vite. Così è facile vedere che il ramo utile della curva (quello passante per O_1) volge la concavità verso O per $\frac{p_1 \operatorname{tg}\varphi}{2\pi \operatorname{tg}\vartheta} < 0$; diviene una retta parallela ad OM per $\operatorname{tg}\varphi = 0$, volge la con-

vessità verso O per $0 < \frac{p_1 \operatorname{tg} \varphi}{2\pi \operatorname{tg} \vartheta} < \frac{r_1}{\cos \varphi}$, è una retta parallela a i_1 per $\frac{p_1 \operatorname{tg} \varphi}{2\pi \operatorname{tg} \vartheta} = \frac{r_1}{\cos \varphi}$, torna a volgere la concavità verso O per $\frac{p_1 \operatorname{tg} \varphi}{2\pi \operatorname{tg} \vartheta} > \frac{r_1}{\cos \varphi}$ (il qual caso non si verifica in pratica).

Se interessa invece conoscere la linea dei contatti su di una sezione piana S, normale a i_2 e parallela a i_1, si può facilmente anche a tale fine valersi delle proprietà sopra dette. Basterà considerare vari piani come Π e trovare su ciascuno di essi il punto d'incontro dell'iperbole luogo dei contatti colla retta d'intersezione del piano Π col piano S.

Con opportuni accorgimenti l'operazione riesce più semplice e più esatta di quella che giunge alla linea dei contatti determinando prima la intersezione della superficie elicoidale della vite col piano S; riesce in particolar modo utile considerare, al posto delle iperboli luoghi di contatti sui vari piani Π, le loro proiezioni su S che sono ancora iperboli, affini alle precedenti, e determinabili con ugual facilità.

Così pure, se la superficie attiva, sempre elicoidale, ha generatrici (ossia traccia su Π) curvilinee, come conviene per valori molto grandi di p_1, si può valersi di quanto detto sopra per determinare la linea dei contatti. Basterà conoscere la traccia s, od avere anche semplicemente il valore dell'angolo $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ che una tangente ad s fa coll'asse i_1, in funzione della distanza $OP \operatorname{sen} \beta$ del punto di tangenza da i_1.

Su di una retta parallela a i_1, sarà punto di contatto l'intersezione della retta stessa colla iperbole che sarebbe luogo dei contatti sul piano Π contenente i_1 e la retta data, per una ipotetica superficie attiva a elicoide conoide, avente generatrici inclinate di $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ sull'asse. In altre parole, la costruzione per punti della curva cercata è la stessa che si seguirebbe per una vite a generatrici rettilinee, quando si descrivesse per punti la iperbole luogo dei contatti per mezzo delle sue intersezioni con delle parallele a i_1, colla sola differenza, che bisogna per ogni parallela considerare un diverso valore di ϑ.

Filetto globoidale.

Il metodo sovra esposto si può applicare anche al caso della coppia comunemente detta a " filetto globoidale „ che differisce dalla vite perpetua comune in quanto al posto di una vera vite si ha un elemento, pel quale ammettiamo la generazione seguente (conservando ai simboli il significato già visto).

Tracciamo in un piano contenente i_1 e normale a i_2 un profilo di ruota dentata a fianchi generalmente rettilinei, con centro in O_0, traccia di i_2 sul piano.

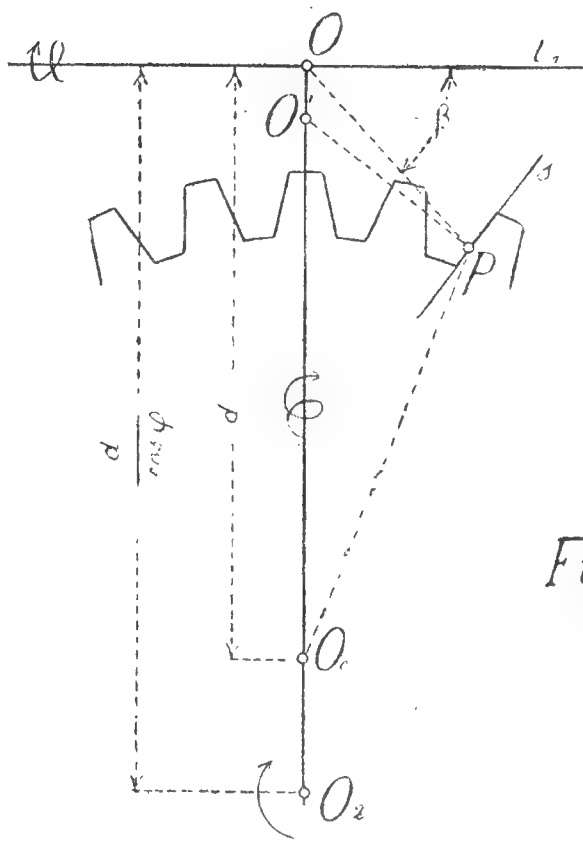
Immaginiamo di far ruotare il piano suddetto intorno a i_1 con velocità angolare ω_1 e contemporaneamente di far ruotare il profilo dentato intorno a O_0 con velocità angolare ω_2, supposti ω_1 ed ω_2 tali che ad ogni giro completo del piano intorno a i_1 corrisponda una rotazione intorno a O_0 uguale ad un passo del profilo dentato, o ad un multiplo di esso. Detto profilo muovendosi in tal modo nello spazio genera la superficie attiva del filetto globoidale.

Fig. 2

Può interessare di ricercare anche in questa coppia gli eventuali contatti in piani diversi da quello normale a i_2 e passante per i_1, nel quale evidentemente le tracce della ruota e del filetto sono per intero combacianti.

Preso un piano Π, come già visto, inclinato di φ sulla normale comune agli assi, ecc., ecc., chiamato O_0 il centro del profilo generatore (che è la traccia della superficie del filetto su Π), le componenti della velocità relativa di un punto P di contatto conservano i valori del caso precedente, cioè:

normalmente a Π $\quad \omega_1 \overline{PO} \operatorname{sen} \beta + \omega_2 \overline{PO} \cos \beta \operatorname{sen} \varphi$;

su Π rotazione intorno ad O_2 con velocità angolare $-\omega_2 \cos \varphi$.

Il piano tangente in P alla superficie attiva è individuato dalla tangente t' alla traccia s e da una retta t, normale a PO_0 e inclinata sul piano Π di un angolo γ definito da

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega_1 \overline{PO} \operatorname{sen} \beta}{\omega_2 \overline{PO_0}}$$

(t è tangente alla traiettoria di P nel moto di generazione del filetto).

Decomponendo la velocità di P secondo t e t', la componente secondo t dà proiezione $\omega_1 \overline{PO} \operatorname{sen} \beta + \omega_2 \overline{PO} \cos \beta \operatorname{sen} \varphi$ sulla normale a Π, e perciò proiezione su Π:

$$(\omega_1 \overline{PO} \operatorname{sen} \beta + \omega_2 \overline{PO} \cos \beta \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{ctg} \gamma =$$
$$= \overline{PO_0}\, \omega_2 \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{tg} \beta}\right),$$

diretta normalmente a PO_0, che possiamo ritenere dovuta ad una rotazione intorno ad O_0, con velocità $-\omega_2 \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{tg} \beta}\right)$ (cioè in senso contrario alle lancette dell'orologio).

La differenza fra questa rotazione e quella del moto relativo nel piano, deve far muovere P secondo t'; tale differenza è una rotazione intorno al punto O', situato su $O O_2$ a distanza da O verso O_1:

$$\frac{\omega_2 \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{tg} \beta}\right) d - \omega_2 \cos \varphi \frac{d}{\cos \varphi}}{\omega_2 \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{tg} \beta} - \omega_2 \cos \varphi\right)} = \frac{d}{1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{1 - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \operatorname{tg} \beta}$$

La normale in P alla traccia s, se P è punto di contatto, deve passare pel punto O' ora trovato. Al variare di β, O' descrive una punteggiata omografica col fascio delle rette PO.

Questa proprietà può servire a tracciare su Π la linea dei contatti, che non risulta in questo caso una conica, per il fatto che la traccia s, pur essendo rettilinea, non rimane nei successivi istanti, parallela a sè stessa, ma si mantiene col suo prolungamento tangente ad un cerchio di centro O_0. Ad ogni modo, su ogni retta passante per O, si riesce colla proprietà ora enunciata a determinare il possibile punto P di contatto.

Restano poi, come già si disse, da considerare le eventuali interferenze che possono praticamente annullare parte dei contatti ora determinati.

Osservazioni sulla Spermiogenesi di Erinaceus

Nota del Dott. LUIGI COGNETTI DE MARTIIS

Presentata dal Vice Presidente Parona per conto del Socio Salvadori

I fenomeni complessi e sommamente interessanti che si svolgono durante la evoluzione dello spermatidio in spermio sono stati a più riprese descritti anche nei Mammiferi. Il lavoro di Meves (1899) sulla struttura e l'istogenesi dello spermio della cavia è un eccellente modello al quale i trattatisti hanno attinto ampiamente. Si deve a quell'autore la distinzione di quattro periodi nella spermiogenesi dei Mammiferi: i tre primi sono fra loro delimitati dalla comparsa e successiva scomparsa della *manchette* caudale, ben prodotta durante il secondo periodo, il quarto comprende le trasformazioni che subisce il prospermio dopo che s'è liberato dalla massa citoplasmatica.

La manchette è stata da Meves studiata minuziosamente anche nella sua formazione a spese di filamenti che appaiono nel citoplasma ordinati in modo caratteristico attorno alla calotta nucleare destinata a diventare la parte posteriore del capo dello spermio. L'origine citoplasmatica dei filamenti venne in seguito confermata da Duesberg (1908) (1) pel *Mus decumanus*. Poco dopo van Mollé (1910) affermava invece che " la manchette doit son origine à un bourrelet nucléaire équatorial chez l'écureuil, la cobaye, la taupe et le rat et que probablement il en est ainsi chez tous les mammifères „; essa nelle specie nominate " est formée d'une membrane double „ fra i cui foglietti si trova una sostanza liquida jalina da considerarsi quale succo nucleare, mentre la membrana per " nature et origine „ è del tutto simile alla membrana nucleare.

È nota la severa critica mossa da Duesberg (1910) a van Mollé dopo avere esaminato i preparati che suggerirono a quest'ultimo autore le affermazioni sopra riferite: particolarmente pel topo Duesberg poteva contrapporre minuziose osservazioni personali pubblicate in precedenza.

---

(1) Duesberg da una revisione critica dei lavori sulla spermiogenesi dei Vertebrati comparsi dopo il lavoro di Meves sopra citato.

Per ciò che riguarda in particolare i rappresentanti della famiglia degl'Insettivori pare manchino nella letteratura osservazioni di altri autori atte ad un preciso confronto con la descrizione e le figure di van Mollé per dimostrarne, se pure è necessario, la insostenibilità. Dal canto mio ho potuto studiare la spermiogenesi dell'*Erinaceus europaeus* valendomi di sezioni (5-10 μ) di materiale fissato con formol picro-acetico di Bouin o con la miscela di Maximow-Levi. Come coloranti delle sezioni usai l'ematossilina ferrica Heidenhain o l'emallume in contrasto con colorazioni date da eosina, o da fucsina acida, o da rosso Bordeaux ecc.

L'esame delle sezioni anche con forti sistemi ottici mi ha concesso di riconoscere delicate particolarità, e con esse la dimostrazione che nell'*Erinaceus* la manchette non si forma nel modo descritto da van Mollé per la talpa, ma deriva da filamenti simili a quelli dimostrati da Meves e da altri. Potei pure riconoscere speciali caratteristiche relative all'apparato centriolare e alla definitiva costituzione dello spermio.

I filamenti destinati a formare la manchette cominciano a delinearsi quando la forma dello spermatidio da sferoide s'è fatta ovoide, con assi di circa 8 e 12 μ, in accordo colla disposizione marginale del nucleo ancora tondeggiante (diam. 4 μ). Quest'ultimo mostra allora la cromatina suddivisa in grani distribuiti irregolarmente nel lume nucleare, mentre una parte di essa è addossata alla membrana a formarvi una lamina ben sovente un po' più sottile nella calotta nucleare distale che in quella rivolta al centro dello spermatidio (fig. 1 *a*, *b*). Nel citoplasma è riconoscibile il residuo globoso dell'idiozoma, poco colorabile; l'acrosoma ha già preso la posizione definitiva all'apice anteriore del nucleo. Il filamento assile ha decorso rettilineo o quasi nella massa citoplasmatica: al suo estremo rivolto al nucleo trovasi l'apparato centriolare, costituito e disposto un po' diversamente da quanto ha descritto e figurato Meves per la cavia. Il centriolo prossimale è anche qui bacillare ed applicato alla membrana nucleare a produrvi una lieve salienza verso l'interno. Il centriolo distale non è " hakenförmig „ e diviso in ramo verticale e ramo orizzontale, esso ha forma di granulo un po' allungato in senso radiale rispetto al nucleo; la sua porzione più lontana da quest'ultimo, e un po' ingrossata,

darà luogo più tardi all'anello. I filamenti destinati a formare la manchette hanno una lunghezza pari a circa metà del diametro nucleare. Il loro numero, dapprima assai scarso (3-4), aumenterà un po' in seguito; la loro direzione, subtangenziale rispetto alla superficie del nucleo, corrisponde a quella trovata da MEVES nella cavia. I filamenti in parola trattengono l'ematossilina ferrica, ma meno tenacemente che la cromatina. Nello stadio sopra riferito lo spermatidio di *Erinaceus* rassomiglia molto a quello di *Mus* descritto e figurato da DUESBERG (1908, tav. 8, fig. 10).

In altro stadio, di poco ulteriore, i filamenti destinati a formare la manchette, tuttora in scarso numero, si presentano più allungati (fig. 2). L'allungamento s'è effettuato nel loro tratto più lontano dal nucleo, mentre il tratto accollato alla membrana nucleare si mantiene con l'estremità su per giù all'altezza dell'equatore nucleare, inteso come polo il centriolo. Di regola le estremità in parola sono un po' più ravvicinate al polo nucleare opposto al centriolo. Il parallelo in cui esse giacciono segna il limite di una sottilissima calotta di citoplasma che riveste la porzione distale del nucleo: in quella calotta si plasma il cappuccio cefalico. Il nucleo da sferico s'è fatto leggermente ovoide.

Segue a questo stadio la comparsa della manchette come formazione tubulosa a parete semplice. Si effettua frattanto una spiccata deformazione del nucleo che da ovoide diviene lenticolare. Visto di faccia (fig. 3 *b*) esso mostra contorno ovale, tronco, e lievemente incavato nella parte posteriore. Il filamento assile parte non dal punto mediano della incavatura, bensì un po' lateralmente a questo. Visto di profilo (fig. 3 *a*) il nucleo appare acuminato in avanti, tronco posteriormente (1). La lunghezza del nucleo è di μ 3,5, la sua larghezza di μ 2,7, il suo spessore massimo di μ 1,4: queste misure subiscono leggere variazioni. Il cappuccio sporge in avanti per circa 1 μ, accompagnando con curvatura un po' più accentuata quella del nucleo.

---

(1) Va qui ricordato il fatto, già noto per altri Mammiferi, che i capi dei futuri spermî, convergenti alle cellule di Sertoli, sono per lo più ordinati col loro piano maggiore in piani *radiali* dei tubuli seminali, sicchè in sezioni trasverse di questi ultimi si vedono in prevalenza capi di profilo (fig. 3 *a*).

È in tal modo ultimata la forma del capo del futuro spermio: rimando per questa alla descrizione di Retzius (1909, p. 131) (1).

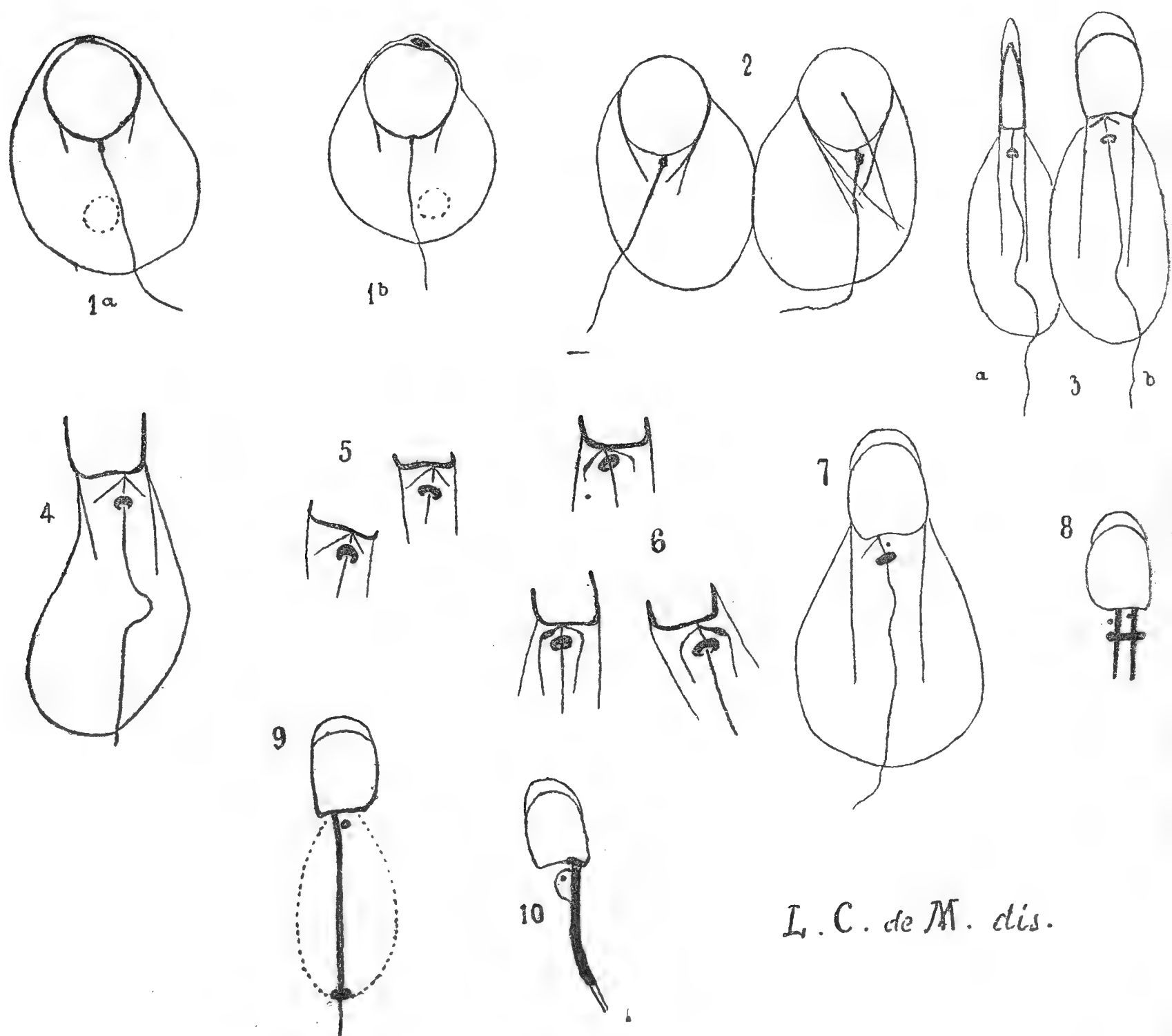



Fig. 1–10 spermiogenesi di *Erinaceus europaeus*, vedasi la spiegazione nel testo. Tutte le figure vennero disegnate alla camera lucida facendo uso dell'obb. apocr. imm. omog. Zeiss 2 mm. apert. 1,30 combinato coll'ocul. compens. 12 di Koritzka; ingrandimento circa 2000 diam.

La manchette, che avvolge circa la metà posteriore del nucleo protendendosi nel citoplasma, ha raggiunto il massimo sviluppo: essa offre in sezioni trasverse una figura nettamente ellittica in accordo con la deformazione subìta dal nucleo. La massa citoplasmatica, di forma ovale allungata, lascia sporgere

---

(1) Non ho potuto consultare il lavoro di C. M. Fürst citato da questo autore.

il nucleo col cappuccio e, all'estremo opposto, il filamento terminale. Il tratto della manchette proteso dietro la base del nucleo ha ora una lunghezza quasi doppia (raramente più che doppia) di quella del nucleo; il suo asse principale si continua con l'asse maggiore nucleare o ne diverge leggermente. Il filamento assile non è mai parallelo all'asse della manchette ma s'incrocia con esso, di regola a poca distanza dal nucleo: non di rado mostra qualche ondulazione, da ascrivere forse a effetto della fissazione.

Mentre la manchette è nel suo massimo sviluppo si ha la comparsa di speciali produzioni collegate geneticamente all'apparato centriolare. Una di queste è l'*anello* traversato dal filamento assile. Esso deriva dall'ingrossamento del centriolo distale sopra ricordato, e quando si delinea ben netta la sua forma esso dista già circa 1 μ dal margine del nucleo. Il centriolo distale è malamente riconoscibile in cima al filamento assile, quello prossimale si mantiene incrostato nella membrana nucleare.

Meritano speciale menzione due caratteristici *filamenti laminari siderofili*, uniti per una estremità al centriolo distale e divergenti fra loro ad angolo ottuso di circa 100°; il filamento assile bisseca quest'angolo. I due filamenti laminari non sono riconoscibili che negli spermatidî visti di faccia (fig. 3 *b*, 4, 5), giacciono in uno stesso piano col filamento assile, e si svolgono nello spazio circoscritto dalla manchette senza però giungere a toccare quest'ultima. La condizione laminare dei filamenti in parola si riconosce dal fatto che la loro immagine non scompare dal piano ottico anche compiendo uno spostamento non lievissimo della vite micrometrica. Dati i rapporti dei due filamenti col filamento assile, uno solo di essi interseca l'asse principale del nucleo; quello che non interseca detto asse appare un po' più spesso ma più corto dell'altro.

I due filamenti in parola sono dapprima rettilinei e disposti nel modo sopra descritto, ma in seguito appaiono più allungati e distinti ognuno in due tratti uniti ad angolo curvo. L'angolo è su per giù all'altezza dell'anello, il tratto prossimale rispetto al nucleo è quello preesistente, quello distale, di nuova formazione, è molto sottile, forse non laminare, e si svolge pressochè parallelo al filamento assile senza raggiungere nè questo nè la manchette, ma mantenendosi quasi ad ugual distanza da en-

trambi. La fig. 6 rappresenta i due filamenti nella condizione di massimo sviluppo in tre spermatidî vicini nel medesimo tubulo seminale: l'ingrossamento di un tratto determinato del filamento sottostante al lato più corto della faccia posteriore del nucleo è fenomeno costante. La formazione di filamenti collegati geneticamente ai centrioli è un fatto ben noto nella spermiogenesi: a parte il caso tipico del filamento assile ricordo ad es. il breve filamento notato da MEVES nella cavia a un estremo del centriolo prossimale (loc. cit., tav. 20).

In *Erinaceus* il centriolo prossimale non dà filamenti, nè ho potuto accertare che si spartisca in granuli.

Seguono infine nell'evoluzione dello spermatidio in spermio alcune modificazioni contemporanee o quasi, e cioè: la scomparsa (come tali) dei due filamenti laminari sopra descritti, la scomparsa della manchette, la migrazione dell'anello, l'organizzazione del pezzo intermedio, e la dissoluzione (non totale) del lobo citoplasmatico, residuo dello spermatidio.

Non mi è stato possibile riconoscere i gradi successivi delle singole modificazioni: più importanti sono gli stadî finali di alcune di esse. Così è anzitutto notevole la comparsa di un *granulo siderofilo* rotondo nel breve spazio compreso fra il nucleo e l'anello, a fianco del filamento assile, su per giù all'altezza in cui trovavasi il filamento laminare più sottile intersecante l'asse nucleare (fig. 7): l'altro filamento laminare si conserva ancora per breve tempo, poi scompare. Il granulo siderofilo è probabilmente un residuo del filamento laminare più sottile non più riconoscibile come tale neppure a formare un legamento fra il granulo siderofilo e il centriolo distale.

Il granulo in parola si conserva nella medesima posizione fino alla fine della spermiogenesi e si ritrova (come organulo costante) negli spermî maturi inoltrati nei tubuli dell'epididimo. Esso è già stato osservato in analoga posizione, cioè immediatamente dietro il capo e a fianco del filamento assile, nello spermio di altri mammiferi. Riferisco integralmente la precisa notificazione di RETZIUS (1909, p. 130) nel capitolo sullo spermio di *Talpa europaea L.*, illustrato dalla tav. XXXIX dell'opera citata:

" In diesen frühen Stadien findet sich ausserdem ein wenig nach hinten
" vom Kopfe, ungefähr beim Uebergang des Halsstücks zum Verbindungsstück
" an der Seite des Axenfadens ein ziemlich grosses, glänzendes, stark färb-

" bares Korn (fig. 4, 5, 6, 8, 10, 11), welches *in derselben Lage bei den meisten,*
" *wenn nicht allen, Säugetierspermien in solchen Stadien nachweisbar ist*; und
" nicht selten bemerkt man auch gegenüber diesem Korn noch ein zweites
" kleineres (fig. 4, 5), welche oft so klein ist, dass es sich kaum nachweisen
" lässt. Diese Körner gehören offenbar zu der vorderen Abteilung des dis-
" talen Centralkörpers. Wenn der distale Ring noch an seinem ursprüng-
" lichen Platz dicht hinter dem Kopfe liegt, findet sich die genannten
" Körner, nach vorn von ihm, ungefähr mitten zwischen ihm und dem
" proximalen Centralkörper (fig. 5) „ (1).

Tuttavia nessuna delle cinque figure che illustrano, nella monografia di Retzius, lo spermio di *Erinaceus*, mostra il granulo in parola. La fig. 6 relativa alla *Talpa* riproduce una disposizione rispettiva del granulo e dell'anello simile affatto a quella da me notata negli spermatidî di *Erinaceus* giunti un po' più in là dello stadio riprodotto nella mia fig. 7, ma non ancora alla condizione della fig. 9. In nessun caso mi riuscì di riconoscere un secondo granulo siderofilo accanto al primo. Quando, come rara anomalia, si presentano due filamenti assili uniti ad uno stesso capo, entrambi i filamenti sono fiancheggiati, sul medesimo lato, dal granulo siderofilo (fig. 8).

La migrazione dell'anello lungo il filamento assiale fino all'estremità posteriore del pezzo intermedio si compie mentre ancora si riconosce la massa citoplasmatica a circondare, con figura ovoide, il pezzo intermedio (fig. 9). L'anello giunto alla posizione definitiva, si restringe e si confonde con lo spessore del pezzo intermedio. Già prima della migrazione dell'anello non è più riconoscibile la manchette, nè mi è stato possibile cogliere modificazioni di questa, tali da far supporre una sua coartazione in senso trasverso per accollarsi contro il pezzo intermedio. È quindi supponibile che la manchette subisca un processo di dissoluzione (2).

Nella massa citoplasmatica degenerante sono riconoscibili, già poco prima che si compia la migrazione dell'anello, molte granulazioni corrispondenti, almeno in parte, ai " tingierbare

---

(1) Cfr. anche le figure di spermî di *Cynomys* a tav. 43 della citata opera di Retzius.

(2) Si consulti a questo riguardo il lavoro citato di Duesberg (1908, pp. 161-163 *ubi liter.*).

Körner „ di v. Ebner. La dissoluzione della massa citoplasmatica non è tuttavia completa: rimane invero poco dietro il capo dello spermio, quale si ritrova nell'epididimo, una piccola massa di citoplasma omogeneo a circondare il tratto del pezzo intermedio cui sta a fianco il granulo siderofilo. Detta massa è di regola accumulata attorno al granulo, sporge cioè al di sotto del più lungo tratto basale del nucleo (fig. 10).

L'estremità anteriore del pezzo intermedio, segnata dal centriolo distale ormai irriconoscibile, è, nello spermio, collegata al capo da un breve *collo* non colorabile.

Dall'Istit. di Anat. e Fisiol. comparate
della R. Università di Torino - dicembre 1922.

OPERE CITATE

Duesberg J., 1908. *La spermiogenèse chez le rat.* "Archiv für Zellforschung „, 2.

Id. 1910. *Nouvelles recherches sur l'appareil mitochondrial des cellules séminales.* "Archiv für Zellforschung „, 6.

Meves F., 1899. *Ueber Struktur und Histogenese der Samenfäden des Meerschweinchens.* "Archiv für mikr. Anat. „, 54.

van Mollé J., 1910. *La manchette dans le spermatozoïde des mammifères.* " La Cellule „, 26.

Retzius G., 1909. " Biologische Untersuchungen „, N. 7, XIV; cap. 13: *Die Spermien der Insektivoren.*

Considerazioni geometriche per l'analisi periodale (*)

Nota della Sig. MARIA LOMBARDINI
R. Osservatorio Geodinamico di Rocca di Papa (Roma)

Presentata dal Socio naz. resid. Segre

Le funzioni rappresentative dei fenomeni naturali aventi carattere periodico, si presentano generalmente come somma di due o più funzioni periodiche più semplici, onde il sorgere della così detta *analisi periodale* che si propone la ricerca di queste componenti.

Molti metodi sono stati, fino ad ora, sviluppati: quelli *aritmetici* (1), specialmente applicabili quando le osservazioni siano raccolte in forma tabellare; quelli *grafici* (2), che servono quando si possegga un diagramma del fenomeno; ma nessuno si presta ai diagrammi di piccole dimensioni, quali sono, ad esempio, quelli che compaiono nella sismografia.

In vista di questa applicazione ai sismogrammi, mi propongo, nel presente lavoro, di studiare un altro metodo di analisi. Precisamente, supposto che la curva s rappresentatrice del fenomeno possa esprimersi come somma di due sinussoidi, stabilisco entro quali limiti sia possibile la determinazione dei periodi delle due sinussoidi componenti, mediante il solo esame geometrico della curva s, evitando calcoli e misure.

(*) Presentata nell'adunanza del 25 giugno 1922.

(1) Cfr. G. A. Carse and Shearer, *A Course in Fourier's Analysis and Periodogram Analysis* (" Edimburgh-Mathematical Tracts ", N. 4, London, 1915).

(2) Cfr. Vercelli, *Oscillazioni periodiche e previsione della pressione atmosferica* (" Mem. R. Istituto Lombardo di scienze e lettere ", vol. XXI, XII della serie III, fascicolo IX).

Come risultato della discussione, ottengo che dal computo degli zeri, estremi e flessi della s, contenuti in un intervallo sufficientemente grande, può individuarsi, colla voluta approssimazione, uno dei periodi; da questo stesso computo possono individuarsi entrambi i periodi, quando il rapporto delle ampiezze vari entro certi limiti.

Come sarà anche ricordato a suo luogo, dal punto di vista teorico, conviene notare che, conosciuto uno dei periodi, si può agevolmente determinare l'altro, e si può completare il calcolo delle altre costanti da cui dipende la funzione.

Dal punto di vista sperimentale, si può osservare che il problema di cui è questione non si pone nemmeno quando il rapporto dei periodi delle due sinussoidi sia troppo prossimo ad 1, o quello delle ampiezze sia troppo prossimo a 0 (o a ∞), poichè allora la curva non si distingue sensibilmente da una sinussoide semplice.

§ **1.** — La forma generale della funzione (somma di due sinussoidi) a cui, per ipotesi, si riduce la rappresentazione della curva considerata è:

$$y(x) = \alpha_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \varphi_1\right) + \alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi_2\right) + h .$$

In essa si deve supporre $T_1 \neq T_2$ perchè, com'è noto, nell'ipotesi $T_1 = T_2$ la funzione si ridurrebbe ad una sinussoide semplice, di periodo T_1, di ampiezza:

$$\alpha = +\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

e di fase:

$$\psi = \text{arc. sen} \frac{\alpha_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + \alpha_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{+\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}} =$$

$$= \text{arc. cos} \frac{\alpha_1 \cos \varphi_1 + \alpha_2 \cos \varphi_2}{+\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}} .$$

Noteremo, di passaggio, che non si avrebbe maggior generalità se si supponesse alla funzione la forma:

$$y(x) = \beta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \varphi_1\right) + \beta_1' \cos\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \varphi_1'\right) +$$

$$+ \beta_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi_2\right) + \beta_2' \cos\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi_2'\right) + h$$

perchè questa, ponendo:

$$\psi_1 = \varphi_1' + \frac{\pi}{2} \qquad \psi_2 = \varphi_2' + \frac{\pi}{2}$$

si scrive:

$$y(x) = \beta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \varphi_1\right) + \beta_1' \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \psi_1\right) + $$
$$+ \beta_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi_2\right) + \beta_2' \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \psi_2\right) + h$$

e quindi, per l'osservazione precedente, si riduce ancora alla somma di due sinussoidi.

Mediante spostamento dell'origine delle coordinate e moltiplicazione per un fattore, la funzione considerata si può ancora ridurre alla forma più semplice:

$$s(x) = \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T_1} + a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi\right).$$

Questa forma noi considereremo esclusivamente — per semplicità — e la chiameremo: *sinussoide composta.* Le due componenti saranno le sinussoidi semplici:

$$s_1(x) = \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T_1} \qquad s_2(x) = a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi\right);$$

supporremo, come è sempre possibile, i *periodi* $T_1 > T_2 > 0$, l'*ampiezza* $a > 0$, e la *fase* φ compresa tra 0 e 2π $(0 < \varphi \leq 2\pi)$.

Poichè la nostra ricerca si rivolge, principalmente, come si è detto nell'introduzione, alla determinazione dei periodi, e utilizzerà la considerazione degli estremi flessi e zeri della funzione, non ci occorre di preoccuparci inizialmente della determinazione della posizione dello 0 delle x e dell'eventuale fattore per cui si deve moltiplicare la y, perchè la funzione assuma questa forma ridotta (tutti gli elementi considerati essendo indipendenti da queste due costanti).

Importa invece di determinare la posizione della retta $y = 0$, o ciò che è lo stesso, il valore di h nella espressione generica della funzione:

$$y(x) = \alpha_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \varphi_1\right) + \alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi_2\right) + h.$$

Osserviamo perciò che:

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T}+\varphi\right)dx = -\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{T}+\varphi\right) + \text{costante}$$

e quindi:

$$\left|\int_{x_0}^{x} \alpha_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1}+\varphi_1\right)dx\right| \leq \frac{T_1}{\pi}|\alpha_1|$$

$$\left|\int_{x_0}^{x} \alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi_2\right)dx\right| \leq \frac{T_2}{\pi}|\alpha_2|$$

$$h - \frac{1}{\pi(x-x_0)}(T_1|\alpha_1| + T_2|\alpha_2|) \leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} y(x)\,dx$$
$$\leq h + \frac{1}{\pi(x-x_0)}(T_1|\alpha_1| + T_2|\alpha_2|)$$

$$h = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} y(x)\,dx.$$

§ 2. — Ogni derivata della $s(x)$ può scriversi sotto la forma di una funzione dello stesso tipo. Ci sarà utile fare il calcolo effettivo.

Per le derivate di ordine pari:

$$\text{(1)}\quad \frac{d^n s}{dx^n} = (-1)^{\frac{n}{2}}\left\{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^n \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T_1} + a\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi\right)\right\} =$$
$$= (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^n\left\{\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T_1} + a\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi\right)\right\}.$$

Per le derivate di ordine dispari:

$$\frac{d^n s}{dx^n} = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\left\{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^n \cos\frac{2\pi x}{T_1} + a\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^n \cos\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi\right)\right\};$$

e ponendo:

$$x' = x + \frac{T_1}{4} \qquad \varphi' \equiv \varphi + \frac{\pi}{2T_2}(T_2 - T_1)\,[\mathrm{mod}\ 2\pi]$$

$$\text{(2)}\quad \frac{d^n s}{dx^n} = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^n\left\{\cos\left(\frac{2\pi x'}{T_1}-\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + a\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n \cos\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{T_1}{T_2}\right)\right\} =$$
$$= (-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^n\left\{\operatorname{sen}\frac{2\pi x'}{T_1} + a\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n \cos\left(\frac{2\pi x'}{T_2}+\varphi'-\frac{\pi}{2}\right)\right\} =$$
$$= (-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^n\left\{\operatorname{sen}\frac{2\pi x'}{T_1} + a\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x'}{T_2}+\varphi'\right)\right\}.$$

Le funzioni s che figurano nelle espressioni (1) e (2) le chiameremo, per brevità, *derivate ridotte di ordine n* della funzione data.

Ciascuna di esse è ancora una sinussoide composta cogli stessi periodi T_1, T_2. *La derivata ridotta di ordine 1 ha per ampiezza* $a\frac{T_1}{T_2}$; *la derivata ridotta di ordine 2 ha per ampiezza* $a\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$.

§ 3. — LEMMA I. — *Una funzione della forma:*

$$\sigma(x) = \sum_1^m \alpha_r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_r} + \varphi_r\right)$$

con $\alpha_r \neq 0$, $T_r > 0$, *non può essere identicamente nulla, se nel gruppo di numeri* $T_1, T_2, \ldots, T_m$ *esiste un numero differente da ciascuno degli altri.*

Dimostriamolo per induzione. Se $m = 2$ viene:

$$\sigma(x) = \alpha_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \varphi_1\right) + \alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi_2\right).$$

Se $\sigma(x) = 0$ identicamente, è anche:

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = 0$$

identicamente, e quindi:

$$\frac{\alpha_1}{T_1^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1} + \varphi_1\right) + \frac{\alpha_2}{T_2^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi_2\right) = 0.$$

Se ne ricava:

$$T_1^2 = T_2^2$$

e quindi:

$$T_1 = T_2.$$

Supponiamo, ora, il teorema vero fino ad $m - 1$ e dimostriamolo vero per m.

Se $\sigma(x) = 0$ identicamente, anche tutte le derivate saranno identicamente nulle. Considerando le prime $m - 1$ derivate di ordine pari, avremo così il sistema:

$$\sum_1^m \frac{\alpha_r}{T_r^{2n}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_r} + \varphi_r\right) = 0 \quad (n = 0, \ldots, m - 1)$$

lineare omogeneo nelle m variabili

$$\alpha_r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_r} + \varphi_r\right).$$

Per la possibilità di esso, si richiede che il determinante dei coefficienti sia nullo, cioè:

$$\left|\left\{\frac{1}{T_r^{2n}}\right\}\right| = 0 : \qquad (n = 0, \dots, m-1)$$

determinante di Vandermonde in $\frac{1}{T_r^2}$, che non può essere nullo se non sono uguali due T_r^2 e quindi due T_r; possiamo supporre, senza nuocere alla generalità, che sia $T_m = T_{m-1}$.

Alle due ultime sinussoidi

$$\alpha_{m-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_{m-1}} + \varphi_{m-1}\right) + \alpha_m \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_m} + \varphi_m\right)$$

potremo perciò sostituire una sinussoide unica che indicheremo brevemente con:

$$\beta \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_m} + \psi\right).$$

Per l'ipotesi deve ancora valere l'identità:

$$\sum_1^{m-2} \alpha_r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_r} + \varphi_r\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_m} + \psi\right) = 0 .$$

Se $\beta = 0$ l'espressione del primo membro consta di $m-2$ sinussoidi; se $\beta \neq 0$ di $m-1$ sinussoidi; perciò, per ipotesi, nel gruppo $T_1, T_2, \dots, T_{m-2}$, o $T_1, T_2, \dots, T_{m-2}, T_m$ non vi può essere un T_r diverso da ciascuno degli altri. Ma $T_m = T_{m-1}$, quindi anche nel gruppo $T_1, T_2, \dots, T_{m-2}, T_{m-1}, T_m$ non vi è un T_r diverso da tutti gli altri, come dovevasi dimostrare.

Teorema d'identità. — *Una* s (x) *non può essere:*

1) *identicamente nulla;*

2) *identicamente uguale ad una sinussoide semplice;*

3) *identicamente uguale ad un'altra* s (x) *a parametri differenti.*

La prima parte risulta immediatamente dal lemma.

Per la seconda supponiamo:

$$\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_3}{T_3}+\psi\right)=\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T_1}+a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi\right)$$

lasciando arbitrari α e ψ; T_3 può sempre supporsi positivo perchè:

$$\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_3}+\psi\right)=(-\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{-T_3}-\psi\right).$$

Dal lemma precedente viene:

$$T_1=T_2=T_3$$

contrariamente all'ipotesi $T_1>T_2$.

Per la terza parte, supponiamo che

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T_1}+a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi\right)=\alpha_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_3}+\varphi_1\right)+ \\ +\alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_4}+\varphi_2\right)$$

con $T_1>T_2$, $T_3>T_4$.

Il lemma I dà subito:

$$T_1=T_3 \qquad T_2=T_4;$$

e per le osservazioni fatte nel § 1 si può scrivere:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T_1}-\alpha_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1}+\varphi_1\right)=\beta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1}+\psi_1\right)$$

$$a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi\right)-\alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_3}+\varphi_2\right)=\beta_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\psi_2\right),$$

ammettendo per β_1, β_2 i valori 0 quando sia:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T_1}=\alpha_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1}+\varphi_1\right)$$

$$a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_8}+\varphi\right)=\alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi_2\right).$$

Dovendo essere

$$\beta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_1}+\psi_1\right)+\beta_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2}+\varphi_2\right)=0,$$

il lemma I ci dice che si deve avere $T_1 = T_2$ ovvero $\beta_1 = \beta_2 = 0$: la prima ipotesi è contraria a quella iniziale che $T_1 > T_2$; la seconda ha per conseguenza:

$$\alpha_1 = 1 \qquad \varphi_1 = 0 \qquad \alpha_2 = a \qquad \varphi_2 = \varphi ,$$

con che si prova l'enunciato.

Una s *è periodica sempre e soltanto se i due periodi* T_1 *e* T_2 *sono commensurabili.*

Abbiamo subito che la condizione è sufficiente, perchè se:

$$n T_1 = m T_2 = T,$$

T è periodo della $s(x)$. Viceversa se la s è periodica di periodo T, si deve avere:

$$s(x) = \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T_1} + a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi\right)$$

$$s(x) = \operatorname{sen} \frac{2\pi (x+T)}{T_1} + a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi (x+T)}{T_2} + \varphi\right)$$

e quindi identicamente:

$$0 = \left\{ \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T_1} - \operatorname{sen} \frac{2\pi (x+T)}{T_1} \right\} +$$

$$+ a \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi (x+T)}{T_2} + \varphi\right) \right\}.$$

Essendo $T_1 \neq T_2$, le due espressioni racchiuse tra parentesi non possono essere, per il lemma I, due sinussoidi di ampiezza non nulla, quindi deve aversi, identicamente:

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T_1} = \operatorname{sen} \frac{2\pi (x+T)}{T_1}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi (x+T)}{T_2} + \varphi\right)$$

e quindi:

$$\frac{2\pi T}{T_1} = 2\pi m \qquad \frac{2\pi T}{T_2} = 2\pi n$$

(m e n interi), onde:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{n} .$$

Se $\frac{m}{n}$ è irreduttibile:

$$T = m\,T_1 = n\,T_2$$

è il periodo minimo della sinussoide composta.

§ **4**. — LEMMA II. — *Se* $a \geqq 1$ *ed* x_0 *è uno zero di* $s(x)$, *allora* $\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_0}$ *e* $\left(\frac{ds_2}{dx}\right)_{x=x_0}$ *hanno lo stesso segno o sono entrambe nulle; il secondo caso non si può verificare se* $a > 1$.

Se $a \leqq \frac{T_2}{T_1}$ *ed* x_0 *è uno zero di* $\frac{ds}{dx}$, *allora* $s(x_0)$ *e* $s_1(x_0)$ *hanno lo stesso segno o sono entrambe nulle; il secondo caso non può verificarsi se* $a < \frac{T_2}{T_1}$.

Per dimostrare la prima parte poniamo:

$$\left\{\begin{aligned} & \operatorname{sen}\frac{2\pi x_0}{T_1} + a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right) = 0 \\ & \left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{2\pi}{T_2}\left\{\frac{T_2}{T_1}\cos\frac{2\pi x_0}{T_1} + a\cos\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right)\right\} = \frac{2\pi}{T_2}\,\delta_1\,, \end{aligned}\right.$$

o anche:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{2\pi x_0}{T_1} &= -\,a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right) \\ \frac{T_2}{T_1}\cos\frac{2\pi x_0}{T_1} &= -\,a\cos\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} - \varphi\right) + \delta_1\,. \end{aligned}$$

Quadrando e sommando viene:

$$\left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\right]\operatorname{sen}^2\frac{2\pi x_0}{T_1} + \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = a^2 + \delta_1^2 - 2a\delta_1\cos\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right)$$

e quindi:

$$\operatorname{sen}^2\frac{2\pi x_0}{T_1} = \frac{a^2 + \delta_1^2 - 2a\delta_1\cos\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right) - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2}\,. \tag{1}$$

Ma $\operatorname{sen}^2\frac{2\pi x_0}{T_1} \leqq 1$, quindi anche:

$$a^2 + \delta_1^2 - 2a\delta_1\cos\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right) \leqq 1\,.$$

Ne segue che, se $a > 1$ è necessariamente $\delta_1 \neq 0$ e $a^2 + \delta_1^2 > 1$; se $a = 1$ può essere:

$$\delta_1 = 0 \qquad \operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1} = -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_0}{T_1} + \varphi\right) = \pm 1$$

ovvero:

$$\delta_1 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad a^2 + \delta_1^2 > 1.$$

Se non è

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{ds_1}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{ds_2}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \qquad a = 1$$

è in ogni caso:

$$a^2 + \delta_1^2 > 1$$

e quindi:

$$2a\delta_1 \cos\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right) > 0.$$

δ_1 e $\cos\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right)$ hanno dunque lo stesso segno e perciò anche:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_0} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{ds_2}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

Per dimostrare la seconda parte del lemma, poniamo:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{2\pi x_0}{T_1} + a \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right) = \delta_2 \\ \left(\dfrac{ds}{dx}\right)_{x=x_0} = \dfrac{2\pi}{T_2}\left\{\dfrac{T_2}{T_1}\cos\dfrac{2\pi x_0}{T_1} + a\cos\left(\dfrac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right)\right\} = 0. \end{cases}$$

In modo analogo al precedente otteniamo:

$$\left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\right] \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi x_0}{T_1} + \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + \delta_2^2 - 2\delta_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1} = a^2$$

e quindi:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi x_0}{T_1} = \frac{a^2 + 2\delta_2 \operatorname{sen} \dfrac{2\pi x_0}{T_1} - \delta_2^2 - \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2}. \tag{2}$$

Dovrà essere:

$$a^2 + 2\delta_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1} - \delta_2^2 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \geq 0.$$

Se allora $a^2 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right) < 0$, è necessariamente $\delta_2 \neq 0$ e $\delta_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1} > 0$; se invece $a^2 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 0$, può essere:

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1} = 0 \qquad \text{e} \qquad \delta_2 = 0$$

ovvero:

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad 2\delta_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1} > \delta_2^2 > 0.$$

Se dunque non è:

$$s_1(x_0) = s(x_0) = s_2(x_0) = 0, \qquad a = \frac{T_2}{T_1},$$

δ_2 e $\operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1}$ hanno lo stesso segno e perciò anche $s(x_0)$ e $s_1(x_0)$.

Prima di servirci di questo lemma, applichiamo le formule (1) e (2) allo studio della multiplicità degli zeri della s. Se x_0 è zero multiplo, le due formule coincidono nella:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi x_0}{T_1} = \frac{a^2 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2}, \tag{3}$$

la quale ci dà per $\operatorname{sen} \frac{2\pi x_0}{T_1}$ valori reali soltanto se a è compreso nell'intervallo $\left(1, \frac{T_2}{T_1}\right)$ estremi inclusi.

Abbiamo perciò che:

La $s(x)$ *non ammette zeri multipli per* a *esterno all'intervallo* $\left(1, \frac{T_2}{T_1}\right)$.

Se a è interno al detto intervallo, la sua derivata prima ridotta:

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T_1} + a \frac{T_1}{T_2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T_2} + \varphi\right)$$

che ha ampiezza $a \frac{T_1}{T_2} > 1$, non ammette zeri multipli, quindi anche la $\frac{ds}{dx}$, onde:

La s (x) *non ammette zeri di multiplicità* >2 *per* a *interno all'intervallo* $\left(1, \frac{T_2}{T_1}\right)$ *(estremi esclusi).*

Consideriamo gli estremi dell'intervallo.

Se $a=1$ la (3) ci dà, come incidentalmente abbiamo già trovato nella dimostrazione del lemma,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi x_0}{T_1} = 1,$$

quindi anche:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right) = 1;$$

La derivata seconda è, in modulo, uguale a:

$$\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\left(\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 - 1\right) > 0,$$

e quindi ancora lo zero considerato non può essere triplo.

Se $a = \frac{T_2}{T_1}$, per la (3) è:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi x_0}{T_1} = 0,$$

quindi anche:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_0}{T_2} + \varphi\right) = 0$$

e

$$\left(\frac{d^2 s}{d x^2}\right)_{x=x_0} = 0.$$

Lo zero considerato è allora necessariamente triplo per $s(x)$. Ma la derivata prima ridotta ha ampiezza $a \frac{T_1}{T_2} = 1$ e non può quindi avere zeri più che doppi: lo zero considerato non può dunque essere per $s(x)$ più che triplo.

Osserviamo che la (3) ci dà $s_1(x_0) = \pm 1$ solo per $a=1$ e $s_1(x_0) = 0$ solo per $a = \frac{T_2}{T_1}$; onde possiamo enunciare la proposizione:

Per a $=1$ *la* s (x) *ammette zeri multipli, e precisamente doppi, soltanto nei punti ascisse di estremi di nome opposto per le due sinussoidi componenti; inoltre la* s (x) *non può ammettere zeri multipli in detti estremi se* a $\neq 1$.

Per $a = \frac{T_2}{T_1}$ *la* s(x) *può ammettere zeri multipli, e precisamente tripli, soltanto negli zeri comuni alle due sinussoidi componenti; inoltre la* s(x) *non può ammettere zeri multipli negli zeri comuni alla* s_1 *e alla* s_2 *se* $a \neq \frac{T_2}{T_1}$.

Dimostriamo che:

Ogni s *ammette* ∞ *zeri di multiplicità dispari, necessariamente semplici se* $a \neq \frac{T_2}{T_1}$.

Basta provare che ogni s cambia ∞ volte di segno. Se $a < 1$ questo accade in ogni intervallo tra due estremi consecutivi della $s_1(x)$, perchè se x_1, x_2 sono le ascisse dei due estremi è:

$$|s_1(x_r)| = 1 > a, \qquad 1 \geq |s_2(x_r)|; \qquad (r = (1, 2))$$

quindi $s(x_r)$ ha il segno di $s_1(x_r)$, e perciò opposto in x_1 e in x_2. Nello stesso modo si vede che se $a > 1$ la $s(x)$ cambia di segno in ogni intervallo tra due estremi consecutivi della $s_2(x)$.

Se $a = 1$ il ragionamento cadrebbe in difetto se non si può affermare che ∞ volte due estremi consecutivi di $s_1(x)$ non sono, nè l'uno nè l'altro, zeri di $s(x)$. Tali punti (zeri di $s(x)$, estremi di $s_1(x)$) sarebbero, come si è visto or ora, zeri doppi di $s(x)$; dico che se x_0 è uno qualunque di essi nell'intervallo $(x_0, x_0 + T_2)$, la $s(x)$ cambia di segno, e quindi ha uno zero di multiplicità dispari, e perciò semplice.

Invero, tenendo presente che:

$$s_1(x_0) = - s_2(x_0) = \pm 1,$$

se ϵ è un numero qualunque tale che:

$$0 < \frac{2\pi\epsilon}{T_1} < \frac{2\pi\epsilon}{T_2} < \frac{\pi}{2},$$

si ha:

$$|s_1(x_0 + \epsilon)| > |s_2(x_0 + \epsilon)|,$$

onde la $s(x + \epsilon)$ ha il segno della $s_1(x + \epsilon)$, e cioè il segno di $s_1(x_0)$.

Invece in $x_0 + T_2$:

$$s_2(x_0 + T_2) = s_2(x_0) = \pm 1,$$

e se $T_2 \neq \frac{T_1}{2}$:

$$|s_1(x_0 + T_2)| < |s_1(x_0)|,$$

e se $T_2 = \frac{T_1}{2}$:

$$s_1(x_0 + T_2) = -s_1(x_0) = s_2(x_0) = s_2(x_0 + T_2),$$

onde, in ogni caso, $s(x_0 + T_2)$ ha il segno di $s_2(x_0 + T_2) = s_2(x_0)$, contrario al segno di $s_1(x_0)$.

Ponendo

$$s_1(x_0) = -s_2(x_0) = \text{sen}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$s(x_0 + \epsilon) = \text{sen}\left(\pm \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi\epsilon}{T_1}\right) + \text{sen}\left(\mp \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi\epsilon}{T_2}\right)$$

si vede anche, più precisamente, che il segno di $s(x_0 + \epsilon)$ non può cambiare finchè ϵ resta nell'intervallo $\left(-\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2}\right)$, e cioè $s(x)$ non ha nell'intervallo $\left(x_0 - \frac{T_2}{2}, x_0 + \frac{T_2}{2}\right)$ altri zeri che lo zero doppio x_0.

Applicando la proposizione dimostrata, alle derivate ridotte prima e seconda, tenendo conto dell'osservazione finale del § 2, e ricordando che gli zeri d'ordine dispari di $\frac{ds}{dx}$ e di $\frac{d^2s}{dx^2}$ sono gli estremi e i flessi di $s(x)$ si ha ancora che:

Ogni $s(x)$ *ammette* ∞ *estremi e* ∞ *flessi; se* $a \neq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$ *ammette* ∞ *estremi semplici; se* $a \neq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3$ *ammette* ∞ *flessi semplici.*

§ **5.** — La dimostrazione precedente prova che:

1) *Se* $a \leq 1$ *in ogni intervallo, i cui estremi siano ascisse di estremi consecutivi della* $s_1(x)$, *la* $s(x)$ *ha almeno uno zero;*

2) *Se* $a \geq 1$ *in ogni intervallo, i cui estremi siano ascisse di estremi consecutivi della* $s_2(x)$, *la* $s(x)$ *ha almeno uno zero.*

Dimostriamo che:

Se $a > 1$ *la* $s(x)$ *ha uno zero semplice, ed uno solo, nell'interno di ogni intervallo i cui estremi siano ascisse di due estremi*

consecutivi della $s_2(x)$; *se* $a < \frac{T_2}{T_1}$ *la* $s(x)$ *ha uno zero semplice, ed uno solo, nell'interno di ogni intervallo i cui estremi siano ascisse di due estremi consecutivi della* $s_1(x)$.

Abbiamo già provato che, in entrambi i casi, la $s(x)$ ammette almeno uno zero in ciascuno degli intervalli considerati.

Supponiamo $a > 1$, e supponiamo, per assurdo, che in uno di detti intervalli la $s(x)$ abbia più di uno zero: siano $x_1 < x_2$ due consecutivi di tali zeri. Sappiamo che

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_r} \neq 0 \qquad (r = (1, 2)).$$

Dalla

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_r} = \lim_{x=x_r} \frac{s(x)}{x - x_r} \qquad (r = (1, 2))$$

abbiamo che il segno della derivata in x_1, è uguale al segno che la $s(x)$ ha nell'intorno a destra di x_1; e in x_2 è opposto al segno che la stessa $s(x)$ ha nell'intorno a sinistra di x_2. Ma in tutto l'intervallo x_1, x_2 la $s(x)$ non cambia di segno, in particolare nei due intorni considerati, perciò:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_1} \qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=x_2}$$

hanno segno opposto.

Ma dal lemma II abbiamo, che la $\frac{ds}{dx}$ in x_1 e in x_2 ha segno uguale a quello della $\frac{ds_2}{dx}$; ora questo segno è costante in tutto l'intervallo; è dunque assurdo supporre l'esistenza dei due zeri x_1, x_2.

Il ragionamento vale anche nell'ipotesi $a = 1$, se non è uno zero di $s(x)$ uno degli estremi dell'intervallo considerato. Ma per un'osservazione del nº prec., in tal caso $s(x)$ non ha altri zeri appartenenti all'intervallo, mentre il suddetto zero è doppio. Si conclude che:

Se $a = 1$, *nell'interno di ogni intervallo i cui estremi non siano zeri della* $s(x)$ *e siano ascisse di due estremi di ugual nome della* $s_2(x)$, *la somma degli ordini di multiplicità degli zeri della* $s(x)$ *è uguale a due.*

Se $a < \frac{T_2}{T_1}$, siano x_α, x_β due estremi consecutivi di $s_1(x)$; in essi la $s(x)$ ha segno uguale alla $s_1(x)$, e quindi segno opposto; ammette perciò nell'interno dell'intervallo (x_α, x_β) un numero dispari di zeri; se dunque in detto intervallo si ha più di uno zero, questi zeri sono almeno tre e sono tutti semplici (§ 4): disposti in ordine crescente, questi zeri siano $x_1, x_2, ..., x_n$ $(x_\alpha < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n < x_\beta)$. L'unico zero di $s_1(x)$ in (x_α, x_β) sarà compreso tra due consecutivi di questi punti e quindi uno almeno degl'intervalli (x_α, x_2) e (x_{n-1}, x_β) non contiene questo punto: sia l'intervallo (x_α, x_2). Esso è diviso da x_1 in due intervalli (x_α, x_1) e (x_1, x_2) nei quali $s(x)$ ha segni opposti mentre $s_1(x)$ ha segno costante. Poichè il segno di $s(x_\alpha)$ è quello stesso di $s_1(x_\alpha)$, in (x_1, x_2) la $s(x)$ ha dunque segno opposto a $s_1(x)$. Ma in (x_1, x_2) $s(x)$ ha almeno un estremo nel quale, pel lemma II, dovrebbe avere lo stesso segno di $s_1(x)$: si cade dunque anche qui in assurdo.

Il precedente sviluppo prova anche che:

Se $a = \frac{T_2}{T_1}$, *nell'interno di ogni intervallo i cui estremi siano ascisse di due estremi consecutivi della* $s_1(x)$, *la* $s(x)$ *ha uno zero ed uno solo (semplice o triplo).*

Teorema. — *Se* a *è esterno all'intervallo* $\left(1, \frac{T_2}{T_1}\right)$ *(o coincide col secondo estremo) e la* $s(x)$ *ha, in un segmento* δ, m *zeri* $(m > 2)$, *uno dei periodi delle sinussoidi componenti è compreso nell'intervallo* $\left(\frac{2\delta}{m+3}, \frac{2\delta}{m-2}\right)$; *e precisamente* T_2 *se* $a > 1$; T_1 *se* $a \leq \frac{T_2}{T_1}$.

La proposizione è vera anche per $a = 1$ *purchè si contino gli eventuali zeri doppi colla loro multiplicità.*

Supponiamo anzitutto $a > 1$: dalla proposizione precedente segue che la $s(x)$ ha certamente $2h - 1$ zeri, in h periodi consecutivi della $s_2(x)$, cioè in ogni segmento di lunghezza $\delta = hT_2$, nè può ammetterne più di $2h + 1$. Se $\delta = (h + \epsilon)T_2$ (h intero, $0 < \epsilon < 1$), la $s(x)$ può ancora avere uno zero di più; dunque:

$$2h - 1 \leq m \leq 2h + 2$$

e quindi:

$$h \leq \frac{\delta}{T_2} \qquad \text{e} \qquad T_2 \leq \frac{2\delta}{m-2}.$$

D'altra parte $h > \frac{\delta}{T_2} - 1$, quindi $m > \frac{2\delta}{T_2} - 3$ e $T_2 \geq \frac{2\delta}{m+3}$, come dovevasi dimostrare.

Analogamente si ragiona se $a < \frac{T_2}{T_1}$ cambiando solo T_2 in T_1.

Se $a = \frac{T_2}{T_1}$, la proposizione resta ancora vera, purchè gli zeri della $s(x)$, taluno dei quali può essere triplo, si contino senza riguardo alla multiplicità.

Se invece $a = 1$, affinchè la proposizione si mantenga vera occorre contare come due zeri gli eventuali zeri doppi. (È appena necessario di osservare che la determinazione di questa multiplicità si fa senza ambiguità anche nel caso che $s(x)$ debba rappresentare una curva tracciata, perchè i detti zeri doppi sono i punti in cui tale curva è tangente all'asse delle x).

L'approssimazione con cui la proposizione ora dimostrata determina il periodo (T_2 o T_1) è espressa da:

$$\Delta = 2\delta\left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m+3}\right) = \frac{10\delta}{(m-2)(m+3)}.$$

D'altra parte indicando con T_r quello che la proposizione fornisce:

$$2\delta \leq (m+3)\, T_r;$$

quindi:

$$\Delta \leq \frac{5\, T_r}{m-2}$$

e

$$\lim_{\delta=\infty} \Delta = 0.$$

Applicando il teorema alle derivate ridotte prima e seconda di $s(x)$, e osservando che:

$$1 > a\,\frac{T_1}{T_2} > \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{quando} \qquad \frac{T_2}{T_1} > a > \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

$$1 > a\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 > \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{quando} \qquad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 > a > \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3$$

si ha ancora che:

Se a *è esterno all'intervallo* $\left(\frac{T_2}{T_1}, \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\right)$ *(o coincide col secondo*

estremo) e se n *è il numero degli estremi distinti di* s (x) *cadenti in un segmento di lunghezza* δ, *uno dei periodi delle sinussoidi componenti è compreso nell'intervallo* $\left(\frac{2\delta}{n+3}, \frac{2\delta}{n-2}\right)$; *e questo periodo è precisamente* T_2 *se* $a > \frac{T_2}{T_1}$ *ed è* T_1 *se* $a \leq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$.

Se a *è esterno all'intervallo* $\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2, \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3\right)$ *(o coincide col secondo estremo) e se* p *è il numero dei flessi distinti di* s (x) *cadenti in un segmento di lunghezza* δ, *uno dei periodi delle sinussoidi componenti è compreso nell'intervallo* $\left(\frac{2\delta}{p+3}, \frac{2\delta}{p-2}\right)$; *e questo periodo è precisamente* T_2 *se* $a > \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$ *ed è* T_1 *se* $a \leq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3$.

Osserviamo ancora che, per il teorema di Rolle, è certo:

$$n \geq m - 1 \qquad p \geq n - 1 \geq m - 2\ ;$$

quindi ciascuno dei numeri:

$$m+3,\ n+3,\ p+3 \text{ è sempre } > m-2.$$

Consideriamo allora i tre intervalli:

$$A = \left(\frac{2\delta}{p+3}, \frac{2\delta}{p-2}\right) \quad B = \left(\frac{2\delta}{n+3}, \frac{2\delta}{n-2}\right) \quad C = \left(\frac{2\delta}{m+3}, \frac{2\delta}{m-2}\right).$$

A seconda che a non è interno a:

$$\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2, \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3\right) \qquad \left(\frac{T_2}{T_1}, \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\right) \qquad \left(1, \frac{T_2}{T_1}\right)$$

rispettivamente B e C, A e C, A e B comprendono, qualunque sia δ, uno determinato dei periodi T_1, T_2. E poichè l'ampiezza di questi intervalli tende a zero al crescere di δ, si può supporre δ sufficientemente grande perchè siano distinti due intervalli contenenti periodi diversi. E per la precedente osservazione relativa al teorema di Rolle, se due di questi intervalli sono distinti (non parzialmente sovrapposti) essi si seguono nell'ordine scritto, e non potrà B essere distinto (precedente) da C senza che anche A sia distinto da C.

Da queste osservazioni segue la *regola* seguente:

Si considerino i 3 intervalli A, B, C sopra indicati per δ conveniente (convenientemente grande):

1) Se A, B, C hanno una parte comune, in B sta uno dei due periodi T_1, T_2; e precisamente:

o $a > \frac{T_2}{T_1}$ ed il periodo considerato è T_2 e sta nella parte comune a B e a A; ovvero $a \leq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$ ed il periodo considerato è T_1 e sta nella parte comune a B e a C;

2) Se A precede C e B ha una parte comune con C, T_1 è contenuto in C; inoltre:

o $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 > a > \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3$; ovvero $\left(\frac{T_2}{T_1}\right) > a \geq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$ nel qual caso T_2 è contenuto in A;

3) Se A precede C e B ha una parte comune con A, T_2 è contenuto in A; inoltre:

o $\frac{T_2}{T_1} > a \geq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$ nel qual caso T_1 è contenuto in C; ovvero $1 > a > \frac{T_2}{T_1}$;

4) Se A, B, C sono distinti, T_1 è contenuto in C, T_2 è contenuto in A e $\frac{T_2}{T_1} > a > \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$.

In ogni caso dunque uno dei periodi risulta determinato (con approssimazione) e solo nel primo caso è dubbio quale.

Conosciuto uno dei periodi, non importa di saper quale, si può determinare l'altro con metodi noti. Basta, per es., fare la somma di $s(x)$ colla $s(x)$ medesima spostata di $1/2$ del periodo conosciuto: questa somma è una sinussoide semplice avente per periodo quello ancora incognito.

Di questa sinussoide si possono d'altronde determinare allora anche le altre costanti (ampiezza e fase), e desumere così quelle della corrispondente componente della sinussoide composta: la quale si può così considerare come completamente determinata, come si osservò nell'introduzione.

§ 6. — Se la sinussoide composta è periodica la determinazione dei periodi risultante dalla regola precedente acquista maggior precisione. Se invero T è il periodo della sinussoide

composta, si indichino con m, n, p i medesimi numeri che precedentemente, per $\delta = T$; se m', n', p' sono i corrispondenti numeri per $\delta' = KT$ (K intero) si ha:

$$m' = Km \qquad n' = Kn \qquad p' = Kp$$

$$\lim_{K=\infty} \frac{2\delta'}{p'+3} = \lim_{K=\infty} \frac{2\delta'}{p'-2} = \frac{2T}{p}$$

$$\lim_{K=\infty} \frac{2\delta'}{n'+3} = \lim_{K=\infty} \frac{2\delta'}{n'-2} = \frac{2T}{n}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{2\delta'}{m'+3} = \lim_{K=\infty} \frac{2\delta'}{m'-2} = \frac{2T}{m}.$$

Agli intervalli A, B, C della precedente regola si potranno quindi sostituire i numeri $A' = \frac{2T}{p}$, $B' = \frac{2T}{n}$, $C' = \frac{2T}{m}$, i quali forniranno a seconda dei casi 1°, 2°, 3°, 4° i valori di T_1 e di T_2.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in- f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LVIII, DISP. 2ª E 3ª, 1922-1923

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1923

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1922-923

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1922 - 19 novembre	1922 - 26 novembre
» - 3 dicembre	» - 10 dicembre
» - 17 »	» - 24 »
» - 31 »	1923 - 7 gennaio
1923 - 14 gennaio	» - 21 »
» - 28 »	» - 4 febbraio
» - 11 febbraio	» - 18 »
» - 25 »	» - 4 marzo
» - 11 marzo	» - 18 »
» - 25 »	» - 8 aprile
» - 15 aprile	» - 22 »
» - 29 »	» - 6 maggio
» - 13 maggio	» - 20 »
» - 27 »	» - 10 giugno
» - 17 giugno	» - 24 »

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 3 Dicembre 1922

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Herlitzka e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della adunanza precedente che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica alla Classe la notizia della morte del Socio corrispondente Arturo Issel, Professore nell'Università di Genova, che apparteneva alla nostra Accademia fino dal 14 giugno 1903. Le condoglianze dell'Accademia furono telegrafate al figliolo Prof. Raffaele dal Vice Presidente Parona, il quale commemora con elevati ed affettuosi sentimenti di amicizia e di ammirazione l'illustre scienziato, illustrandone le molteplici benemerenze scientifiche. Alle parole del Vice Presidente Parona si associa il Presidente, che fu per molti anni collega dell'insigne estinto, rimpiangendo con amarezza la scomparsa di chi ebbe tanta parte importante nell'incremento dell'Università genovese e diede opera illuminata per lo sviluppo della coltura del popolo ligure.

La commemorazione detta dal Vice Presidente viene accolta, con plauso unanime, per la pubblicazione negli *Atti*.

Il Segretario presenta quindi una commemorazione del compianto nostro Socio corrispondente Prof. Saverio Belli, tenuta nella Università di Grenoble dal Prof. Marcel-Mirande; egli fa rilevare l'importanza di questo scritto che illustra e riconosce le benemerenze scientifiche di un italiano che fu lustro e decoro dell'Istituto botanico dell'Università di Torino, dove passò la maggior parte della sua carriera scientifica prima di passare alla Università di Cagliari.

Il Vice Presidente comunica quindi alla Classe una Nota del D^r Umberto Monterin dell'Istituto geologico della nostra Università, la quale ha per titolo: *Fenomeni carsici nei calcemicascisti della " Zona delle Pietre verdi " (Alta Valle di Gressoney)*.

La Nota del Dr Monterin viene accolta per essere pubblicata negli *Atti*.

LETTURE

ARTURO ISSEL

commemorato dal Socio CARLO FABRIZIO PARONA

Nell'anno che volge, in pochi mesi, la Geologia italiana ha perduto tre insigni Maestri e la nostra Accademia tre soci illustri. Il Taramelli prima, il Capellini poi, ed il 27 dello scorso mese l'Issel: tre professori di Geologia, che per vie diverse arricchirono le fonti del sapere ed onorarono la scienza italiana, che ne tramanderà i nomi.

Arturo Issel, geologo e geografo, zoologo, paleontologo e paletnologo, fu un naturalista nel senso largo della parola, e, valutando l'opera sua, si può dire ch'Egli rappresentava una tradizione, quella dei sapienti nostri naturalisti del secolo scorso, fondatori di Musei, di Scuole, di Società per la Storia Naturale, che seppero insinuare nei giovani del loro tempo l'amore alla raccolta ed allo studio degli oggetti naturali, alla illustrazione naturalistica del nostro paese: il Balsamo-Crivelli a Pavia, il Cornaglia a Milano, il Meneghini a Pisa, il Pirona a Udine, il Lessona a Torino, per ricordarne qualcuno. Egli nacque in Genova nel 1842, e nella città nativa compì i suoi studi e trascorse la sua vita, tranne durante i lunghi viaggi, con rapida ascesa nella estimazione pubblica per la fama presto acquistata come insegnante e naturalista, per le benemerenze come cittadino, per l'operosità disinteressata, l'integrità e la dignitosa modestia. Il nobile suo volto, espressivo ed artistico, specchiava la bellezza e bontà dell'animo suo e l'eletta intelligenza.

Ho accennato ai suoi viaggi: essi segnano date importanti nella sua carriera di naturalista, che ebbe appunto l'inizio da quando Egli, compagno ad Antinori, Sapeto e Beccari, fu tra i

primi che visitassero con intenti scientifici i dintorni di Aden, Assab, Reita, Massaua, spingendo ardite esplorazioni anche sull'altipiano di Keren. A queste seguirono le fortunose crociere col capitano De Albertis, i viaggi in Egitto, Tunisia e nell'Arcipelago Greco; e tutte le esplorazioni fruttarono ricchezze di materiali di studio ed osservazioni consegnate in opere, delle quali ricorderò una in particolare, l'importanza della quale è attestata dalle cinque edizioni che se ne fecero, il volume cioè " Sul viaggio nel Mar Rosso „, seguito poi da interessanti studi sulla genesi e paleogeografia dello stesso mare. Questi viaggi spiegano l'interessamento suo per i naturalisti viaggiatori liguri del secolo XIX, ch'egli commemorò nel 1913, e per gli esploratori in generale, per i quali dettò un volume d'istruzioni scientifiche. Spiegano com'Egli dedicasse pure la sua attività alle discipline geografiche, alla oceanografia, alla morfologia interpretata geologicamente, alla quale contribuì anche con studi e proposte dirette a fissare una terminologia razionale nella sistemazione dei caratteri e delle forme del suolo e dei fenomeni che ad esse si connettono; mentre allo studio del mare portò i risultati delle sue osservazioni sui depositi di alti fondi ed il volume " Pelagos „, saggi sulla vita e sui prodotti del mare, pubblicato col Giglioli nel 1884 a scopo di divulgazione, così come nel 1866 aveva raccolto in altro volume le *Varietà di Storia Naturale*, dedicandole a Michele Lessona.

Le peregrinazioni lungo i litorali, che rivelano al geologo la storia dei mutevoli rapporti fra terre e mari, certo gli suggerirono, fornendolo dei dati opportuni, l'idea del suo libro sui " Bradisismi „, fondamentale per le indagini sulle oscillazioni delle linee di spiaggia, qualunque sia l'interpretazione dei fatti, che le recenti scoperte mettono in rilievo, e delle cause che la critica scientifica cerca e discute.

E questi studi lo attrassero inoltre ad occuparsi di altre questioni attinenti alla geodinamica, in particolare quelle connesse ai terremoti, da Lui considerati particolarmente in occasione dei sismi della Liguria (1887), di Zante (1894) e di Città di Castello (1897).

Con questi viaggi e con questi studi Egli venne raccogliendo elementi per il suo " Compendio di Geologia „, che in certi capitoli ha impronta affatto personale.

Ma il campo della più intensa, ininterrotta e appassionata attività fu la sua Liguria; ed in gran parte si deve alla sua azione diretta, ed indiretta per opera dei suoi allievi, se questa terra così bella, e per tanti riguardi così interessante per gli studiosi, se questo nodo di assai complessa struttura geologica e di così difficile interpretazione per la parte che ebbe nelle genesi del sistema alpino, può ritenersi fra le regioni più conosciute e meglio studiate nei riguardi della Geologia, della Paleontologia, della Preistoria e di quel ramo di scienza detto Speleologia, del quale il nostro Issel fu certamente uno degli iniziatori.

Non è ora il caso di ricordare le numerose sue Memorie, alle quali si riconosce il merito della chiarezza ed eleganza di dizione, tanto più che l'ingente e fruttuoso lavoro fu dall'A. riordinato e riassunto nelle due sue opere maggiori: " Liguria geologica e preistorica ", corredata da Carta geologica, del 1892, e " Liguria preistorica " del 1907, alle quali si aggiunse più recentemente il bel volumetto su " L'evoluzione delle rive marine in Liguria ", ad integrare quanto riflette la geomorfologia di questa parte dell'Appennino.

E la descrizione della Liguria nella natura e successione dei terreni che ne costituiscono il suolo, è l'esposizione dei cangiamenti anche nelle flore e nelle faune che popolarono successivamente questa terra, ora circoscritta in limiti più ristretti di quanto non lo fosse in epoca geologica recente; ciò che lo stesso Issel dimostrò, facendo conoscere come i solchi delle vallate sul versante ligure non si arrestino al mare, bensì si continuino manifesti per lungo tratto sul fondo marino. In queste opere si legge la storia dei primitivi abitatori liguri, dallo stabilirsi delle razze di Grimaldi e dall'età del Renne in poi, quale dai paletnologi fu interpretata in base alle scoperte fatte delle stazioni umane spelee della " Cornice ", più che dalle misteriose incisioni rupestri nelle alte valli delle Alpi Marittime.

Come nel campo della Paletnologia, l'Issel fu maestro in quello della Paleontologia, e sono da segnalare come più notevoli i lavori sugli avanzi dei vertebrati; dai primi, anteriori al 1880, sulle fiere fossili delle caverne ossifere, a quello recente su alcuni mammiferi fossili del genovesato e del savonese. Mi piace inoltre di ricordare come Egli applicando l'uso

del microscopio allo studio delle roccie, anche sedimentari, fosse condotto ad interessanti osservazioni di carattere mineralogico e paleontologico, quale fu quella delle radiolarie fossili contenute nei cristalli di albite.

Arturo Issel insegnò ininterrottamente nell'Università di Genova dal 1866 al 1917, e in questo lungo periodo creò il Museo Geologico, lo arricchì di numerose collezioni, particolarmente preziosa quella famosa della flora e fauna oligoceniche di Don Perrando, riuscendo al fine, non sono molti anni, a collocarlo in degna sede nella Villetta di Negro. I suoi meriti di studioso e di divulgatore della scienza furono riconosciuti e apprezzati dai corpi scientifici: l'Istituto di Francia lo onorò assegnandogli una medaglia d'oro, la Società Geografica Italiana gli conferì due volte la medaglia d'argento, la Società Geologica Italiana lo ebbe Presidente, e nel 1907, in occasione del 40° anno d'insegnamento, solenni onoranze lo festeggiarono in Genova, dove Egli tanto si era adoprato, con autorità riconosciuta e con apostolato efficace, per diffondere la coltura e promuovere l'elevazione intellettuale. Per la fama acquistata, Egli fu chiamato a far parte di parecchie altre Accademie e fu Socio Nazionale dei Lincei. Per molti anni membro del R. Comitato che dirige il lavoro della Carta Geologica del Regno, ne fu Presidente per qualche tempo, e tenne la carica con molta dignità e con serietà di intenti. Al lavoro, che per Lui era bisogno sentito e conforto, non ha dato riposo neppure in questi ultimi anni, come ne fanno fede le recentissime sue pubblicazioni sulle pietre figurate, icoliti, bioliti, pisoliti.

L'Accademia nostra, riverente alla sua pura memoria, lo ricorda per il largo ed apprezzato contributo portato alle Scienze naturali e per la nobiltà della sua lunga ed utile vita di studioso e di cittadino operoso; e, associandosi al generale rimpianto, esprime in particolare il cordoglio al figlio suo diletto, prof. Raffaele, che degnamente segue l'esempio paterno nel culto della scienza e nell'attività scientifica feconda di risultati.

Fenomeni carsici nei calcemicascisti della " Zona delle pietre verdi „ (Alta valle di Gressoney)

Nota del Dott. UMBERTO MONTERIN

Presentata dal Socio nazionale residente Parona

È noto come nelle Alpi Occidentali prevalga un tipo di regione montuosa, che deve sopratutto le sue forme all'azione valligena delle acque correnti superficiali; ciò in rapporto, senza dubbio, alla natura litologica prevalentemente impermeabile di quei monti, e per conseguenza alla scarsità di zone ad altipiani calcarei, in cui originariamente un ricoprimento nevoso e la permeabilità stessa del suolo avrebbero limitata l'azione erosiva dell'acqua superficiale.

Però, come nelle regioni calcaree delle Alpi Orientali, caratterizzate dal prevalere di altipiani con pareti a picco nelle più svariate condizioni altimetriche, così pure nella nostra zona alpina delle " pietre verdi „, ove prevalgono i calcemicascisti, non mancano degli alti pianori a mo' di terrazzo, con margini oltremodo dirupati ed incisi da profondi solchi. Tali sono l'alto pianoro ondulato calcemicascistoso, che dalla base orientale del Gran Tournalin sale in lieve pendenza alla Roisette, in valle d'Ayas; e quelle numerose serie di terrazzi che si corrispondono sui due fianchi dell'alta valle di Gressoney sopra Tachen nell'Oberteil ed in parte anche nel Mittelteil. Tutti pendono lievemente verso sud-sud-est, iniziandosi a settentrione molto in alto, poco sotto le due crinali di spartiacque, per abbassarsi a gradi fino al fondo valle a Stein-matto. Oltre a ciò è sintomatica la sorprendente corrispondenza sui due fianchi della valle degli altipiani di destra con quelli opposti di sinistra, gli uni e gli altri posti a gradinata verso l'asse vallivo. Tali sono sul ver-

sante destro quelli del Rothhorn e quello volgarmente conosciuto col nome di Solaret, che, dalla base orientale della Grauhaupt, scende lievemente a riannodarsi con quelli del Tiazhorn, di cui gl'inferiori si continuano coll'ampio e meraviglioso terrazzo di Alpen-zu, ed i superiori con quelli dell'Ober-Montil e di Loësche. A tutti questi corrispondono sull'opposto versante l'altipiano ondulato di " Grube „, ed i terrazzi a gradinata di Schkerpie, di Spielmannsberg, sottostanti al Karrenhorn, e di Tschampono.

È bene tener presente che questi altipiani lievemente ondulati, talora ridotti per azione valligena delle acque soltanto a serie di terrazzi a pareti abrupte, sono caratteristici delle regioni ove compaiono i calcemicascisti, roccie assai friabili, alle quali di solito sono intercalate, e talora in perfetta concordanza, delle lenti di serpentino o dei banchi di prasiniti e di altre rocce verdi più dure.

Per rendersi conto della corrispondenza sui due fianchi della valle di questi altipiani a terrazzo, come pure della loro inclinazione verso sud, cioè del loro degradare dal nord verso il fondo della valle per scomparire sotto i gneiss a Tschemenoal, è d'uopo tener presenti le caratteristiche geologiche di questo tratto di valle che si apre attraverso ad una fascia di " pietre verdi „.

Infatti la valle di Gressoney dalle sue origini al suo confluire con quella d'Aosta a Pont S. Martin è una tipica valle trasversale diretta da nord a sud. Taglia quasi perpendicolarmente la direzione degli strati corrispondendo questi in generale sui due fianchi. Infatti la testata della valle è formata dall'ampio bacino glaciale del Lys aprentesi sul fianco meridionale del grande elissoide gneissico e di micascisti del Monte Rosa, contro cui si rovescia una zona di " pietre verdi „, ossia calcemicascisti, serpentine, serpentinoscisti, cloritoscisti e talcoscisti, prasiniti, spesso cloritiche, eufotidi profondamente metamorfosate, ecc., e tutte quelle altre associazioni e forme litologiche caratteristiche di questa serie. La valle le taglia trasversalmente da Cortlys a Stein-matto, donde fino al suo sbocco a Pont S. Martin si apre attraverso i gneis ed i micascisti della serie Sesia-Val di Lanzo, che a sua volta si addossa alla zona di " pietre verdi „.

***

Questi altipiani terrazzati, oltre ai margini dirupati ed incisi da profondi solchi, di cui sono tanto caratteristici quelli del fianco orientale della Grauhaupt, — ove naturalmente prevale l'azione meccanica dell'acqua, poichè la pendenza, facilitando lo scorrimento delle acque, ne limita di molto la filtrazione e quindi l'azione chimica; — presentano pure qua e là sulla loro superficie delle cavità chiuse dolineformi. Tanto quelle del Solaret che quelle della Roisette sono tutte però di piccole dimensioni, poichè misurano pochi metri di diametro, ed hanno forma " a scodella ".

Ben più interessante riesce però lo studio di quell'alta ed isolata regione dell'alta valle di Gressoney, compresa tra i valloni di Rikka e di Spissen e conosciuta dai montanari col nome di *Grube* (1), che più propriamente si estende con forti ondulazioni a sud-ovest del Seehorn. L'intera regione è circoscritta da rocce serpentinose (serpentini compatti e laminati, serpentinoscisti passanti in alcuni punti a vere filladi serpentinose), che nella parte centrale fungono pure da letto impermeabile ai soprastanti banchi di calcemicascisti.

Questo arido altipiano a strette ondulazioni, lievemente inclinato a sud-sud-ovest, ha una media altitudine di 2200 m., e presenta una numerosa serie di avvallamenti diretti da nord-nord-est a sud-sud-ovest verso cui divergono un po', e correnti parallelamente alla crinale che dal Seehorn va al vallone di Spissen. Nessuna vera valle solca questo altipiano, e se l'acqua vi giunge dai pendii attigui a serpentini del Seehorn, tosto si inabissa e scompare. Invano quindi si cercherebbe ivi un ruscello od una fonte: tutta l'acqua viene assorbita dalle infinite

---

(1) *Grube* = cavità, pozzo. Denominazione oltremodo appropriata, che ci dimostra ancora una volta il profondo intuito popolare nell'osservazione dei fenomeni naturali. Anche a Sauris nelle Alpi Orientali, secondo il Marinelli (*Studi orografici nelle Alpi Orientali*, " Mem. Soc. Geogr. Ital. "), le doline vengono chiamate *Grueben*.

screpolature e fessure della superficie; ne viene come conseguenza naturale che la vegetazione per questa aridità del suolo è molto scarsa e stentata. Il che ci spiega anche la mancanza di qualsiasi casolare, essendo i magri pascoli esauriti assai presto dai greggi dei pastori biellesi, che vi si fermano pochissimo tempo. Ovunque affiorano rossastre rocce di calcemicascisti solcati da lunghi crepacci, bizzarramente erosi e slabbrati, con intercalazioni di banchi di prasiniti cloritiche; mentre ad ogni passo si aprono delle cavità, che per lo più sono circolari, ma che si presentano talora anche ellittiche. In queste però le acque non possono ristagnare, perchè i calcemicascisti che avvallano non sono impermeabili e risultano perciò asciutte, con crepacciamento e la conseguente formazione con l'intervento dell'erosione esterna di complicati sistemi di fessure.

Le cavità dolineformi tendono ad allinearsi, in linea generale, in un'unica direzione, da nord-nord-est a sud-sud-ovest, e l'allineamento nel nostro caso corrisponde a sei fratture di diversa grandezza, che hanno dato luogo a quattro avvallamenti minori — che sono però, come vedremo, i più importanti — e a due avvallamenti principali continui ed abbastanza uniformi che si aprono lateralmente sui due fianchi opposti della zona presa in esame.

Di questi ultimi, quello più esterno, ossia il primo verso Bedemie, trovasi ad un'altitudine un po' inferiore agli altri. Quello opposto, sottostante alla crinale del Seehorn e del prolungamento di questo verso il vallone di Spissen, e che è anche di conseguenza il più interno, non ha delle vere e proprie cavità chiuse a forma di dolina. I quattro avvallamenti minori della regione mediana, compresa fra i menzionati avvallamenti principali laterali, pur avendo una minore lunghezza e regolarità, racchiudono però le più grandi e tipiche doline.

Cominciando a settentrione verso il vallone di Rikka troviamo alcune cavità chiuse ma informi, vicino alla strada che conduce a Schöne-Biel, secondo un allineamento diretto da nord-nord-est a sud-sud-ovest. Il fondo di esse è in parte rivestito da cotica erbosa, interrotta da sporgenze rocciose oltremodo alterate e cadenti in disfacimento: sono eufotidi profondamente metamorfosate ed alterate con la neo-formazione di serpentino, talco, clorite, con abbondanti intercalazioni di calcite

proveniente probabilmente dalla ricristallizzazione di quella scioltasi dai calcemicascisti. Sul fianco orientale sorge una serie di fantastici pinnacoli, specie di dicchi alteratissimi e friabili ai quali segue una striscia di serpentini compatti in prosecuzione di quelli del Seehorn.

Vengono quindi i banchi di calcemicascisti diretti da nord a sud, quasi orizzontali e talora debolmente inclinati ad est. Questi banchi oltre che dalle fratture già accennate, a cui corrispondono i diversi avvallamenti ricordati, sono pure rotti da profonde spaccature, parallele fra loro e dirette da est ad ovest, ossia ortogonalmente alla direzione degli strati. Ciò va inteso però come carattere generale, inquantochè di frequente la direzione e l'inclinazione può variare completamente per esser stati i banchi di calcemicascisti rotti, fratturati e ribaltati in tutte le possibili direzioni.

Ciascuno degli avvallamenti menzionati risulta formato da una successione di cavità dolineformi del tipo " a scodella „, contigue le une alle altre e disposte in un'unica direzione. Di questi avvallamenti chiusi il primo verso occidente, ossia verso Bedemie (1) e che è anche il più basso in altitudine, presenta a settentrione al suo inizio una prima serie di 4 doline di piccole dimensioni aventi il diametro di 2 a 5 metri ed una uguale profondità. Hanno un'apertura circolare o debolmente ovale e sono completamente rivestite da cotica erbosa. Ad occidente qua e là i banchi di calcemicascisti sono interrotti da rocce prasinitiche. Più a sud, sempre nel medesimo avvallamento, ove esso piega un poco verso occidente, ossia in direzione delle *Ekko-gafene*, ed un po' prima del suo termine e della comparsa dei serpentini del promontorio di Tschneffo, si aprono ancora due doline, di cui una alquanto grande col diametro di circa 20 metri e del solito tipo a scodella. La seconda è un po' minore di grandezza.

Una ben maggiore importanza hanno però le cavità dolineformi della regione mediana. Questa presentasi complessiva-

---

(1) *Bedemie* = piccoli piani. È diminutivo di *Bodma* che è plurale da *Boden* = piano. Denominazione pur essa molto appropriata, perchè riferita a quella regione pianeggiante soprastante all'anfiteatro morenico dauniano di Orsia.

mente sotto forma di una dorsale rialzata di circa 50 metri, rispetto ai due avvallamenti che corrono paralleli lateralmente lungo i suoi margini. La sua superficie non ha però una idrografia ben determinata, anzi è molto strana e complicata. Mentre nell'ordinaria orografia le valli piccole o grandi s'intrecciano isolando le parti rialzate, qui invece i dossi si congiungono isolando delle depressioni completamente chiuse; sono esse delle vere cavità dolineformi.

Siffatta regione presenta dunque una *facies* del tutto propria, in grazia appunto della facile erodibilità dei calcemicascisti che la costituiscono, erodibilità da cui traggono origine questi particolari fenomeni. Infatti questa speciale configurazione del terreno è conseguenza dell'erosione meccanica combinata colla azione chimica (soluzione e reazioni chimiche) prodotta dall'acqua delle nevi e delle pioggie sulla roccia calcarea, che in tal modo gradatamente viene asportata.

La dorsale presentasi ad ogni modo assai distintamente rotta da quattro fratture, poste, è vero, saltuariamente, ma con una certa regolarità, inquantochè hanno un'unica direzione da nord-nord-est a sud-sud-ovest. Di conseguenza le doline scavate lungo tali diaclasi si trovano disposte secondo quattro serie di allineamenti paralleli seguenti l'uno o l'altro dei sistemi di fessurazione (I, II, III, IV) e che s'incuneano l'uno nell'altro come appare dall'unito schizzo topografico.

Cominciando da settentrione dopo una spaccatura d'un paio di metri di larghezza, s'inizia il primo avvallamento chiuso (I) con due doline aventi l'apertura rispettivamente di m. 9,60 e di m. 12 (sezioni A-B e C-D); erbosi sono il fondo come pure i fianchi i quali hanno una pendenza variante dai 35° ai 40°. Ad oriente della seconda dolina se ne riscontra ancora un'altra che è più piccola perchè misura 4 metri di diametro, ma che ha i medesimi caratteri delle prime. Segue un breve tratto piano, quindi il fondo del vallone degrada maggiormente per una lunghezza di circa 20 metri. Poscia compaiono tre buche contigue a fondo erboso, di pochi metri di diametro (sezione E-F), di cui le due più orientali sono separate da uno spuntone roccioso emergente nel mezzo di esse. Queste potrebbero essere considerate in certo qual modo come gl'*inghiottitoi* del vallone chiuso. In questo tratto il vallone ha una larghezza di 42 metri,

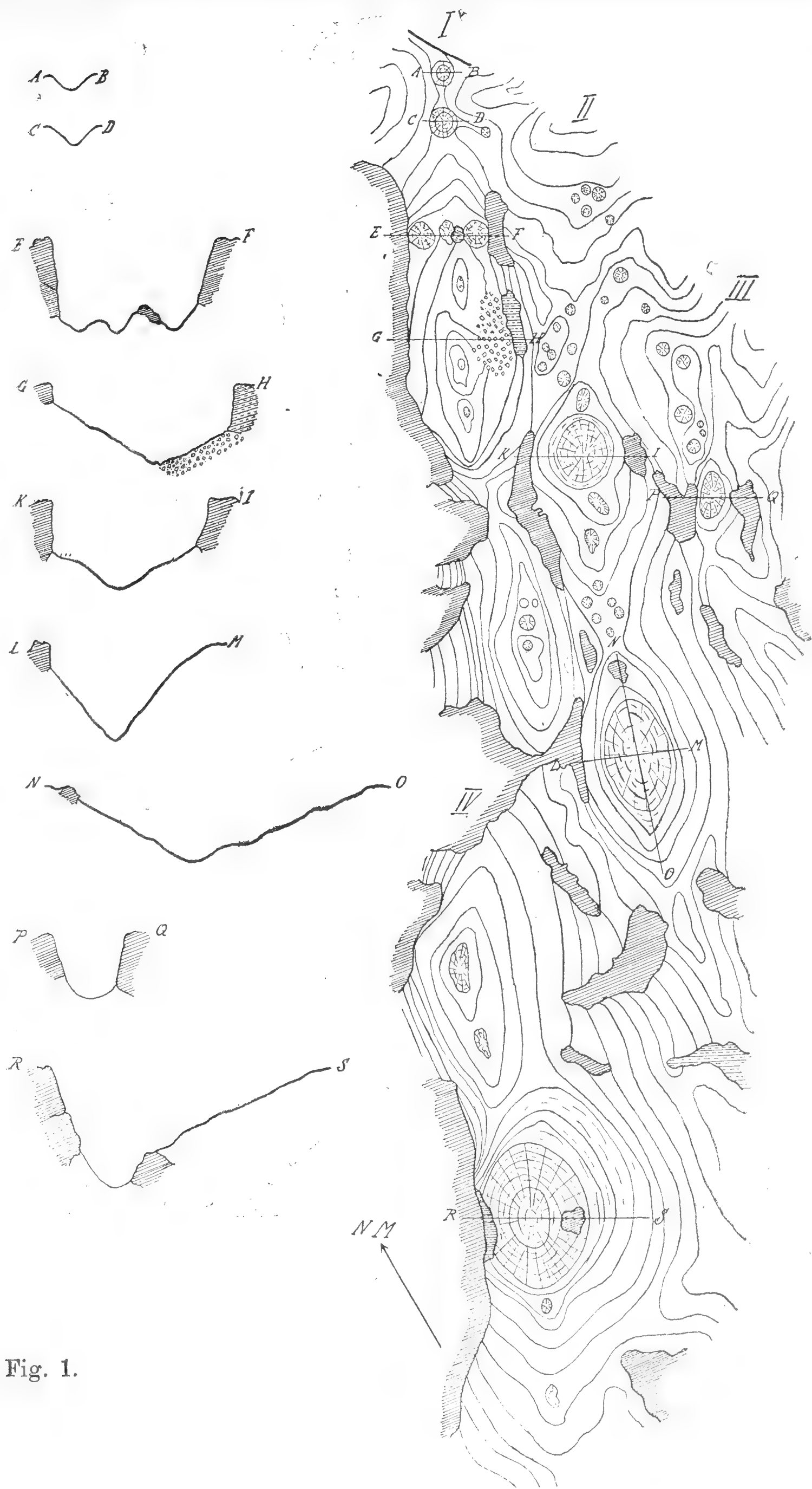



Fig. 1.

dopo si allarga nuovamente (m. 46 alla sezione G-H), mentre il fondo irregolarmente risale, presentando ancora due sole piccole cavità di pochi metri di diametro con fondo piatto ed erboso. Il fianco destro in questo tratto del vallone, il quale ha una lunghezza di circa 100 metri, è dato superiormente da una parete continua ed abrupta di banchi a calcemicascisti sotto cui compaiono talora delle prasiniti cloritiche; la parte inferiore invece è erbosa, come pure il fondo ed il fianco sinistro, che è meno ripido e che è rotto soltanto da due spuntoni: il primo di calcemicascisti, il secondo di prasiniti a clorite. Il vallone termina ad un cucuzzolo erboso, dopo il quale apresi, sempre nella medesima direzione, un altro invasamento con un gruppo di 4 doline di pochi metri di diametro.

Contigui a questo primo vallone e parallelamente al medesimo, ma un poco più verso valle, si aprono il secondo e terzo vallone, che presentano al loro irregolare inizio una numerosa serie di piccole doline, aventi dai 2 ai 5 metri di diametro, di forma regolarissima e completamente erbose. Nel secondo vallone (II) segue una grande dolina (sezione K-I) di 40 metri di diametro, coi soliti fianchi nella parte superiore di calcemicascisti a pareti abrupte; le parti inferiori invece e quelle in senso longitudinale sono erbose. La precede un invasamento di forma ovale ed erboso; altri due consimili la seguono ove il fondo va dinuovo risalendo, mentre i fianchi debolmente convergono fino ad uno spuntone calcemicascistoso preceduto da un breve ripiano con sei piccole doline di pochi metri di diametro. In corrispondenza di questo spuntone i fianchi divergono di nuovo, mentre il fondo pure s'inabissa dando luogo alla più bella e caratteristica dolina di tutta quanta la regione. È abbastanza regolare, di forma ellittica perchè schiacciata sui due fianchi; è in tutti i lati erbosa eccetto che in un tratto del margine superiore del fianco destro, rappresentato da una breve parete abrupta di calcemicascisti. I diametri assiali sono rispettivamente di m. 40 in senso trasversale e m. 80 in senso longitudinale. Le pareti interne dei due fianchi e quella verso monte presentano una pendenza un po' superiore variante dai 40° ai 45°; verso valle invece il fondo risale più lievemente con una media pendenza di 20° (sezioni L-M e N-O).

Il terzo vallone (III) dopo alcune doline irregolari dai 3 ai

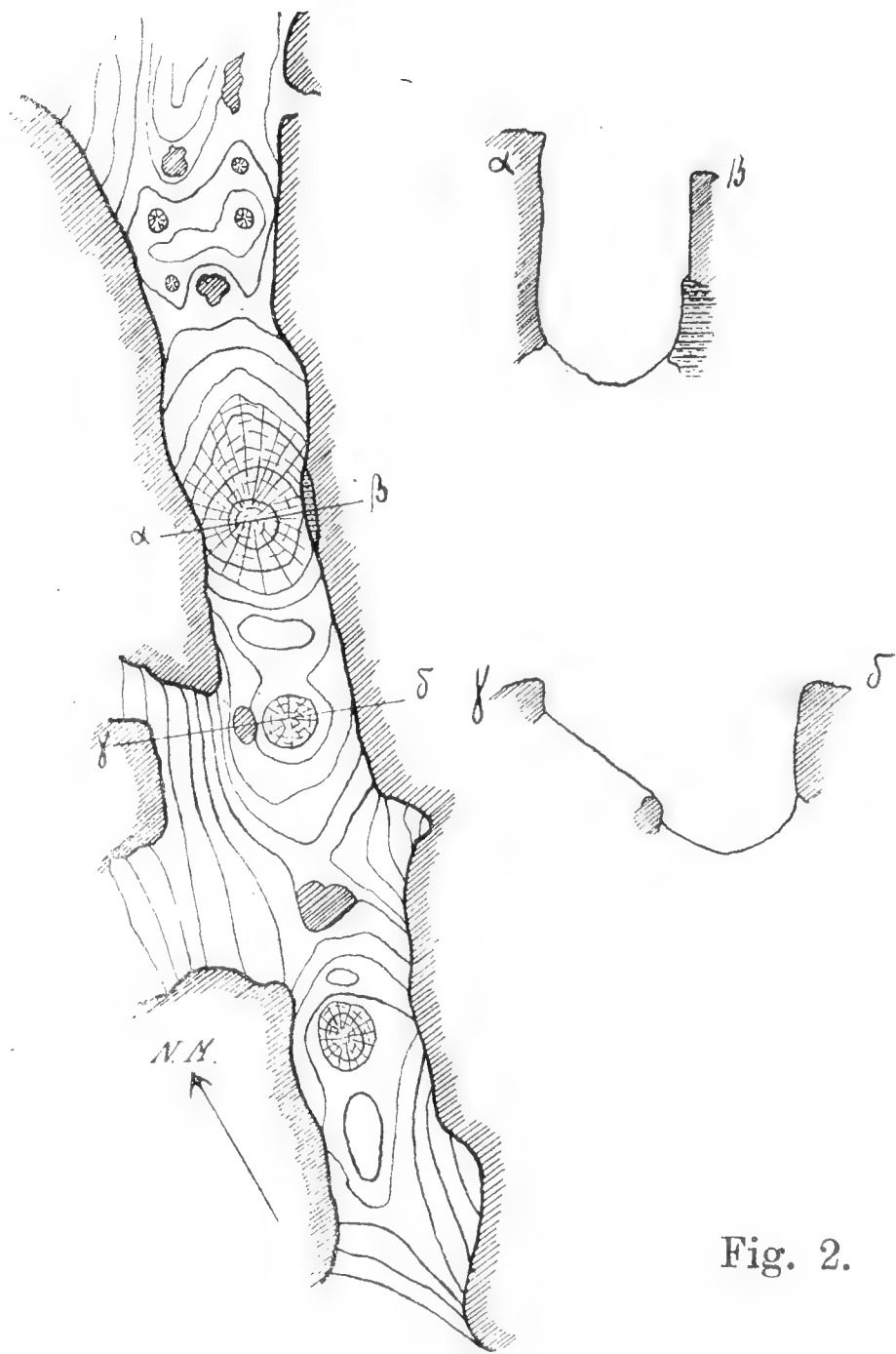
6 metri di diametro e completamente erbose, ha pure una grande dolina avente poco meno di 20 metri d'apertura. I suoi fianchi in parte si presentano a calcemicascisti (quasi verticali) ed in parte sono ricoperti da cotica erbosa (sezione P-Q).

Il quarto allineamento (IV), dopo due invasamenti oblunghi e poco ben definiti, presenta la più grande e la più profonda cavità chiusa di tutta la regione presa in esame. Essa ha una apertura in senso trasversale di m. 65. Più della metà del fianco destro ha una pendenza di 70°; tutti gli altri lati presentano invece una pendenza minore, che in modo particolare va decrescendo da monte a valle nella parte meridionale, ove apronsi ancora altre cinque piccole doline. Il solo fianco destro è formato in alto da calcemicascisti poggianti in perfetta concordanza su prasiniti cloritiche; la parte inferiore del medesimo è per contro erbosa, come pure il fondo e tutti gli altri lati (sezione R-S).

Oltre ai sopra descritti fenomeni carsici di questa regione, propriamente detta *Grube*, meritano pure un breve esame le caratteristiche presentate dalla crinale Grube-Spissen che dal Seehorn si diparte verso sud. Detta crinale a circa metà percorso tra l'inizio ed il suo termine si sdoppia in due creste contigue, correnti parallelamente e delimitando una vallecola chiusa,

Fig. 2.

lunga 250 m. e larga all'imboccatura 45 m., ma che poi si restringe un po' mantenendosi abbastanza regolare tra i 20 e 25 m. di larghezza. Il fianco sinistro è dato da una ininter-

rotta parete verticale di calcemicascisti con la comparsa qua e là alla base di prasiniti del solito tipo a clorite; la parete di destra invece è in due tratti interrotta da declivi erbosi. La profondità varia dai 20 ai 30 metri rispettivamente se la misura vien presa ai margini o sul fondo delle cavità dolineformi. Infatti il fondo non è uniforme, ma presenta, oltre a quattro piccole doline scavate all'imboccatura della vallecola, altre tre doline di maggiori proporzioni, tutte erbose; solo qua e là tra le une e le altre compare qualche spuntone a calcemicascisti (sezioni α-β e γ-δ).

La caratteristica di tutte queste cavità chiuse, del tipo *a scodella* con schiacciamento laterale, abbastanza regolari, di medie dimensioni, scavate in un suolo costituito di frammenti di calcemicascisti, con rivestimento erboso, ed allineate tutte in un'unica direzione corrispondente a quella di successive fratture parallele fra loro, m'induce a ritenere che l'azione chimica, nella loro origine, sia stata subordinata a quella meccanica. La vera azione chimica si sarà esplicata, come viene anche ora, allorquando quella meccanica aveva già abbozzato il primo invasamento dolineforme. L'azione meccanica, inoltre, nel nostro caso non viene tanto esercitata nel senso solito della corrente fluviale, essa invece agisce nel trasporto di materiali dall'alto in basso, nel senso della gravità, trapelando attraverso le sottili fessure ed i meati numerosissimi dei banchi di calcemicascisti.

Nella regione centrale di Grube ho trovato ancora alcune piccole ed informi grotte-assorbenti, se pur così si possono chiamare, il cui fondo è per lo più ricoperto da uno strato di vecchia neve. Queste grotticelle hanno da 2 a 3 metri di larghezza ed una profondità che è pressapoco doppia di quella. All'inizio esse si sprofondano quasi verticalmente, e son formate da una sola camera che sempre si continua lateralmente in un corridoio strettissimo a lieve pendenza, e che, data la piccola apertura dell'orifizio, non è suscettibile di esplorazione.

Poichè queste grotticelle si trovano a notevole altitudine, e cioè a circa 2250 m., la temperatura nel fondo è, anche nell'estate, inferiore o di poco superiore a 0°, ne viene quindi che la neve la quale è caduta dalla bocca o che attraverso a questa è stata proiettata dalla tormenta nella stagione invernale, vi si

conserva sovente da una stagione all'altra. Nè manca talora la formazione di ghiaccio di stillicidio.

Come già ebbe a spiegare e ad osservare il De Gasperi (1) per le grotte del suo Friuli, così anche qui la neve accumulata sul fondo forma una specie di ombelico senza toccare le pareti, distacco dovuto evidentemente all'azione degli stillicidi ed all'azione termica delle rocce circostanti che sciolgono le nevi al loro contatto. È naturale che queste piccole grotte non sono altro che il prodotto di allargamento per via chimica e meccanica di diaclasi preesistenti che, come dissi, sono quivi assai frequenti e rompono nei più svariati sensi i banchi di calcemicascisti.

Ho già detto precedentemente che la regione presentasi molto arida per la mancanza assoluta di acque. Queste, che per infiltrazione attraverso le più minute leptoclasi si affondano nelle vie sotterranee dei calcemicascisti, ricompaiono a giorno sotto forma di sorgenti a contatto dei sottostanti serpentini e serpentinoscisti impermeabili. Tali sono quelle dell'alpe Rikka e del vallone di Spissen, nonchè quella tanto caratteristica di Dürre-matto.

*
* *

Poichè non mi consta che gli esposti fenomeni carsici nei calcemicascisti della nostra *zona delle pietre verdi* siano già stati segnalati nè studiati, ho creduto di fare cosa non del tutto inutile richiamando su di essi, con questi sommari e modesti cenni, l'attenzione degli studiosi di geografia fisica. È ovvio però il far osservare che il carsismo nei calcemicascisti non ha quei caratteri così spiccati che noi riscontriamo nei calcari e nei gessi. A ciò si oppone la stessa natura litologica dei calcemicascisti che, per quanto originariamente siano stati dei depositi sedimentari calcari, per metamorfismo dinamico, di carico o di contatto, subirono una profonda trasformazione, sia

(1) De Gasperi G. B., *Grotte e voragini del Friuli*. " Mem. Geogr. di G. Dainelli ", N° 30, Firenze, 1915, pag. 180.

strutturale che petrografica, colla neo-formazione di altri componenti mineralogici, di cui fra i più importanti ad esempio la mica ed il granato, che ben sappiamo come presentino una notevole resistenza a qualsiasi dissolvimento sia fisico che chimico.

Torino, Istituto Geologico della R. Università.
Novembre 1922.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — Schizzo dimostrativo della regione centrale di *Grube*.
„ 2. — Schizzo dimostrativo del vallone chiuso aprentesi nella crinale Gruebe–Spissen.

(Scala: planimetrie 1:3100, sezioni 1:2100.
|||| calcemicascisti; ¦¦¦ prasiniti).

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Dicembre 1922

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. CORRADO SEGRE
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Peano, Foà, Guidi, Grassi, Panetti, Majorana, Herlitzka e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza il Presidente Ruffini, il Vice Presidente Parona e il Socio Sacco.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza che risulta approvato senza osservazioni.

Il Segretario Mattirolo comunica all'Accademia che nel giorno 27 corr. si terrà a Parigi la solenne commemorazione del Centenario della nascita di Luigi Pasteur, nato appunto il 27 dicembre 1822 a Dôle. Quantunque il Pasteur non fosse Socio della nostra Accademia, pure egli ritiene di interpretare il sentimento di tutti i Soci, rivolgendo preghiera alla Presidenza di voler associare il nostro Sodalizio a quelle manifestazioni che da ogni parte del mondo scientifico saranno indirizzate alla Francia, in onore del grande uomo di scienza e del benefattore dell'umanità.

La proposta è accolta a voti unanimi dall'Accademia, che dà incarico al Presidente di esprimere i sentimenti dell'Accademia Torinese, incaricando a sua volta il Socio straniero Émile Picard, Segretario perpetuo per le Scienze matematiche all'Accademia di Parigi, di rappresentarla alla Cerimonia.

Il Presidente presenta all'Accademia un volume, edito in 400 copie, *In Ricordo di Angelo Sismonda*, inviato dalla Signora Emilia Fornaris Rebaudengo, nipote del Prof. Sismonda che ne curò la pubblicazione nell'occazione delle nozze d'argento di Guido e Maria Fornaris pronipoti dell'illustre geologo.

Il volume contiene una raccolta di lettere dirette all'eminente nostro Socio, da Giacinto di Collegno, Paolo Savi, Lyell, Studer, Elie di Beaumont e J. Fournet, e ordinate dal Professore A. Roccati. Il Presidente ringrazia per l'omaggio gentile e gradito, che ricorda le benemerenze di uno dei più illustri nostri Consoci.

Il Socio Foà fa omaggio all'Accademia di N. 4 fascicoli del nuovo *Trattato di Anatomia Patologica* da lui diretto.

I fascicoli sono: il 1° che contiene l'Introduzione all'opera, scritta dal donatore, e la *Patologia della Cellula* da A. Trambusti; il 2° tratta delle *Infiammazioni* ed è opera del D. E. Veratti; il IX è redatto da P. Guizzetti e si riferisce al *Sistema nervoso centrale*; mentre l'XI di G. Cagnetto è dedicato alla patologia dell'*Apparato genitale maschile*. L'opera fa onore alla scienza non solo, ma anche all'arte tipografica italiana. Il Presidente ringrazia il Socio Foà per il dono importante.

Il Socio Grassi offre quindi all'Accademia e ai Soci alcune copie del discorso da lui pronunciato alla Seduta straordinaria della Sezione di Torino dell'Associazione Elettrotecnica italiana nel maggio 1922, tenuta nel XXV anniversario della morte di Galileo Ferraris.

Egli discorre dei lavori del Ferraris che hanno speciale riguardo ai *Trasformatori* e riferisce come, nelle due Appendici a detto discorso, egli abbia potuto chiarire alcuni concetti e frasi del Ferraris, che erano state erroneamente interpretate.

L'Accademico Segretario
Oreste Mattirolo

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona Torino

ATTI

DELLA

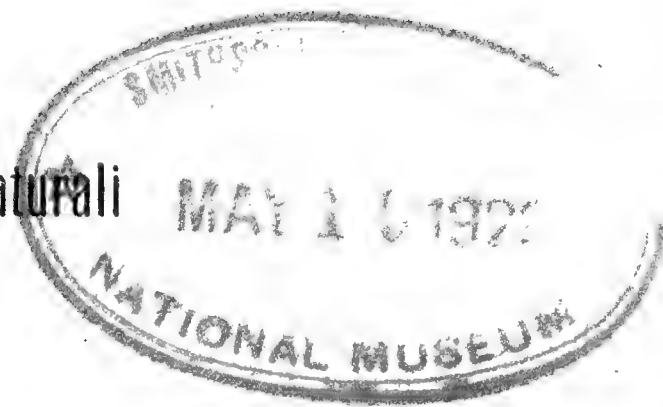
REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LVIII, Disp. 4ª e 5ª, 1922-1923

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1923

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 31 Dicembre 1922

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Peano, Guidi, Grassi, Panetti, Sacco e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza il Presidente Ruffini e i Soci Foà e Naccari.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una lettera del Socio straniero Émile Picard, il quale ringrazia l'Accademia dell'onorevole incarico di rappresentare il nostro Sodalizio alla solenne Commemorazione del 1° Centenario della nascita di Luigi Pasteur. Egli presenta pure e legge una Circolare del " Comitato nazionale dell'Unione internazione Geodetica e Geofisica - Sezione di Meteorologia ", nella quale si interessano i Soci della nostra Accademia a voler trascrivere tutte le notizie che potranno ricavare da libri antichi, stampati o manoscritti, da cronache, storie regionali, sulle alluvioni, piene di fiumi, siccità, carestie, nevicate, gelate, brinate, nebbie, temporali, grandine, ecc. Dette notizie saranno raccolte dalla Segreteria della Sezione di Meteorologia del Comitato, che provvederà al coordinamento e alla

pubblicazione delle medesime col nome dell'informatore che le trasmise.

L'Accademia prende atto.

Vengono quindi presentate in dono dagli autori le seguenti Memorie:

Dal Socio corrispondente W. Kilian:

Les Régions jurassienne, subalpine et alpine de la Savoie;

Les Stades de recul des glaciers alpins et l'origine du Lac Lauvitel (o *Bans*).

Dal Socio corrispondente A. Piutti:

1) *Ricerche sulla formazione dell'Elio e del Nèon nei tubi di scarica contenenti Idrogeno* (In collaborazione con E. Boggio-Lera);

2) *Sopra miscele assorbenti l'ossido di carbonio;*

3) *Sulla diffusibilità dell'Elio attraverso il vetro di Turingia;*

4) *Sulla Cotunnite e sulla Galena del Vesuvio.*

(In collaborazione con D. Migliacci).

Il Socio Sacco presenta per la pubblicazione negli *Atti* una sua Nota sul *Rinvenimento di Uintacrinus nell'Appennino settentrionale* e brevemente ne discorre, facendo osservare che questo tipico crinoide finora osservato nell'America del Nord, in Inghilterra, nella Westfalia, compare oggi per la prima volta in Italia, dove fu trovato nelle Argille scagliose, caratteristiche del Cretaceo dell'Appennino settentrionale.

Il Socio Peano presenta quindi una Nota della dottoressa Elisa Viglezio, che ha per titolo: *Calcolo diretto dei logaritmi decimali.*

Entrambe queste Note sono accolte per gli *Atti.*

Dopo di che il Presidente, ricordando ai Colleghi che questa è l'ultima adunanza dell'anno 1922, presenta loro i più cordiali auguri per l'anno nuovo.

LETTURE

Rinvenimento di Uintacrinus nell'Appennino settentrionale

Nota del Socio nazionale residente Prof. FEDERICO SACCO

Nel maggio di quest'anno 1922, durante escursioni geologiche eseguite nell'Appennino parmense, essendomi recato a S. Andrea delle Fonti onde visitare il vecchio amico Ingegnere Cav. C. Ponci che col suo linceo occhio di cacciatore aveva già trovato e mi aveva dato in studio, trent'anni fa, varî preziosi fossili delle Argille scagliose largamente affioranti nelle vicinanze, fra il nuovo materiale presentatomi la mia attenzione fu attratta da una speciale lastra fossilifera che passo a descrivere. È un frammento di fine calcare stratificato, grigiastro, della media grandezza di centim. 8 $\times$ 10, con uno spessore di pochi millimetri, tutto fratturato irregolarmente; i suoi pezzi, ricementati, si mostrano tra loro più o meno distanziatî trasversalmente nonchè spostati anche nel senso ortogonale al piano della lastra.

Sopra ed immedesimato colla lastra giace un corpo calcareo quasi vermoide, disposto in modo ondulato-curvilineo, del diametro di 3-4 millim., che si sviluppa per circa 17 centim., ma che doveva estendersi originalmente assai più in lungo essendo ora solo limitato dai margini di frattura della lastra stessa (Fig. 1).

Tale corpo è costituito da una serie di placchette rotonde del diametro suddetto e dello spessore di circa un millimetro; questi dischetti, in numero di un centinaio, sono tra loro quasi aderenti, un po' diseguali sia per ineguaglianza originaria sia perchè un po' variamente cariati sui margini nonchè talora nei singoli corpi in modo da apparire distinti gli uni dagli altri e foggiati taluni a corpi vertebrali; essi giacciono col loro massimo diametro disposto quasi ortogonale al piano della lastra

od un po' inclinato ad esso in modo da assumere per certi tratti un aspetto quasi tegolare. Molto meno appariscente è un corpo vermoide analogo, più breve ed appena accennato sulla stessa lastra, disposto un po' trasversalmente al primo.

Fig. 1.

Si tratta cioè di un gracile corpo pedunculoide, costituito da numerosissimi dischetti, che si è, a suo tempo, ondulatamente depositato sopra un fondo fangoso pianeggiante, rimanendovi impigliato in modo da fossilizzare ed indurire con esso, subendone pure in seguito le varie fratture coi relativi spostamenti sovraccennati.

Tale fossile mi parve subito essere porzione di una gracile colonna o di un braccio di Crinoide; ad un esame più accurato mi risultò appunto trattarsi di parte di una delle lunghe braccia di *Uintacrinus* Grinn., potendo anche confortare la determina-

Fig.2.

zione mediante il paragone diretto con un buon esemplare, col calice e parte delle lunghe braccia, di *U. socialis* di Beaver Creeck (Kansas) conservato nel Museo geologico di Torino (Fig. 2).

Ad ogni modo, preoccupandomi ancora in seguito di tale

determinazione, per l'importanza che essa aveva sotto varî punti di vista, nell'agosto mi recai a Parigi ad esaminarvi una magnifica lastra calcarea della superficie di metri 1 $\times$ 2 circa, esposta su una parete dello scalone del Museo di Paleontologia; lastra proveniente pure da Beaver Creek nel Kansas, sulla quale giacciono impigliati ed intrecciati in ogni posizione centinaia di esemplari di *U. socialis*; l'esame di tali Crinoidi, colle loro numerose braccia lunghe anche 20-30 centim., coi relativi dischetti analoghi, nonchè fossilizzati e disposti nello stesso modo di quelli della descritta lastra del Parmense, mi confermò nella indicata determinazione generica del fossile.

Però, dato il semplice frammento di braccio conservato sulla lastra appenninica in esame, non si può tentarne la determinazione specifica, tanto più che le differenze fra lo *U. socialis* Gr. d'America e lo *U. westphalicus* Schlüt. d'Europa non sono molto forti, cosicchè rimane persino il dubbio che possa trattarsi di una sola specie, anche perchè tali forme libere potevano pure essere trasportate assai lontano dalle correnti marine.

A tale riguardo si può notare che il fossile appenninico in esame fu trovato in un deposito di mare piuttosto profondo e abbastanza lontano dai littorali, indicandoci che detto braccio di Crinoide deve derivare da un individuo che natava e morì in alto e libero mare; morte che la fantasia potrebbe anche attribuire a noti voraci predatori, come Selacidi, Ictiosauri e simili, caccianti colonie natanti di questi Crinoidei.

Ciò posto, alcune considerazioni, paleontologiche e geologiche, si possono trarre dal rinvenimento in esame.

Anzitutto in linea generale lo *Uintacrinus*, finora unico genere dell'unica Famiglia *Uintacrinidae* (o sott'ordine *Uintacrinacea*) dell'ordine *Flexibilia*, scoperto dapprima da Grimmel e Meek, nel 1876, nel Niobara Kalk del Kansas negli Stati Uniti d'America e quasi contemporaneamente in Westfalia (dove fu studiato dallo Schlüter) e più tardi in Inghilterra, visse anche nei mari italiani. Ciò del resto è abbastanza naturale, trattandosi di forme natanti liberamente e spesso in quantità di individui straordinaria, come già indica il nome specifico di *socialis*, nonchè il numero immenso di esemplari che si possono osservare sulla sovraccennata lastra del Museo paleontologico di Parigi. È anzi strano che questo genere, forse perchè confuso

talora coi *Marsupites*, sia stato dapprima creduto raro, mentre poi fu constatato comune in varie località nei banchi a *Marsupites, Bourgueticrinus, Echinocorys, Actinocamax,* ecc.

È poi interessante considerare che lo *Uintacrinus* nell'ordine dei *Flexibilia* è (col contemporaneo *Marsupiles*, del ben diverso ordine dei *Fistulata*) una delle pochissime forme di Crinoidei, detti già Tessellati od anche Paleocrinoidei (perchè ebbero un magnifico sviluppo nei mari paleozoici sia per varietà di forme sia per quantità enorme di individui), che invece comparvero e si svilupparono nei mari mesozoici; ciò probabilmente appunto in gran parte perchè, colla perdita della colonna d'attacco al fondo marino, tali Crinoidei, divenuti sessili, acquistarono invece quella libertà di movimenti e quella relativa indipendenza che permise loro di sfuggire alle varie cause deleterie per la vita dei Crinoidi (e di tanti altri gruppi di animali marini), che imperversarono verso la fine dell'Era paleozoica, costituendovi una vera *Crisi antracolitica*, come già indicai nella *Évolution biologique et humaine* (Turin, 1910).

Altro fatto curioso è di veder comparire di tratto nel Cretaceo superiore, e svilupparvisi tosto per vastissime regioni oceaniche, tali forme di Crinoidi che sono presumibilmente residui sopravissuti, ma assai trasformati, di forme paleozoiche (probabilmente pedunculate), senza che siansene finora trovate traccie nei terreni del Trias e del Giura, periodi geologici lunghissimi nei quali dovettero pur esistere le forme loro ataviche, forse in rari e speciali accantonamenti, quasi in stato latente, finchè speciali condizioni biologico-ambientali ne produssero quasi l'esplosione nel periodo cretaceo.

È questo uno dei tanti fatti interessanti nel processo evolutivo degli organismi che ci prova anche quanto materiale paleontologico sfugga ancora alle ricerche degli studiosi, essendo assai più numerosi gli anelli mancanti che non quelli conosciuti nelle diverse catene degli esseri organici.

Infine non meno interessante è il dato geologico-stratigrafico che presenta il fossile appenninico in questione, il quale fu rinvenuto sulla dorsale di M. Carvaro (sulla destra del T. Dordone, affluente del Taro nel Parmense) in piena formazione di Argille scagliose ofitifere tipiche.

Orbene devesi considerare che tale formazione viene gene-

ralmente ritenuta eocenica (perchè su di essa sono spesso sparsi od impigliati veri terreni eocenici mummulitiferi), mentre da un trentennio ne vado sostenendo l'età cretacea, basandomi, sia su dati paleontologici (tronchi di Cicadeoidee o *Bennettites; Hemipneustes; Inoceramus; Hamites, Scaphites, Acanthoceras, Schloembachia, Pachydiscus; Ptychodus; Ichtyosaurus,* ecc.), sia su dati stratigrafici, completamente confermatimi recentemente da una apposita campagna geologica compiuta durante la scorsa estate attraverso tutto l'Appennino emiliano.

Orbene siccome lo *Uintacrinus* è una forma che, così in America (Kansas) che in Europa (Westfalia ed Inghilterra), fu finora trovata soltanto, e viceversa assai comune, nel Cretaceo superiore, il suo rinvenimento sopra uno di quegli straterelli calcarei che si alternano mille volte colle tipiche Argille scagliose viene a confermare sempre più sicuramente l'età cretacea di tale caratteristica formazione tanto estesa e potente nell'Appennino settentrionale.

Calcolo diretto dei logaritmi decimali

Nota di ELISA VIGLEZIO
Dott. Assistente nella R. Università di Torino.

Presentata dal Socio nazionale residente Giuseppe Peano.

Il libro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio, Authore Ioanne Nepero,* pubblicato nel 1614, contiene la prima tavola di logaritmi.

Gli storici (1) fanno rimontare le proprietà delle potenze ad Archimede. Ma le proprietà fondamentali delle operazioni aritmetiche sono pressochè intuitive e le possiamo riscontrare in Euclide:

libro	VIII	prop.	11	$(a/b)^2 = a^2/b^2$,
„	„	„	12	$(a/b)^3 = a^3/b^3$,
libro	IX	prop.	4	$(a\times b)^3 = a^3\times b^3$,
„	„	„	11	$a^{m+n}/a^m = a^n$.

Il progresso qui consiste nella sostituzione dei simboli dell'algebra all'antico linguaggio delle proporzioni.

I matematici, specialmente italiani, del 1500, pubblicarono tavole d'interessi, che sono tavole di potenze. Ma Nepero (2) pel primo, oltre ad introdurre la parola " logarithmo „, cioè " numero della ragione „, pubblicò una tavola, facendo vedere " quantum emolumenti adferent logarithmi, quandoquidem per eorum addi-

---

(1) Napier, *Tercentenary Memorial Volume,* ed. Knott, London, 1915.

(2) Scrivo Nepero come l'autore stampò nel frontispizio del suo libro. In lettere private egli si firmò Neper, Napeir, e nel testamento Naipper. Per la stessa ragione scriverò Briggio, invece del più comune Briggs.

tionem multiplicatio, per subtractionem divisio, per bipartitionem extractio quadrata, per tripartitionem cubica, ... omnia graviora calculi opera evitantur „ (pag. 20).

Per lungo tempo i logaritmi naturali si dissero anche neperiani. Oggi molti autori negano che i logaritmi neperiani coincidano coi naturali ([3]).

Esaminiamo alcune linee della tavola di Nepero.

	Sinus	Logarithmi
30° 0′	5 000 000	6 931 469
45° 0′	7 071 068	3 465 735

Nepero, accanto agli archi crescenti di un minuto alla volta, pone il seno naturale, supposto il raggio di $10^7 = 10\,000\,000$. Per avere il seno, secondo il linguaggio attuale, basta separare 7 cifre decimali. Per noi sen 45° = 0·707 106 762 ... ([4]). Qui Nepero scrisse il valore arrotondato alla 7ª cifra decimale; altre volte scrisse i seni abbreviati senza arrotondamento, anche quando la cifra soppressa supera 5; così i seni di 10′ e di 11′ furono abbreviati alla 7ª cifra.

Dalle tavole dei logaritmi naturali risulta:

$$\log 0{\cdot}5 = -\log 2 = -0{\cdot}69\,314\,718\,\ldots$$

Quindi i logaritmi di Nepero sono i logaritmi naturali, scritti senza segno costante —, e moltiplicati per 10^7, ciò a meno di poche unità (nel nostro caso sono 2) del settimo ordine decimale.

([3]) Vedasi: J. Tropfke, *Geschichte der Elementar Mathematik*, a. 1921, Zweiter Band, pag. 180. “ Die natürlichen Logarithmen als Nepersche Logarithmen zu bezeichnen, wie das heute regelmässig geschieht, ist durchaus falsch „.

([4]) Uso le notazioni del *Formulario Mathematico* di G. Peano. Il punto in alto indica la separazione delle cifre decimali, X = 10 è la base della numerazione decimale.

Già Nepero si era accorto che non sempre la 7ª cifra delle sue tavole era esatta; " quapropter consulo eruditis ut Tabulam exactiorem edant „ (5).

Che tutte le cifre si debbano intendere decimali, già si è visto a proposito dei seni.

La soppressione del segno costante — si effettua anche oggi nelle nostre tavole, ove nella colonna sen 30° sta scritto 9·698 ... e si deve intendere questo numero diminuito di 10.

Quindi i logaritmi neperiani sono i naturali, poichè le cifre sono le stesse.

Pongo $a = 5\,000\,000$, quindi $X^{-7} a = 0{\cdot}5$; prendo il logaritmo naturale $\log (X^{-7} a) = - 0{\cdot}69 \ldots$, cambio segno, e sopprimo il punto decimale, operazione che equivale a moltiplicare per X^7; allora la relazione fra gli uni e gli altri si esprime:

$$\text{logaritmo neperiano } a = - X^7 \log (X^{-7} a).$$

Alcuni autori trasformano questa relazione in:

$$\log \text{nep}\, a = 10^7 (7 \log 10 - \log a),$$

e allora non si vede più l'identità delle cifre dei logaritmi neperiani e naturali.

Ma possiamo anche arrivare a forme diverse.

Nel *Constructio* Nepero calcola le successive potenze di $1 - X^{-7} = 0{\cdot}9\,999\,999$; e il logaritmo di un seno è l'esponente intero di questo numero, che produce sensibilmente (quam proxime, pag. 3) il seno dato.

Possiamo verificare ciò con gli sviluppi in serie che oggi sono a nostra disposizione.

Il logaritmo in base $1 - X^{-7}$ di $0{\cdot}5$, cioè il numero x tale che:

$$(1 - X^{-7})^x = 0{\cdot}5$$

è

$$x = 6\,931\,471{\cdot}4\,590\,258 \ldots$$

che come si vede supera di due unità il logaritmo dato da Nepero.

---

(5) *Mirifici logarithmorum canonis constructio ... cum annotationibus aliquot doctissimi D. Henrici Briggii, Authore Ioanne Nepero,* a. 1620, pag. 34.

Prendo i reciproci, ossia invece dei seni considero le cosecanti; il logaritmo del reciproco cambia solo segno, come scriveva Nepero. E poichè il reciproco di $1 - X^{-7}$ vale $1 + X^{-7}$, fino all'unità di ordine 14, avrò che il logaritmo di Nepero è anche il logaritmo del reciproco in base $1 + X^{-7} = 1{\cdot}0\,000\,001$.

Fatto il calcolo con maggior esattezza, si ha che il numero x tale che

$$(1 + X^{-7})^x = 2$$

vale

$$x = 6\,931\,472{\cdot}1\,521\,730\,...$$

Cioè i logaritmi di Nepero sono in base $1 + X^{-7} = 1{\cdot}0\,000\,001$.

Pongo $y = X^{-7}\,x$; ciò che equivale a separare 7 cifre, nei logaritmi di Nepero. Questo y soddisferà all'equazione:

$$[(1 + X^{-7})^{X^7}]^y = 2\,.$$

Ossia y è il logaritmo in base $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ove $n = X^7$.

Questa base è il numero $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, a meno di due unità del 7° ordine decimale.

Quindi, a seconda del modo di leggere le cifre, possiamo affermare che i logaritmi di Nepero sono in base $1 - X^{-7}$, ovvero $1 + X^{-7}$, ovvero $(1 + X^{-7})^{X^7}$, ovvero in base e, o in base $1/e$; sempre a meno di poche unità dell'ultimo ordine decimale considerato.

Come altro esempio, le tavole di Nepero nella colonna del logaritmo del sen 60° portano il numero 1 438 410, e dalle nostre tavole risulta:

$$\log \operatorname{sen} 60^\circ = -\,0{\cdot}14\,384\,103\,...$$

Qui tutte le cifre sono esatte.

Dall'esame delle tavole possiamo solo conchiudere che la base dei logaritmi neperiani o è il numero e, o ne differisce di poche unità del 7° ordine decimale.

Nel *Constructio* sta la proposizione, pag. 14:

" Hinc etiam sequitur, quod cujuslibet dati sinus numerus artificialis, major est differentia inter sinum totum, et sinum

datum; et minor differentia quae est inter sinum totum, et quantitatem eo majorem in eadem ratione, quae est sinum totius ad datum „.

Versione: “ Di ogni seno, cioè di ogni numero a minore di 1, il numero artificiale, cioè — logaritmo, è maggiore della differenza fra l'unità e il numero dato; ed è minore della differenza da uno ad uno diviso a „.

Cioè:

$$-\log a > 1 - a\,,$$
$$\text{"} \quad < \frac{1}{a} - 1\,.$$

E fatto $a = 1/(1+x)$, ove x è una quantità positiva, risulta:

$$\log(1+x) > x/(1+x)\,,$$
$$\text{"} \quad < x\,,$$

le quali esprimono proprietà caratteristiche dei logaritmi naturali.

Risulta così senza dubbio che i logaritmi neperiani sono proprio i logaritmi naturali.

Poco dopo il 1614, Nepero e Briggio, in loro conversazioni, videro l'utilità di usare logaritmi in base 10, e ne intrapresero il calcolo per due vie. Questo calcolo è spiegato nel *Constructio* di Nepero.

Un primo procedimento, pag. 39, è quello di calcolare le successive radici quadrate di 10, cioè:

X ↾ (1/2) , X ↾ (1/4) , X ↾ (1/8) , ... (6).

Si ottiene ogni potenza di 10 moltiplicando alcune di queste radici. Questo procedimento fu esteso successivamente; e nelle tavole dei logaritmi del Callet si trovano tutte queste radici, fino a X ↾ (1/2 ↾ 60), con 46 cifre decimali.

---

(6) Seguendo il *Formulario*: a ↾ $b = a^b$; uso il segno ↾ quando l'esponente è complesso. Così: Log a, sta per indicare logaritmo decimale di a.

Nepero (ivi, pagg. 40, 41) dà una seconda regola: " Quaeritur quis numerus sit logarithmus binarii. Respondeo, numerus locorum numeri facti ex 10 000 000 binariis invicem ductis..... Per regulam nostram invenies 301 029 995 etc. pro numero locorum quaesito, et logarithmo binarii ".

Versione: " Si domanda qual'è il logaritmo, con 10 decimali, di 2. Rispondo, l'ordine (7) di 2 elevato 10 000 000. E con la nostra regola troverai 301 029 995 "; e separando dieci cifre decimali, si avrà il logaritmo cercato. Il numero delle cifre di 2 elevato X^{10} vale questo numero più uno.

E più chiaramente Briggio, a pag. 48, dice in sostanza: calcolato $2^{10} = 1024$, si conchiude (6) $\text{Log}\, 2 = 0{\cdot}3\ldots$, poi dal numero delle cifre di 2^{100}, che è 31, si conchiude $\text{Log}\, 2 = 0{\cdot}30\ldots$; dal numero delle cifre di 2^{1000}, che è 302, si conchiude $\text{Log}\, 2 = 0{\cdot}301\ldots$, ecc.

In seguito, Mercator, integrando la serie:

$$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

ottenne:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

e la pubblicò nel 1668. Come sempre avviene, anche altri arrivò allo stesso risultato circa nello stesso tempo. Questa serie, con le altre che ne derivano, sono oggi lo strumento più rapido pel calcolo dei logaritmi.

Ma i procedimenti diretti, usati dagli inventori, non sono da trascurarsi, essendo più semplici e più elementari. La proprietà del logaritmo con n decimali d'un numero di rappresentare l'ordine della sua potenza 10^n, può essere trasformata in definizione:

Valore con n decimali del logaritmo in base 10 di $a = X^{-n}\, \text{ord}\,(a \upharpoonright X^n)$.

(7) Dicesi ordine di una quantità positiva a, e si indica con $\text{ord}\, a$, il più grande intero, positivo o negativo, n tale che $10^n \leqq a$. Esso è la caratteristica del logaritmo decimale di a, e, se $a > 1$, esso è il numero delle cifre della sua parte intera, diminuito di 1.

La Prof.ª Frisone (8) assume questa definizione pei logaritmi, e ne costruisce una teoria affatto elementare, sufficiente per le applicazioni pratiche, ed indipendente dalla considerazione dei numeri irrazionali.

Il Prof. Borio (9) ne deduce la teoria comune, definendo il logaritmo come quel numero il cui valore con n decimali è dato dalla precedente eguaglianza.

Comunque data, nella scuola, la definizione del logaritmo decimale di un numero, nasce il desiderio di sapere come i logaritmi si possano calcolare o furono calcolati. La maggior parte dei trattati di Algebra lasciano insodisfatto questo legittimo desiderio degli studiosi. Alcuni riproducono il metodo delle successive estrazioni delle radici quadrate. Altri li sviluppano in frazione continua, metodo questo complicato. Altri ancora li determina con successive elevazioni a quadrato (10).

Ma credo che il metodo più rapido sia ancora il secondo indicato da Nepero e da Briggio. Occorre fare le successive potenze decime del numero dato. Perciò scompongo $10 = (2 \times 2 + 1)\, 2$, cioè elevo a quadrato, poi nuovamente a quadrato, moltiplico per la base, ed elevo a quadrato. Ottengo così la potenza 10.

Per elevare a quadrato mi servo delle tavole dei quadrati dei numeri da 1 a 1000, tavole che si trovano in molte aritmetiche, in tutti i manuali degli ingegneri, e nelle più semplici tavole numeriche. Come esempio determino il logaritmo di 3 e sviluppo tutti i calcoli.

Elevo 3 alle successive potenze, e pongo il punto decimale dopo la prima cifra significativa:

$$3^1 = 3\,, \qquad 3^2 = 9\,, \qquad X^{-1}\, 3^4 = 8{\cdot}1\,, \qquad X^{-2}\, 3^5 = 2{\cdot}43\,,$$
$$X^{-4}\, 3^{10} = 5{\cdot}9049.$$

---

(8) R. Frisone, *Una teoria semplice dei logaritmi*, "Atti R. Acc. Scienze Torino", vol. 52, a. 1917.

(9) A. Borio, *Una teoria semplice dei logaritmi*, Cuneo, a. 1922.

(10) K. Bopp, *Zwei elementare Berechnungen der gewönlichen Logarithmen*, a. 1897. Così: J. Tropfke, loc. cit. (3), pag. 203.

Il metodo delle frazioni continue e quello delle successive elevazioni a quadrato si trovano in T. Boggio, *Lezioni di algebra elementare*, Genova, a. 1906, pag. 435.

Conchiudo

$$\text{Log } 3 = 0{\cdot}4 \ldots$$

Pongo $a = X^{-4}\, 3^{10}$, allora:

$$5{\cdot}90 < a < 5{\cdot}91\,,$$

elevo a quadrato, uso le tavole, e mi limito a scrivere le prime tre cifre, per difetto nel primo membro, e per eccesso nel secondo:

$$3{\cdot}48 < X^{-1}\, a^2 < 3{\cdot}50\,.$$

Elevo a quadrato

$$1{\cdot}21 < X^{-3}\, a^4 < 1{\cdot}23\,.$$

Moltiplico per a, per esempio con la moltiplicazione ordinaria, ed abbrevio:

$$7{\cdot}13 < X^{-3}\, a^5 < 7{\cdot}27\,.$$

Elevo a quadrato

$$5{\cdot}08 < X^{-7}\, a^{10} < 5{\cdot}29\,.$$

cioè

$$5{\cdot}08 < X^{-47}\, 3^{100} < 5{\cdot}29\,,$$

onde

$$\text{Log } 3 = 0{\cdot}47 \ldots$$

Pongo $X^{-47}\, 3^{100} = b$, ed ottengo successivamente:

$$2{\cdot}58 < X^{-1}\, b^2 < 2{\cdot}80\,,$$

$$6{\cdot}65 < X^{-2}\, b^4 < 7{\cdot}84\,,$$

$$3{\cdot}37 < X^{-3}\, b^5 < 4{\cdot}15\,,$$

$$1{\cdot}13 < X^{-7}\, b^{10} < 1{\cdot}73\,,$$

$$1{\cdot}13 < X^{-477}\, 3^{1000} < 1{\cdot}73\,,$$

onde

$$\text{Log } 3 = 0{\cdot}477 \ldots$$

Sviluppo il medesimo calcolo con cinque cifre, usando le tavole dei quarti di quadrato, dei numeri da 1 a 100 000, che si trovano sul *Multiplicator perfettus.*

Poichè $3^{10} = X^4\, 5{\cdot}9049$ elevando a quadrato:

$$
\begin{array}{llll}
X^{9} & \times 3{\cdot}4867 < 3^{20} & < X^{9} & \times 3{\cdot}4868\,, \\
X^{19} & \times 1{\cdot}2157 < 3^{40} & < X^{19} & \times 1{\cdot}2158\,, \\
X^{23} & \times 7{\cdot}1785 < 3^{50} & < X^{23} & \times 7{\cdot}1792\,, \\
X^{47} & \times 5{\cdot}1530 < 3^{100} & < X^{47} & \times 5{\cdot}1541\,, \\
X^{95} & \times 2{\cdot}6553 < 3^{200} & < X^{95} & \times 2{\cdot}6565\,, \\
X^{190} & \times 7{\cdot}0500 < 3^{400} & < X^{190} & \times 7{\cdot}0570\,, \\
X^{238} & \times 3{\cdot}6328 < 3^{500} & < X^{238} & \times 3{\cdot}6373\,, \\
X^{477} & \times 1{\cdot}3197 < 3^{1000} & < X^{477} & \times 1{\cdot}3229\,, \\
X^{954} & \times 1{\cdot}7416 < 3^{2000} & < X^{954} & \times 1{\cdot}7501\,, \\
X^{1908} & \times 3{\cdot}0331 < 3^{4000} & < X^{1908} & \times 3{\cdot}0629\,, \\
X^{2385} & \times 4{\cdot}0027 < 3^{5000} & < X^{2385} & \times 4{\cdot}0520\,, \\
X^{4771} & \times 1{\cdot}6021 < 3^{10000} & < X^{4771} & \times 1{\cdot}6419\,, \\
X^{9542} & \times 2{\cdot}5667 < 3^{20000} & < X^{9542} & \times 2{\cdot}6959\,, \\
X^{19084} & \times 6{\cdot}5879 < 3^{40000} & < X^{19084} & \times 7{\cdot}2679\,, \\
X^{23856} & \times 1{\cdot}0553 < 3^{50000} & < X^{23856} & \times 1{\cdot}1934\,, \\
X^{47712} & \times 1{\cdot}1136 < 3^{100000} & < X^{47712} & \times 1{\cdot}4243\,.
\end{array}
$$

Quindi

$$\mathrm{Log}\, 3 = 0{\cdot}47712 \ldots$$

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Gennaio 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Foà, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Ponzio, Sacco, Majorana, Zambonini e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio Sacco fa omaggio dell'annata XI del Giornale *Urania*, " Bollettino bimensile di Saggi sull'Astronomia, Meteorologia, Geologia e Mineralogia „.

Il Socio Guidi presenta per la inserzione negli *Atti* accademici una sua Nota, *Sulla prova idraulica delle bombole per gas compressi o liquefatti* e brevemente ne discorre.

Il Socio Grassi, un suo studio *Sulla resistività dell'Alluminio a diverse temperature.* Egli riferisce in merito agli esperimenti fatti sia sopra fili di Alluminio impuro, sia sopra fili di Alluminio relativamente purissimo (99.7 di purezza) per determinarne la resistività e il coefficiente di temperatura.

Egli fa osservare come i risultati da lui ottenuti in gran parte ripetano quelli delle misure pure da lui fatte per incarico del Comitato internazionale Elettrotecnico di cui è membro, con metodi diversi nel 1917 e nel 1918 e in parte ne discordino, e come queste differenze, secondo il suo parere, sieno imputabili alla maggiore purezza dell'Alluminio ora studiato.

Il Socio Grassi presenta in dono una Nota a stampa sull'argomento da lui trattato a complemento del lavoro presentato. Interloquiscono i Soci Majorana e Guidi.

Il Socio Somigliana presenta una Nota di C. Burali-Forti dal titolo: *Flessione dei raggi luminosi stellari e spostamento secolare del Perielio di Mercurio.*

Le Note dei Soci Guidi e Grassi e quella del D[r] Cesare Burali-Forti saranno pubblicate negli *Atti.*

Il Presidente riferisce quindi intorno alle discussioni avvenute e alle deliberazioni adottate dalla Commissione internazionale riunitasi a Parigi alcuni giorni or sono, ivi convocata dalla Società delle Nazioni per risolvere le questioni relative alla auspicata protezione del lavoro intellettuale scientifico. Egli che, rappresentando il nostro paese, ebbe occasione di sentire, in quattro giorni di discussioni, i pareri di scienziati e di legali competentissimi, essendo stato incaricato di redigere, in base alle deliberazioni prese, il progetto di Legge che dovrà avere valore internazionale, ha accettato l'onorevole mandato nella fiducia che si possa riuscire, analogamente a quanto è avvenuto per tutelare la proprietà artistica e letteraria, a tutelare anche il lavoro intellettuale e scientifico, ciò che indubbiamente rialzerebbe il prestigio della scienza e le condizioni degli uomini che dedicano agli studi scientifici la vita.

Il Presidente richiede la cooperazione dei Soci al suo lavoro, intendendo far loro conoscere il progetto che verrà da lui elaborato, prima di presentarlo alla Commissione internazionale.

L'Accademia unanime plaude alle parole del Presidente,

congratulandosi con lui per il meritato altissimo onore di essere stato chiamato ad una così importante funzione, che onora nello stesso tempo il paese. Dopo alcune parole dei Soci Guidi, Majorana e Grassi che ricordano al Presidente le questioni relative ai plagi scientifici, alla scelta di una lingua internazionale, ecc., la seduta è dichiarata sciolta.

LETTURE

Sulla prova idraulica delle bombole per gas compressi o liquefatti

Nota del Socio nazionale residente CAMILLO GUIDI

1. — La richiesta ognor crescente di gas diversi che vengono forniti compressi o liquefatti entro recipienti di acciaio comunemente di forma cilindrica, *bombole*, ha generalizzato in modo notevole in questi ultimi anni l'uso di tali recipienti, e ne ha promosso la fabbricazione su vasta scala anche nel nostro paese.

Le condizioni di resistenza di questi recipienti sono molto delicate, perchè per economizzare in materiale, e per agevolarne il trasporto, si esige che essi risultino, più che sia possibile, leggeri, per il che occorre sfruttare al massimo la resistenza del materiale. D'altra parte, gravissimi potendo risultare i danni per esplosioni, molto severe devono essere le condizioni di collaudo di recipienti nuovi e le norme di revisioni periodiche per quelli già in uso. Ed infatti esistono già e si stanno tuttora perfezionando norme internazionali destinate a regolare, nel miglior modo possibile, la fabbricazione, il collaudo, il trasporto e l'uso di questi recipienti.

2. — In questo breve scritto vogliamo mostrare come si possa rendersi conto esattamente del cimento massimo nel metallo e delle deformazioni elastiche cui va soggetto il recipiente nella prova di collaudo o di revisione fatta a pressione idraulica.

*
* *

3. — Si ammette, in via d'approssimazione, che i fondi non contrastino la deformazione della parete cilindrica; l'esperienza dimostra che l'influenza dei fondi si fa debolmente risentire su tratti molto limitati.

In un punto qualunque P dell'involucro le *dilatazioni elastiche unitarie principali* prodotte da una pressione interna uniforme:

ϵ_1 in direzione parallela all'asse longitudinale del recipiente,

ϵ_2 secondo la tangente in P al circolo passante per P, avente il centro sull'asse del recipiente e contenuto in una sezione trasversale,

ϵ_3 nella direzione radiale

hanno le espressioni (1)

$$\epsilon_1 = \frac{m-2}{m} \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p}{E},$$

$$\epsilon_2 = \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p}{E} \left(\frac{m-2}{m} + \frac{m+1}{m} \frac{r_e^2}{z^2} \right),$$

$$\epsilon_3 = \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p}{E} \left(\frac{m-2}{m} - \frac{m+1}{m} \frac{r_e^2}{z^2} \right)$$

nelle quali

r_e = raggio della superficie cilindrica esterna,

r_i = „ „ „ interna,

z = distanza del punto P dall'asse del recipiente,

$\frac{1}{m}$ = coefficiente di contrazione trasversale,

p = pressione unitaria interna,

E = modulo di elasticità normale del metallo.

---

(1) Cfr. C. Bach: *Elasticität und Festigkeit.*

Dalle formole sopra scritte risulta chiaro che è sempre $\epsilon_1 < \epsilon_2$ e che ϵ_2 ed ϵ_3 divengono massime, in valore assoluto, per $z = r_i$ e valgono

$$\epsilon_{2i} = \frac{(m+1)\,r_e^2 + (m-2)\,r_i^2}{m\,(r_e^2 - r_i^2)}\;\frac{p}{E}$$

$$-\epsilon_{3i} = \frac{(m+1)\,r_e^2 - (m-2)\,r_i^2}{m\,(r_e^2 - r_i^2)}\;\frac{p}{E}.$$

Di queste, la prima è, in valore assoluto, maggiore della seconda, quindi

$$\max E\epsilon = \frac{(m+1)\,r_e^2 + (m-2)\,r_i^2}{m\,(r_e^2 - r_i^2)}\,p. \tag{1}$$

Per la stabilità deve notoriamente risultare $\max E\epsilon \leq k$ se k rappresenta il *carico di sicurezza.*

Quando si tratti di calcolare lo spessore del recipiente, dato il raggio interno e posto $\max E\epsilon = k$, si ricava dalla (1)

$$r_e = r_i \sqrt{\frac{k + \left(1 - \frac{2}{m}\right)p}{k - \left(1 + \frac{1}{m}\right)p}}.$$

4\. — Ritenendo, come consiglia il Bach, $m = \frac{10}{3}$, si ha

$$\epsilon_1 = 0{,}4\,\frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\;\frac{p}{E}, \tag{2}$$

$$\max E\epsilon = \frac{1{,}3\,r_e^2 + 0{,}4\,r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\,p, \tag{3}$$

$$r_e = r_i \sqrt{\frac{k + 0{,}4\,p}{k - 1{,}3\,p}}. \tag{4}$$

Indicando ϵ_2 semplicemente con ϵ, questa, in corrispondenza della superficie interna, ovvero dell'esterna, diviene rispettivamente

$$\epsilon_i = \frac{1{,}3\,r_e^2 + 0{,}4\,r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\;\frac{p}{E}, \tag{5}$$

$$\epsilon_e = 1{,}7\,\frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\;\frac{p}{E}. \tag{6}$$

*
* *

Le precedenti formole permettono di risolvere colla dovuta esattezza problemi molto interessanti per il collaudo dei recipienti in questione; mentre l'applicazione delle note formole valevoli pei tubi a pareti sottilissime, se può discretamente servire pei recipienti di limitate dimensioni, conduce ad errori gravi pei recipienti più grandi.

*
* *

5. — Un primo problema che si presenta nel collaudo di questi recipienti è quello di calcolare il massimo cimento del materiale.

Si tratti, ad esempio, di una bombola per la quale si abbia:

Diametro esterno $D =$ cm. 33
" interno $d =$ " 30.

La (3) fornisce

$$\max E\epsilon = \frac{1{,}3 \times 16{,}5^2 + 0{,}4 \times 15^2}{16{,}5^2 - 15^2}\, p = 9{,}40\, p$$

mentre colla formola dei tubi a parete sottile si avrebbe

$$\sigma = \frac{15}{1{,}5}\, p = 10\, p$$

commettendo un errore in eccesso del 6,4 $^0/_0$ circa.

Per $p = 0{,}3\ ^t/_{cm^2}$, cioè 300 atm. di pressione interna, si avrebbe rispettivamente

$$\max E\epsilon = 2{,}82\ ^t/_{cm^2} \qquad \sigma = 3\ ^t/_{cm^2}.$$

*
* *

6. — Il metodo pratico più semplice per accertarsi che il recipiente non soffra deformazioni permanenti, cioè che non venga oltrepassato il limite di elasticità del materiale sotto la pressione idraulica di prova prescritta dai regolamenti, consiste nell'iniettare nel recipiente acqua in pressione, finchè questa raggiunga il valore prescritto; indi, mediante opportuno dispositivo, isolare completamente il recipiente coll'annesso manometro dall'organo compressore, e verificare se l'indicazione del manometro stesso rimane stazionaria per almeno un minuto primo.

Si potrebbe anche calcolare la variazione elastica del diametro esterno della bombola

$$\Delta D = \epsilon_e D$$

ossia per la (6),

$$\Delta D = 1{,}7 \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p}{E} D \tag{7}$$

e verificarla sperimentalmente; ma misurare la deformazione del diametro della bombola è operazione molto delicata, che richiede istrumenti di alta precisione, abilità di adoperarli, e può trarre in errore se non si ripete la misura per più diametri di più sezioni trasversali, e ciò a causa dell'imperfetta forma geometrica dell'oggetto e dell'imperfetta omogeneità del materiale. A conferma di ciò riportiamo i risultati sperimentali da noi ottenuti su di una bombola delle seguenti dimensioni: lunghezza cm. 132,5; diametro esterno medio cm. 20,3; spessore cm. 0,65.

Prese in esame tre sezioni trasversali: la mediana A e due altre B e C, la prima in vicinanza della sommità, l'altra in vicinanza del fondo, l'una e l'altra a distanza di cm. 50 dalla A, si sono misurate per ciascuna di esse le deformazioni di quattro diametri ad uguale distanza angolare fra loro, partendo dalla pressione di 50 atm., aumentandola a 100 ed a 150 e tornando poi a 50. Ora ecco i risultati:

Variazioni elastiche dei diametri D.

Sezione B				Sezione A				Sezione C			
Diam.	Atm.	ΔD mm/100	Δ	Diam.	Atm.	ΔD mm/100	Δ	Diam.	Atm.	ΔD mm/100	Δ
1 - 1	50 100 150 50	0 6,94 13,88 0	6,94 6,94	1 - 1	50 100 150 50	0 6,40 13,07 0	6,40 6,67	1 - 1	50 100 150 50	0 5,61 11,48 0	5,61 5,87
2 - 2	50 100 150 50	0 5,61 11,48 0	5,61 5,87	2 - 2	50 100 150 50	0 3,47 7,20 0	3,47 3,73	2 - 2	50 100 150 50	0 4,81 9,62 0	4,81 4,81
3 - 3	50 100 150 50	0 4,14 8,28 0	4,14 4,14	3 - 3	50 100 150 50	0 5,07 10,14 0	5,07 5,07	3 - 3	50 100 150 50	0 6,14 12,28 0	6,14 6,14
4 - 4	50 100 150 50	0 4,94 9,88 0	4,94 4,94	4 - 4	50 100 150 50	0 7,70 15,40 0	7,70 7,70	4 - 4	50 100 150 50	0 5,87 11,74 0	5,87 5,87

Questi risultati mostrano chiaramente quali notevoli differenze possono aversi nelle deformazioni dei varî diametri del recipiente. Nella sezione mediana A l'incremento elastico del diametro 4-4 è più che doppio di quello del diametro 2-2!

L'applicazione della (7) darebbe in questo caso

$$\Delta D = 1,7 \frac{9,5^2}{10,15^2 - 9,5^2} \frac{20,3}{2150} p = 0,1134\, p$$

e per $p = 0,1\ {}^{t}/_{cm^2}$ ossia 100 atmosfere di pressione interna,

$$\Delta D = \text{cm. } 0,01134 \equiv 11,34\ {}^{mm}/_{100}\,,$$

cifra che va abbastanza bene d'accordo colla media aritmetica dei risultati sperimentali ottenuti per ciascuna delle tre sezioni, e specialmente, come è naturale, con quelli della sezione centrale A. Si ha infatti dalla tabella precedente per l'incremento di pressione di 100 atm. a partire dalle 50,

$$\text{per la sez. } B \quad \Delta D = \frac{13,88 + 11,48 + 8,28 + 9,88}{4} = {}^{mm}/_{100}\ 10,88$$

$$\text{"} \quad A \quad \Delta D = \frac{13,07 + 7,20 + 10,14 + 15,40}{4} = \text{"} \quad 11,45$$

$$\text{"} \quad C \quad \Delta D = \frac{11,48 + 9,62 + 12,28 + 11,74}{4} = \text{"} \quad 11,28$$

La formola dei tubi a parete sottile darebbe

$$\Delta D = \frac{p\, r_i}{s\, E} D = 0,1 \frac{9,5}{0,65 \times 2150} 20,3 = \text{cm. } 0,0138 \equiv {}^{mm}/_{100}\ 13,80$$

con un errore in eccesso del 22 $^0/_0$ circa.

7. — Quando non ci si accontenti di constatare l'inesistenza di deformazioni permanenti, le quali vengono senza dubbio avvertite colla prova pratica sopra accennata; ma si desideri controllare la deformazione elastica complessiva della bombola, migliori risultati possono ottenersi colla nota prova consistente nel rinchiudere la bombola durante la prova idraulica

entro altro recipiente, nel riempire di acqua bollita o di olio l'interstizio fra i due recipienti e nel misurare lo spostamento di questo liquido prodotto dall'aumento elastico del volume della bombola.

Al calcolo di tale aumento si prestano le formole prececedenti nel modo seguente:

L'aumento d'area del circolo che limita esternamente la sezione trasversale della bombola è

$$\pi r_e^2 (1 + \epsilon_e)^2 - \pi r_e^2 = \sim 2 \pi \epsilon_e r_e^2 \tag{8}$$

e quello del circolo interno è

$$\pi r_i^2 (1 + \epsilon_i)^2 - \pi r_i^2 = \sim 2 \pi \epsilon_i r_i^2 . \tag{9}$$

Questi due aumenti stanno nel rapporto $\epsilon_e r_e^2 : \epsilon_i r_i^2$, e per le (5) e (6) si ha

$$\frac{\epsilon_e r_e^2}{\epsilon_i r_i^2} = \frac{1,7}{1,3 + 0,4 \left(\frac{r_i}{r_e} \right)^2} > 1 ,$$

dal che si deduce che il volume del liquido spostato dalla deformazione della parete esterna nella prova sopra ricordata è sempre maggiore del volume di liquido assorbito dalla bombola *esclusivamente* per la deformazione elastica della sua parete interna, prescindendo cioè dal volume consumato per la compressibilità dell'acqua iniettata.

Ora si ha

$$\Delta V_e = 2 \pi \epsilon_e r_e^2 l_e (1 + \epsilon_1)$$

se con l_e s'indica la lunghezza teorica esterna del recipiente, cioè la lunghezza di un cilindro di volume uguale a quello racchiuso dalla superficie esterna del recipiente, e per le (2) e (6)

$$\Delta V_e = 2 \pi r_e^2 l_e \, 1,7 \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p}{E} \left(1 + 0,4 \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p}{E} \right) .$$

Per la bombola già indicata al n° 5 si avrebbe

$$\Delta V_e = 6{,}283 \times 16{,}5^2 \times 170 \times$$
$$\times 1{,}7 \frac{15^2}{16{,}5^2 - 15^2} \frac{p}{2150} \left(1 + 0{,}4 \frac{15^2}{16{,}5^2 - 15^2} \frac{p}{2150}\right)$$

ossia

$$\Delta V_e = 1094{,}9\, p\, (1 + 0{,}000886\, p).$$

Così, per es., per $p = 0{,}3\ ^t/_{cm^2}$ risulterebbe

$$\Delta V_e = \text{cm}^3\ 328{,}56$$

mentre colle formole dei tubi a parete sottile si sarebbe ottenuto

$$\Delta V_e = 2\pi r_e^2 \epsilon l_e = 2\pi r_e^2 \frac{\sigma}{E} l_e = 2\pi r_e^2 \frac{p r_i}{(r_e - r_i) E} l$$

ossia

$$\Delta V_e = 6{,}283 \times 16{,}5^2 \frac{0{,}3 \times 15}{1{,}5 \times 2150} 170 = \text{cm}^3\ 405{,}76$$

commettendo un errore, in eccesso, del 23,5 %.

8. — La variazione elastica ΔV_i del volume interno della bombola, prodotta dalla pressione interna uniforme viene espressa da

$$\Delta V_i = 2\pi \epsilon_i r_i^2 l_i (1 + \epsilon_1)$$

nella quale l_i ha il significato analogo ad l_e, e per le (2) e (5)

$$\Delta V_i = 2\pi r_i^2 l_i \frac{1{,}3\, r_e^2 + 0{,}4\, r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p}{E} \left(1 + 0{,}4 \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p}{E}\right).$$

La misura sperimentale del ΔV_i potrebbe anche servire come prova di elasticità; ma oltre che, come si è visto, è $\Delta V_i < \Delta V_e$, una tale ricerca esigerebbe la valutazione esatta del volume d'acqua iniettato nella bombola e la sottrazione, da questo, del volume consumato in causa della compressibilità dell'acqua stessa, che per pressioni così elevate risulta molto notevole e non misurabile colla dovuta esattezza, regnando qualche

incertezza sul valore del coefficiente di compressibilità, sensibilmente variabile colla pressione e colla temperatura. Per la bombola di cui si è parlato al n° 7, della capacità di litri 115, assumendo 0,000045 per coefficiente di compressibilità dell'acqua a 300 atm. di pressione ed alla temperatura di 15°, il volume consumato per la compressibilità del liquido ammonterebbe alla notevole cifra di

$$0{,}000045 \times 300 \times 115000 = \text{cm}^3\ 1552{,}5$$

volume più che quintuplo di quello che si tratterebbe di valutare.

Torino, gennaio 1923.

Resistività dell'Alluminio a diverse temperature

Nota del Socio nazionale residente GUIDO GRASSI

In una relazione ch'io presentai nel settembre 1918 alla Commissione Elettrotecnica Internazionale esposi i risultati di prove eseguite su parecchi fili d'Alluminio, per determinarne il coefficiente di resistività e la sua variazione a temperature diverse, comprese fra 10° e 100° circa.

Feci notare allora che, dalle mie misure, fatte su 39 fili diversi e di vario diametro, risultava che, mentre la resistività variava del 16 % dal tipo più conduttivo a quello più resistente, il prodotto della resistività per il coefficiente di temperatura variava pochissimo intorno ad un valore medio eguale all'incirca a 0,000114.

Osservai infine che i risultati di alcune prove, descritte in un Rapporto del Comitato Elettrotecnico Francese, e fatte con *tre* qualità di Alluminio, si accordavano abbastanza bene coi miei per *due* qualità di alluminio molto simili per composizione a quelle da me sperimentate, cioè contenenti 98,35 e 98,66 % di alluminio. Invece col *terzo* filo, di maggior purezza, cioè col 99,5 % di alluminio, si aveva un prodotto della resistività per il coefficiente di temperatura molto minore. Siccome però le due prove fatte con questa qualità di alluminio erano poco concordanti fra loro, io mi proposi di ripetere una serie di misure accurate appunto con fili aventi un grado di purezza di almeno 99,5 % e possibilmente anche maggiore.

Un'altra discordanza devo ancora mettere in evidenza. Dalle mie precedenti esperienze appare che in generale la resistività dell'alluminio diminuisce sempre col diminuire della proporzione delle impurità. Invece dal citato Rapporto del Comitato Francese

risulterebbe che l'alluminio al 99,5 $^0/_0$ ha una resistività 0,0293 maggiore di quella dell'alluminio al 98,35 $^0/_0$, che sarebbe 0,0282.

Io incontrai grande difficoltà a trovare dell'alluminio puro; anzi, puro assolutamente non l'ho potuto ottenere. Dovetti accontentarmi di alcuni campioni, con 99,7 $^0/_0$ di alluminio, che, dopo molte ricerche, riuscii a procurarmi dalla Francia e dall'America.

L'apparecchio costruito appositamente per queste esperienze consiste di un bagno in lamiera di ottone a sezione ellittica, alto 50 centimetri, a doppia parete, pieno di olio di vaselina e munito di due agitatori a turbina, mossi continuamente da un motorino elettrico. Con ripetute prove preliminari mi assicurai che la temperatura si manteneva perfettamente uniforme in tutta l'altezza del bagno, anche quando raggiungeva il valor massimo prossimo a 100°.

Nel bagno erano immersi due telarini di legno, sui quali è avvolto un sottil filo di nicromo, che serviva a riscaldare il bagno e a mantenere poi la temperatura costante, durante le misure, regolando la corrente. Era facile ottenere che la temperatura rimanesse costante, a meno di qualche centesimo di grado, per tutto il tempo necessario a fare le osservazioni.

La lunghezza del filo d'alluminio veniva misurata esattamente mediante un apparecchio munito di coltelli e di morse speciali per tendere il filo uniformemente e segnarvi i punti limiti della lunghezza misurata.

Poi il filo veniva avvolto a larghe spire e applicato ad una tavoletta di ebanite, munita di opportuni morsetti e pinze per addurvi la corrente nelle due sezioni terminali della lunghezza misurata, e infine veniva immerso nel bagno a cui la tavoletta faceva da coperchio.

La sezione media del filo fu sempre determinata pesandone un pezzo di lunghezza nota, nell'aria e nell'acqua distillata, e tenendo conto della temperatura.

Collocato il filo nel bagno, si faceva la misura della resistenza coll'apparecchio a ponte doppio.

Anche questo apparecchio fu sottoposto a controllo con esperimenti preliminari su campioni esatti di resistenza, per assicurarmi della esatta taratura del filo campione e dei rapporti delle resistenze.

Le deviazioni al galvanometro, munito di specchio e scala, si leggevano col cannocchiale. Anche il termometro si leggeva col cannocchiale a distanza, e vi si poteva apprezzare benissimo il cinquantesimo di grado.

D'ordinario si faceva una prima misura col bagno alla temperatura dell'ambiente; poi si riscaldava fino oltre 90° e si ripeteva la misura. Per raffreddare rapidamente il bagno, tolto il filo, vi si immergeva un serpentino, fatto con tubo di rame, nel quale si faceva circolare dell'acqua fredda. Così si poteva ripetere subito la misura a bassa temperatura. Generalmente però lasciavo raffreddarsi il bagno lentamente, per fare qualche misura anche a temperature intermedie. La prova a temperatura bassa si ripeteva soltanto il giorno dopo.

Con molte prove ho potuto persuadermi che nelle prime misure, fatte con un filo riscaldato e raffreddato successivamente, si riscontrano talvolta delle differenze, che non dipendono da errori di osservazione, ma da una reale variazione di resistività subìta dall'alluminio, appunto per effetto delle variazioni di temperatura. E propriamente, misurata la resistenza a bassa temperatura, poi riscaldato il filo fino a 100° circa, e lasciatolo poi raffreddare fino alla temperatura iniziale, si trova spesse volte, non sempre, una resistenza minore. Ripetendo l'operazione, in generale quella differenza scompare. Evidentemente il primo riscaldamento fino a 100°, susseguito da lento raffreddamento, fa l'effetto di una ricottura. Ma l'effetto è diverso a seconda dei fili e deve dipendere dal trattamento a cui fu prima sottoposto il filo, e probabilmente dalle impurità più o meno abbondanti e dalla loro natura.

I risultati riassunti nella seguente Tabella sono le medie di numerose prove fatte su ciascun campione.

Filo	All. %	Diam. mm.	R_0	R_{20}	α_0	α_{20}	$R\alpha$
a)	99,7	2	0,02644	0,02871	0,004272	0,003936	0,0001130
b)	99,7	1,5	2643	2868	4268	3932	1128
c)	98,7	1	2675	2902	4263	3928	1140
d)	98,3	2	2716	2947	4190	3865	1139
e)	97,6	2	3063	3293	3744	3483	1147

R è la resistività espressa come resistenza in Ohm di un filo lungo un metro e avente la sezione media di un millimetro quadrato.

R_0 e R_{20} sono i valori di R a temperatura 0° e a 20°.

α_0 è il coefficiente di temperatura riferito a 0°, e α_{20} è lo stesso riferito a 20°.

In generale si hanno le relazioni seguenti, dove R e α sono i valori corrispondenti ad una temperatura t qualunque superiore a zero.

$$R = R_0 (1 + \alpha_0 t) \qquad R_0 = R (1 - \alpha t)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 t} \qquad R_0 \alpha_0 = R \alpha .$$

Non riproduco le misure fatte col nuovo apparecchio su fili che erano già stati provati nelle precedenti esperienze del 1918; dirò soltanto che trovai in generale un accordo assai soddisfacente.

In riguardo a quelle differenze, di cui ho fatto parola qui sopra, che si riscontrano talvolta sperimentando lo stesso filo in giorni successivi a temperature alte e basse alternate, devo far rilevare che coi fili più puri non ebbi occasione di osservare differenze sensibili. Coi fili *a)* e *b)* le successive prove mi diedero sempre risultati molto concordanti.

I due campioni *a)* e *b)* che sono i più puri e hanno la stessa percentuale di alluminio, sebbene siano di provenienza affatto diversa, hanno dato risultati quasi identici, tanto per la resistività quanto per il coefficiente di temperatura. Le differenze, minime, stanno nei limiti degli errori di osservazione. Perciò si può ritenere che nell'alluminio più puro, come si può ottenere in pratica col 99,7 %,

la resistività a 0° è 0,02644
il coefficiente di temperatura a 0° *è*. . 0,004270

e per conseguenza il prodotto $R\alpha$ risulta eguale a 0,0001129.

È questo prodotto che, come dissi sopra, dalle mie prime esperienze era risultato poco variabile intorno a 0,0001141; osservavo però che avevo sperimentato su alluminio di purezza inferiore a 99 %.

Per l'alluminio 99,7 °/₀ senza dubbio il prodotto $R\alpha$ è un po' minore della detta media e certamente prossimo a 0,0001130. Invece nell'alluminio a tenore più basso pare che il detto prodotto si mantenga più alto e giunga anche a 0,000116 circa.

Accertato così il valore 0,000113 per l'alluminio di purezza superiore al 99,5 °/₀, si può dire che nell'alluminio meno puro il prodotto $R\alpha$ non è certamente molto variabile; ma è probabile che la natura delle impurità e la loro proporzione influisca con effetti diversi nei diversi casi, così che non si può stabilire una regola semplice, cioè una relazione semplice tra il valore del prodotto $R\alpha$ e la percentuale di alluminio.

Quando si richieda soltanto un valore approssimato della resistività, si potrebbe adottare il seguente procedimento, *dove non occorre conoscere le dimensioni del filo e non c'è bisogno neppure di una resistenza campione.*

Dato il filo di lunghezza qualunque, scelta possibilmente in modo da poter fare una buona misura di resistenza coll'apparecchio che si ha a disposizione, si determina il coefficiente α_0 con due misure di resistenza, l'una alla temperatura dell'ambiente e l'altra a caldo, da 80° a 100°. Essendo r_1 r_2 le due resistenze trovate e t_1 t_2 le due temperature rispettive, si calcola α_0 colla formola seguente, la quale *richiede soltanto il rapporto delle due resistenze e non il loro valore assoluto:*

$$\alpha_0 = \frac{\frac{r_1}{r_2} - 1}{t_2 - \frac{r_2}{r_1} t_1} .$$

Se il valore così trovato di α_0 risulta prossimo a 0,004270, vuol dire che si tratta di un alluminio quasi puro e la resistività si può ritenere eguale prossimamente a

$$\frac{113}{\alpha_0} 10^{-6} .$$

Se invece α_0 risulta notevolmente minore di 0,00427, converrà prendere la resistività eguale a

$$\frac{114{,}5}{\alpha_0} 10^{-6} .$$

Quanto al valore del coefficiente di temperatura α riferito ad una temperatura qualunque fra 0° e 100°, per l'alluminio puro al 99,7 %, esso si calcola colla formola

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 t},$$

e ritenendo $\alpha_0 = 0,004270$, si ottiene

$$\alpha = \frac{1}{234 + t},$$

cioè una formola quasi identica a quella che serve per il rame.

Flessione dei raggi luminosi stellari e spostamento secolare del perielio di Mercurio

Nota di C. BURALI-FORTI

presentata dal Socio nazionale residente Somigliana

Un raggio luminoso stellare che passa in prossimità del Sole, subisce *due incurvamenti*; uno è dovuto alla attrazione del Sole, supposto (ed è fisicamente ammissibile) che i raggi luminosi siano materiali; l'altro è dovuto al mezzo rifrangente fotosfera solare, poichè la materialità dei raggi luminosi non può distruggere la rifrazione ripetutamente constatata dall'esperienza; i due incurvamenti sono concordi, volgendo entrambi la concavità verso il centro del Sole, e quindi si sommano; il primo incurvamento si può calcolare, quantitativamente, senza ricorrere all'esperienza diretta, sia con la Meccanica classica che con quella relativistica [1]; l'osservazione diretta sperimentale dà la somma dei due incurvamenti. Ne segue che: *se un sistema meccanico è d'accordo con l'esperienza, la flessione dei raggi stellari, dovuta soltanto all'attrazione del Sole, deve risultare quantitativamente* MINORE *di quella totale misurata sperimentalmente.* E poichè la Relatività dà tale flessione parziale quantitativamente *eguale*, o, almeno, *dello stesso ordine di grandezza di quella totale*, si può, senz'altro, affermare che: *la Relatività è un sistema mec-*

[1] Per calcolare il secondo incurvamento occorre siano noti gli indici di rifrazione dei punti della fotosfera solare in funzione della loro distanza dal centro del Sole.

canico in piena contradizione sperimentale con la Meccanica reale del mondo fisico [1].

Alla stessa affermazione conduce anche lo *spostamento del perielio di Mercurio* [2] che, per osservazione astronomica diretta, risulta essere di 574″ per secolo. — Si operi con la *Meccanica classica*, dando al *potenziale newtoniano l'ordinaria forma.* Per il sistema Sole-Mercurio, lo spostamento del perielio di Mercurio risulta nullo (traiettoria kepleriana); ma tenendo conto delle *perturbazioni* dovute a tutti i pianeti conosciuti del sistema solare, si ottiene uno spostamento di 532″ per secolo, mancando, così, 42″ per secolo per giungere allo spostamento totale constatato sperimentalmente [3]. — Si operi, invece, con la *Meccanica relativistica.* Considerando Mercurio (piccola massa, trascurabile) nel campo gravitazionale del Sole (grande massa), si trova [4] che lo spostamento del perielio di Mercurio (si intende nel *solo* campo gravitazionale, e *relativistico*, del Sole) è di 42″ per secolo; proprio i 42″ che non dà la Meccanica classica con l'ordinaria forma del potenziale newtoniano. Ciò prova, *contrariamente a quanto affermano i relativisti*, che la Relatività *non* è certamente la Meccanica reale del mondo fisico. Infatti. Le *perturbazioni* che Mercurio subisce per la presenza degli altri pianeti del sistema solare, devono dare i 532″ che mancano per raggiungere lo spostamento dato dall'osservazione diretta. Ora, poichè la perturbazione prodotta, ad es., da Giove, non si potrà calcolare con gli ordinari metodi della Meccanica classica, ma si dovrà, invece, ottenere considerando il *campo gravitazionale einsteniano* formato da Giove e Mercurio [5],

---

[1] Conclusione del tutto opposta a quella cui giungono i relativisti, chè non tengono conto della rifrazione. — La Meccanica classica dà una flessione *metà* di quella relativistica; e se ciò non prova che la Meccanica classica è vera, non prova nemmeno che è falsa.

[2] Il fatto che la Relatività dà per l'accelerazione secolare del perielio di Marte 1″,3 mentre l'osservazione diretta dà 5″, condurrà, probabilmente, alla stessa conclusione.

[3] Modificando la legge, fisica, di attrazione di Newton (il che non altera i postulati della Meccanica classica) si ottengono anche i 42″ mancanti.

[4] A meno di termini che *si ritengono trascurabili*; e lo saranno?

[5] Non più una grande ed una piccola massa; non più le condizioni del sistema Sole-Mercurio.

tale perturbazione relativistica risulterà *certamente diversa* da quella ordinaria. Dunque lo spostamento totale del perielio di Mercurio non risulterà più di 574″ per secolo, come dà l'osservazione diretta, nonostante i 42″ miracolosamente ottenuti nel campo gravitazionale del Sole [1].

---

[1] Bisognerà poi sapere come si potranno calcolare le perturbazioni relativistiche, visto che l'S_4, spazio-tempo, ambiente, deve esser dato da fenomeni fisici, e questi sono, ad es., le mutue attrazioni di Giove e Mercurio.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino.

ATTI

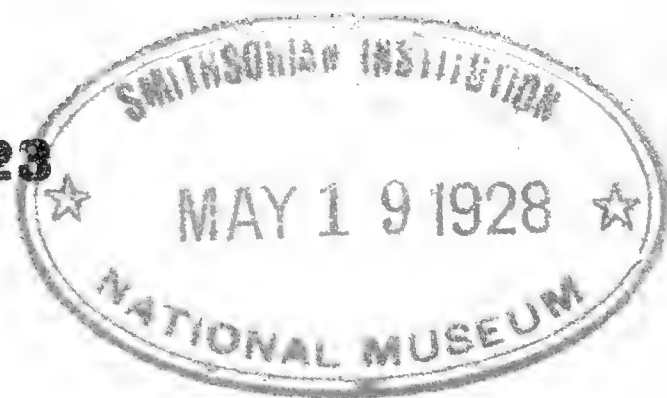
DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LVIII, Disp. 6ª, 1922-1923

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1923

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Gennaio 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Peano, Guidi, Somigliana, Ponzio, Sacco, Herlitzka, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Hanno scusato la loro assenza il Presidente Ruffini e il Socio Segre.

Il Segretario dà lettura del verbale della seduta precedente che è approvato.

Il Socio Somigliana offre in dono il volume degli "Atti della Società per il Progresso delle Scienze" pubblicati per cura del Segretario e riguardanti i lavori dell'undicesima riunione tenutasi a Trieste nel settembre del 1921, e ne discorre.

Il Socio Ponzio presenta una Nota dal titolo *Ricerche sulle Diossime*, che è la VII su tale argomento.

Il Presidente, a nome del Socio Segre, una Nota del sig. Beniamino Segre, *Genere della curva doppia per la varietà di* S_4 *che annulla un determinante simmetrico.*

Le Note presentate saranno pubblicate negli *Atti.*

LETTURE

Genere della curva doppia per la varietà di S_4 che annulla un determinante simmetrico

Nota di BENIAMINO SEGRE, a Torino

Presentata dal Socio nazionale residente Corrado Segre

Consideriamo per $s > 3$ il determinante simmetrico:

$$F^{(s)} \equiv \begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,s-1} & f_{1,s} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,s-1} & f_{2,s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{s,1} & f_{s,2} & \cdots & f_{s,s-1} & f_{s,s} \end{vmatrix}$$

i cui termini $f_{i,k} \equiv f_{k,i}$ (per $i, k = 1, 2, \ldots, s$) siano forme affatto generiche, di uno stesso grado m, di 5 variabili indipendenti x_h ($h = 0, 1, \ldots, 4$), che assumeremo come coordinate di punto in un S_4.

Se indichiamo con $F_{i,k}{}^{(s)}$ il complemento algebrico di $f_{i,k}$ in $F^{(s)}$, si ha:

$$\frac{\partial F^{(s)}}{\partial x_h} \equiv \sum_{i,k} \frac{\partial f_{i,k}}{\partial x_h} F_{i,k}{}^{(s)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s);$$

onde la forma $F^{(s)}$ di S_4 ha doppi i punti (x) in cui si annullano tutte le $F_{i,k}{}^{(s)}$, e generalmente solo questi. In generale questi punti costituiranno una linea $\varphi^{(s)}$ priva di punti singolari, di ordine $\binom{s+1}{3} m^3$ (1). — *Ci proponiamo di determinare il genere di questa linea.* A tal uopo basterà determinarne il rango.

(1) Cfr. C. Segre, nella *Encykl. der math. Wissensch.*, Bd. III, 2, pag. 931, nota 499.

Vedremo in seguito che la curva $\varphi^{(s)}$ è intersezione parziale di tre forme A, B, C, di S_4, le quali si segano ulteriormente lungo una seconda curva, e si toccano lungo una terza curva. È noto che in tal caso il rango di $\varphi^{(s)}$ è dato dal numero dei punti comuni a questa linea ed alla Jacobiana J di A, B, C e di due forme lineari generiche di S_4, detrattone però il numero di quelli che cadono nei punti di appoggio (eventualmente esistenti) di $\varphi^{(s)}$ colle curve ulteriori intersezioni di A, B, C. Cominciamo quindi collo studiare il comportamento di $\varphi^{(s)}$, J, in questi punti.

I.

Consideriamo tre forme dello stesso ordine n, di S_4, aventi in un loro punto comune O uno stesso spazio tangente π. La rete da esse determinata contiene un fascio di forme aventi il punto O come doppio; onde, preso O come punto fondamentale (10000), e π come spazio $x_4=0$, la rete stessa può venir definita dalle forme:

$$A \equiv x_0^{n-1} x_4 + x_0^{n-2} \sum_{h,g} a_{h,g}\, x_h\, x_g + \ldots$$

$$B \equiv \qquad x_0^{n-2} \sum_{h,g} b_{h,g}\, x_h\, x_g + \ldots$$

$$C \equiv \qquad x_0^{n-2} \sum_{h,g} c_{h,g}\, x_h\, x_g + \ldots$$

(ove $a_{hg}=a_{gh}$, ecc.; $h, g=1, 2, 3, 4$). I coni quadrici tangenti in O alle forme della nostra rete che hanno O doppio, costituiranno generalmente un fascio: questo segherà lo spazio π secondo un sistema lineare Ξ (∞^0 od ∞^1) di coni quadrici ordinari *di vertice O,* sistema che è quello determinato dai due coni:

$$x_4 = \sum_{h,g} b_{h,g}\, x_h\, x_g = 0\,; \qquad x_4 = \sum_{h,g} c_{h,g}\, x_h\, x_g = 0\,.$$

Se Γ è la curva base della nostra rete, il punto O per essa è almeno 4-plo, e le rette tangenti in O a Γ sono sempre *fra le rette basi di* Ξ.

Il punto O sia origine di un ramo lineare ψ, in ciascun punto del quale le forme della nostra rete si tocchino. Presa

la retta *di* π che tocca il ramo ψ nel punto O, come retta fondamentale (01), le equazioni di ψ saranno:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= r t + \dots \qquad (r \neq 0) \\ x_2 &= p_2 t^2 + \dots \\ x_3 &= p_3 t^2 + \dots \\ x_4 &= p_4 t^2 + \dots \end{aligned}$$

Poichè le forme A, B si toccano lungo ψ, nei punti di questo ramo deve aversi:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_i} & \frac{\partial A}{\partial x_4} \\ \frac{\partial B}{\partial x_i} & \frac{\partial B}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, 3).$$

Ma lungo ψ risulta:

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = 2 a_{1i} r t + \dots \qquad \frac{\partial A}{\partial x_4} = 1 + \dots$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} = 2 b_{1i} r t + \dots \qquad \frac{\partial R}{\partial x_4} = 2 b_{14} r t + \dots$$

onde (per $i = 1, 2, 3$) deve essere $b_{1i} = 0$. Similmente $c_{1i} = 0$. Pertanto: affinchè le forme della nostra rete (che già si toccano in O) si tocchino lungo un ramo ψ uscente da O, occorre che il sistema Ξ relativo ad O si componga di coni quadrici aventi *una retta doppia fissa*: la tangente in O al ramo ψ.

Supponiamo ora che le forme A, B, C, che si toccano lungo la linea ψ, si taglino ulteriormente lungo una seconda linea φ; cosicchè ora la curva Γ si compone di ψ contata 4 volte e di φ. Sia O un punto d'appoggio delle due linee ψ, φ, semplice per entrambe, e nel quale le tangenti ad esse relative siano due rette ζ, η, *distinte.* — Per quanto precede il sistema Ξ relativo ad O (punto di contatto delle forme A, B, C) deve comporsi di coni aventi doppia la retta ζ, e passanti tutti per η. Dunque nelle nostre ipotesi *il piano delle rette* ζ, η *fa parte di tutti i coni di* Ξ.

Chiamiamo J la forma Jacobiana di A, B, C e di due altre forme di S_4; la matrice Jacobiana delle forme A, B, C (a meno del fattore $[n-2]\,2^4$) è:

$$\begin{vmatrix} \frac{-1}{\ldots-2}\, x_0^{n-2}\, x_4 + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h a_{1h} x_h + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h a_{2h} x_h + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h a_{3h} x_h + \ldots & \frac{1}{2}\, x_0^{n-1} + \ldots \\ \ldots^{n-3} \sum_{hg} b_{hg}\, x_h\, x_g + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h b_{1h} x_h + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h b_{2h} x_h + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h b_{3h} x_h + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h b_{4h} x_h + \\ \ldots^{n-3} \sum_{hg} c_{hg}\, x_h\, x_g + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h c_{1h} x_h + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h c_{2h} x_h + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h c_{3h} x_h + \ldots & x_0^{n-2} \sum_h c_{4h} x_h + \ldots \end{vmatrix}$$

onde J ha sempre in O un punto doppio (almeno), avendo ivi per cono quadrico tangente un cono della rete determinata dalle forme:

$$\begin{vmatrix} \sum_h b_{1h} x_h & \sum_h b_{2h} x_h \\ \sum_h c_{1h} x_h & \sum_h c_{2h} x_h \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} \sum_h b_{2h} x_h & \sum_h b_{3h} x_h \\ \sum_h c_{2h} x_h & \sum_h c_{3h} x_h \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} \sum_h b_{3h} x_h & \sum_h b_{1h} x_h \\ \sum_h c_{3h} x_h & \sum_h c_{1h} x_h \end{vmatrix} = 0\,.$$

Sono rette basi di questa rete le rette *di* π *per* O, che hanno *uno stesso piano polare* rispetto a tutti i coni di Ξ; nel nostro caso quindi fra quelle rette basi vi è la retta η.

Possiamo dire concludendo che: *Date in* S_4 *tre forme* A, B, C, *se esse si toccano lungo una curva* ψ *e si segano ulteriormente in una curva* φ, *per ciascun punto comune a* φ, ψ *la tangente a* φ *ha ivi generalmente incontro tripunto colla Jacobiana di* A, B, C *e di due altre forme* S_4; *onde quel punto (doppio per la Jacobiana) assorbe generalmente tre delle intersezioni di* φ *con quella.*

II.

Posto:

$$F^{(s-2)} \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1,s-2} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2,s-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{s-2,1} & f_{s-2,2} & \dots & f_{s-2,s-2} \end{vmatrix}$$

$$\psi \equiv \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{s-2,1} & f_{s-2,2} & \dots & f_{s-2,s} \end{Vmatrix}$$

premettiamo il seguente lemma, che ci sarà utile per il seguito.

Un punto P(x) *di* S_4 *che annulli* $F^{(s)}_{s,s}$, $F^{(s)}_{s-1,s-1}$ *ed* $F^{(s-2)}$, *senza annullare tutti i minori d'ordine* s — 3 *estratti da* $F^{(s-2)}$, *annulla di conseguenza la matrice* ψ.

Le espressioni di cui ora tratteremo s'intenderanno calcolate nel punto $P(x)$.

Poichè per ipotesi il determinante simmetrico $F^{(s-2)}$ è nullo senza che siano nulli tutti i minori d'ordine massimo estratti da esso, ne segue che $F^{(s-2)}$ avrà diverso da zero qualche minore *principale* d'ordine massimo; e sia, p. es., $F^{(s-2)}_{s-2,s-2} \neq 0$.

Per un teorema di *Hesse* [2], essendo nullo $F^{(s-2)}$ si hanno le identità:

$$-F^{(s-2)}_{s-2,s-2} \cdot F^{(s)}_{s,s} = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1,s-3} & f_{1,s-1} \\ f_{21} & \dots & f_{2,s-3} & f_{2,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{s-2,1} & \dots & f_{s-2,s-3} & f_{s-2,s-1} \end{vmatrix}^2$$

$$-F^{(s-2)}_{s-2,s-2} \cdot F^{(s)}_{s-1,s-1} = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1,s-3} & f_{1,s} \\ f_{21} & \dots & f_{2,s-3} & f_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{s-2,1} & \dots & f_{s-2,s-3} & f_{s-2,s} \end{vmatrix}^2$$

---

[2] Cfr. L. O. Hesse, *Ein Determinantensatz* (*Gesammelte Werke*, pp. 558-559).

onde, essendo per ipotesi: $F^{(s)}_{s,s} = 0$, $F^{(s)}_{s-1,s-1} = 0$ ed $F^{(s-2)} = 0$, risultano nulli tutti i minori d'ordine massimo $(s-2)$ estratti dalla matrice ψ, che contengono le $s-3$ colonne:

$$\left\| \begin{matrix} f_{11} & \dots & f_{1,s-3} \\ f_{21} & \dots & f_{2,s-3} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{s-2,1} & \dots & f_{s-2,s-3} \end{matrix} \right\|$$

D'altronde la matrice da queste formata non è nulla, avendosi supposto diverso da zero $F^{(s-2)}_{s-2,s-2}$, il quale è un suo minore di ordine massimo.

Per un noto teorema devono quindi essere nulli tutti i minori d'ordine massimo estratti dalla matrice ψ.

III.

Siamo ora in grado di affrontare la questione propostaci.

Per un teorema sui determinanti reciproci è:

$$(1) \qquad F^{(s)}_{s,s} \,.\, F^{(s)}_{s-1,s-1} - \{ F^{(s)}_{s,s-1} \}^2 \equiv F^{(s-2)} \,.\, F^{(s)} .$$

Un punto $P(x)$ di S_4 per cui sia:

$$(2) \qquad F^{(s)}_{s,s} = 0 , \qquad F^{(s)}_{s-1,s-1} = 0 , \qquad F^{(s)}_{s,s-1} = 0$$

è certo doppio per la forma (1). — Tali punti $P(x)$ offrono tre casi a seconda che in essi $F^{(s-2)}$ è diverso da zero; oppure $F^{(s-2)}$ è nullo essendo nulli tutti i suoi minori d'ordine massimo; od infine $F^{(s-2)}$ è nullo senza che siano nulli tutti i suoi minori d'ordine massimo.

Nel primo caso $P(x)$, per la (1), dev'essere doppio per $F^{(s)}$, e cioè deve stare sulla curva $\varphi^{(s)}$; nel secondo caso il punto $P(x)$ sta sulla curva doppia di $F^{(s-2)}$, come si ha dalle considerazioni introduttorie fatte sopra, ponendovi $s-2$ in luogo di s: tale curva [3] è di ordine $\binom{s-1}{3} m^3$, e la diremo $\varphi^{(s-2)}$; nel terzo

---

[3] Cfr. nota [1].

caso, infine, il punto $P(x)$ per il lemma visto al § II deve annullare la matrice ψ.

Inversamente si vede facilmente che un punto $P(x)$ che stia su $\varphi^{(s)}$, o che stia su $\varphi^{(s-2)}$, od infine che annulli ψ, verifica di conseguenza le equazioni (2).

I punti di S_4 che annullano la matrice ψ costituiscono una linea generalmente priva di punti singolari, il cui ordine [4] è $\binom{s}{3} m^3$, e che diremo ancora curva ψ.

Potremo quindi dire che la curva intersezione delle forme (2) si compone delle curve $\varphi^{(s)}$, $\varphi^{(s-2)}$ e ψ debitamente contate. — Che questa aggiunta sia necessaria risulta dal seguente teorema:

In ogni punto della curva ψ, *le forme* (2) *ed* $F^{(s-2)}$ (*passanti per* ψ) *hanno uno stesso spazio tangente.*

Indichiamo in generale con $F^{(q)}$ $(q \leq s)$ la forma:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{q1} & \dots & f_{qq} \end{vmatrix}$$

e con $F^{(q)}_{i,k}$ il complemento algebrico di $f_{i,k}$ in $F^{(q)}$.

Similmente alla (1) si ha:

$$F^{(s-1)}_{s-1,s-1} \cdot F^{(s-1)}_{s-2,s-2} - \left\{ F^{(s-1)}_{s-1,s-2} \right\}^2 \equiv F^{(s-1)} \cdot F^{(s-3)}.$$

Lungo ψ si annullano le forme $F^{(s-1)}_{s-1,s-1}$, $F^{(s-1)}_{s-1,s-2}$, $F^{(s-1)}$; onde dalla precedente identità risulta che lungo ψ è:

$$\frac{\partial F^{(s-1)}_{s-1,s-1}}{\partial x_l} \cdot F^{(s-1)}_{s-2,s-2} = \frac{\partial F^{(s-1)}}{\partial x_l} \cdot F^{(s-3)} \qquad (\text{per } l = 0, 1, \dots, 4).$$

Ora è: $F^{(s-1)}_{s-1,s-1} \equiv F^{(s-2)}$, $F^{(s-1)} \equiv F^{(s)}_{s,s}$, onde la precedente relazione esprime che lungo ψ le forme $F^{(s-2)}$ ed $F^{(s)}_{s,s}$ si toccano. In modo analogo si procede per le altre due forme (2) in relazione con $F^{(s-2)}$.

---

(4) Cfr. C. Segre, op. cit. in (1), pag. 929.

Dunque le forme (2) si tagliano lungo le curve $\varphi^{(s)}$, $\varphi^{(s-2)}$ e si toccano lungo la curva ψ; a riprova di ciò si ha l'identità:

$$[(s-1)\,m]^3 = \binom{s+1}{3} m^3 + \binom{s-1}{3} m^3 + 4\,.\binom{s}{3} m^3 .$$

Ora osserviamo che, essendo le forme f_{ik} generiche, le curve $\varphi^{(s)}$ e $\varphi^{(s-2)}$ non hanno punti comuni.

Supponiamo infatti che abbiano invece qualche punto a comune. — La forma $F^{(s)}_{11}$ non contiene $\varphi^{(s-2)}$, onde essa taglierà questa curva in un punto *finito* di punti P_i. Poichè la forma $F^{(s)}_{11}$ contiene invece per intero la curva $\varphi^{(s)}$, quest'ultima dovrà per l'ipotesi fatta contenere *qualche punto* P_i. Siccome $\varphi^{(s)}$ sta sulla forma $F^{(s)}_{22}$, si ha quindi che questa forma contiene *qualche punto* P_i. — Ora ciò è assurdo, poichè, mentre i punti P_i (che sono in numero *finito*) non dipendono menomamente dalle forme $f_{1,s-1}$, $f_{1,s}$, il determinante $F^{(s)}_{22}$ dipende in modo essenziale da queste: precisamente $F^{(s)}_{22}$ si esprime con un polinomio di 2° grado nelle $f_{1,s-1}$, $f_{1,s}$, i cui coefficienti sono generalmente diversi da zero nei punti P_i. —

La Jacobiana delle forme (2) e di due forme lineari di S_4 è di ordine $3\,[(s-1)\,m-1]$. Indichiamo con a il numero degli eventuali punti di appoggio di $\varphi^{(s)}$ colla curva ψ; allora, per quanto precede, e pel teorema dimostrato alla fine del § I, il rango r della curva $\varphi^{(s)}$ è dato dalla formola:

$$r = \binom{s+1}{3} m^3\,.\,3\,[(s-1)\,m-1] - 3a. \qquad (3)$$

Non ci resta quindi che determinare il numero a.

Basta perciò osservare che i punti comuni a $\varphi^{(s)}$, $F^{(s-2)}$ sono tutti e soli gli a punti comuni a $\varphi^{(s)}$ e ψ. Infatti un punto di $\varphi^{(s)}$ che annulli $F^{(s-2)}$, non può annullarne tutti i minori d'ordine massimo, perchè non sta mai, come s'è visto dianzi, su $\varphi^{(s-2)}$; quindi per il lemma del § II sta su ψ. Viceversa, poichè ψ sta su $F^{(s-2)}$, un punto comune a ψ e a $\varphi^{(s)}$ è pure comune a $\varphi^{(s)}$ e $F^{(s-2)}$. — D'altronde in un tal punto la curva $\varphi^{(s)}$ *tocca* la forma $F^{(s-2)}$; giacchè, per un teorema dimostrato sopra,

in ogni punto di ψ le forme (2) (che si segano lungo $\varphi^{(s)}$) toccano $F^{(s-2)}$. — Si ha quindi:

$$2a = \binom{s+1}{3} m^3 . (s-2)\, m. \tag{4}$$

Sostituendo dunque nella (3) viene:

$$r = \frac{(s+1)\, s^2 (s-1)}{4} m^4 - \frac{(s+1)\, s\, (s-1)}{2} m^3$$ (5).

Da qui segue per il genere p di $\varphi^{(s)}$ l'espressione:

$$p = \frac{(s+1)\, s^2 (s-1)}{8} m^4 - \frac{5 . (s+1)\, s\, (s-1)}{12} m^3 + 1. \tag{5}$$

È questo il genere che ci eravamo proposto di determinare. La formola vale ancora, com'è facile verificare, nei casi esclusi in cui $s = 2$ oppure $s = 3$.

IV.

Si ha una forma $F^{(5)}$ molto importante, considerando la *Hessiana* di una ipersuperficie generica di S_4.

In base a quanto precede potremo dire che:

La forma Hessiana di una ipersuperficie d'ordine n *di* S_4, *ha generalmente una curva doppia il cui ordine è* $20\,(n-2)^3$ *ed il cui genere è:*

$$75\,(n-2)^4 - 50\,(n-2)^3 + 1 \tag{6}$$ (6).

---

(5) In base a questa formola si può determinare la *classe* della nostra $F^{(s)}$. Si ha così che $F^{(s)}$ (la quale è di ordine sm) è di classe:

$$\frac{s^4 + 2s^2}{3} m^4 - (2s^3 + s)\, m^3 + 3s^2 m^2 - sm.$$

(6) F. Klein, nella Nota *Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* (" Math. Ann. ", 15, 1879, pag. 533), ha avuto occasione (a pag. 545-546) di determinare per via affatto diversa il genere p della curva doppia della Hessiana di una *particolare forma cubica* di S_4. Egli trova $p = 26$, che è appunto il valore dato dalla (6) per $n = 3$.

Ricerche sulle diossime

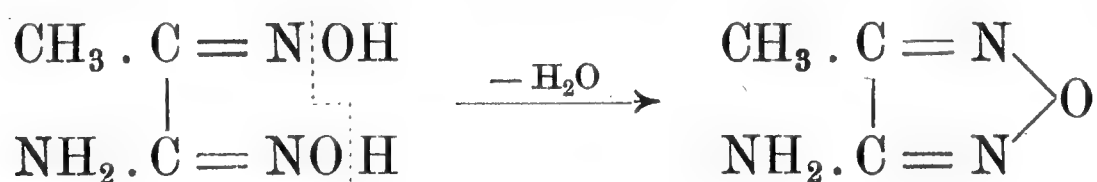
Nota VII del Socio nazionale residente prof. GIACOMO PONZIO
e del signor GUSTAVO RUGGERI

Nella Nota II su questo argomento (1), dopo aver descritto la metilaminogliossima $CH_3.C(:NOH).C(:NOH).NH_2$, abbiamo soggiunto che essa si prestava ad alcune reazioni, il cui studio, che riferiamo ora, ci ha portato a stabilire i rapporti i quali collegano fra di loro, in modo imprevisto, detta gliossima con alcuni acilderivati non ancora conosciuti delle azossime [furo-(a b_1)-diazoli] e col metilaminofurazano

$$\begin{array}{ccc} CH_3.C & \text{---} & C.NH_2, \\ \| & & \| \\ N & \text{---}\ O\ \text{---} & N \end{array}$$

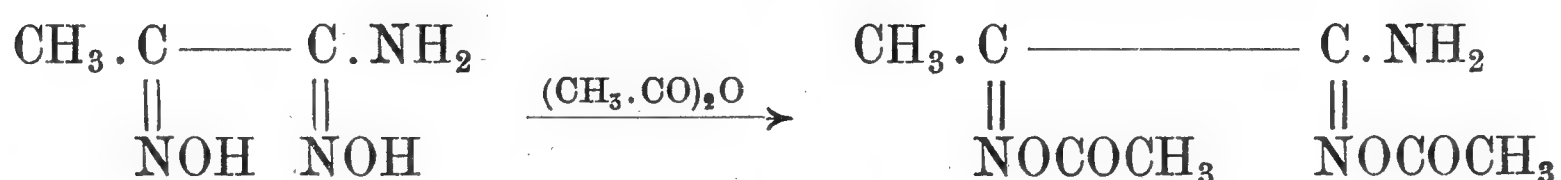
primo termine di una serie nuova di composti di proprietà molto interessanti.

Infatti le nostre esperienze dimostrano che il metilaminofurazano non risulta direttamente dalla metilaminogliossima per eliminazione di una molecola di acqua a spese dei due ossiminogruppi

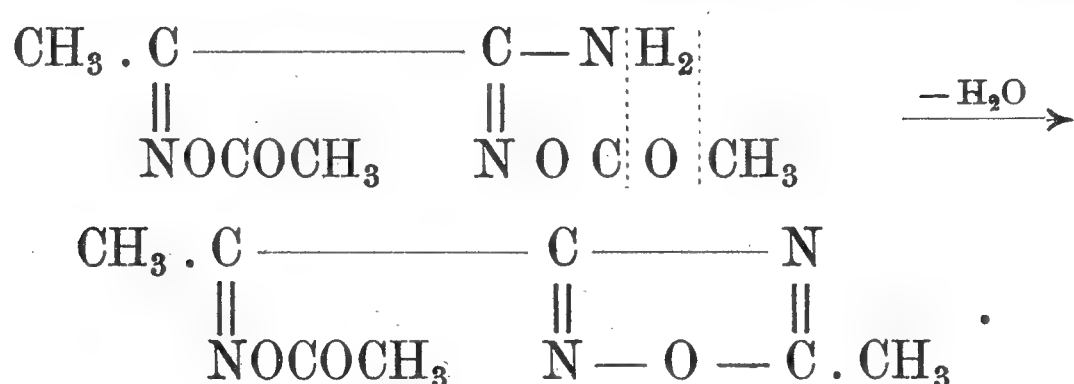
$$\begin{array}{l} CH_3.C=N\vdots OH \\ \quad\ \ | \\ NH_2.C=NO\vdots H \end{array} \xrightarrow{-H_2O} \begin{array}{l} CH_3.C=N \\ \quad\ \ | \qquad\quad >O \\ NH_2.C=N \end{array}$$

mediante i disidratanti e secondo i metodi generali coi quali si ottengono i furazani [furo-(a a_1)-diazoli] dalle α-diossime, bensì, se si impiega l'anidride acetica, per azione ulteriore dell'acqua sull'ossima del 3-acetil-5-metil-furo-(a b_1)-diazolo $CH_3.C(:NOH).(C_2N_2O).CH_3$.

(1) " Gazz. Chim. Ital. ", *52*, I, 289 (1922).

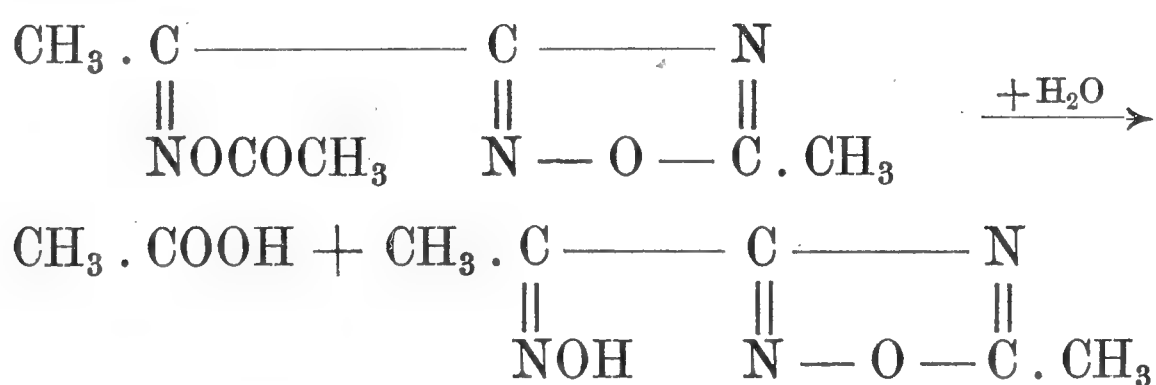
Facendo bollire con un eccesso di anidride acetica la metilaminogliossima essa viene inizialmente trasformata nel suo diacetilderivato

$$\begin{matrix} CH_3.C & \text{——} & C.NH_2 \\ \| & & \| \\ NOH & & NOH \end{matrix} \xrightarrow{(CH_3.CO)_2O} \begin{matrix} CH_3.C & \text{——} & C.NH_2 \\ \| & & \| \\ NOCOCH_3 & & NOCOCH_3 \end{matrix}$$

dal quale per eliminazione di una molecola di acqua a spese dei due atomi di idrogeno aminico e dell'atomo di ossigeno carbonilico vicini si origina poi l'acetilderivato dell'ossima del 3-acetil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo

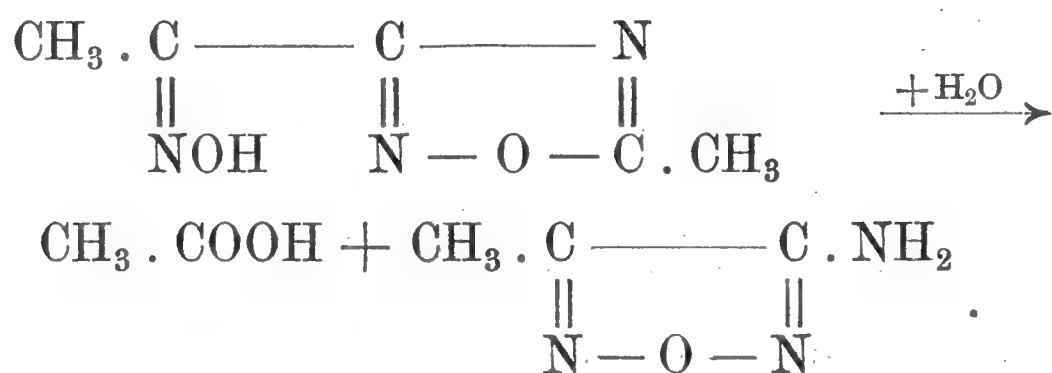
$$\begin{matrix} CH_3.C & \text{——} & C-NH_2 \\ \| & & \| \\ NOCOCH_3 & & N\,O\,C\,O\,CH_3 \end{matrix} \xrightarrow{-H_2O}$$

$$\begin{matrix} CH_3.C & \text{——} & C & \text{——} & N \\ \| & & \| & & \| \\ NOCOCH_3 & & N & -O- & C.CH_3 \end{matrix} .$$

Però a causa della facilità colla quale questo acetilderivato si idrolizza in acido acetico e nell'ossima del 3-acetil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo

$$\begin{matrix} CH_3.C & \text{——} & C & \text{——} & N \\ \| & & \| & & \| \\ NOCOCH_3 & & N & -O- & C.CH_3 \end{matrix} \xrightarrow{+H_2O}$$

$$CH_3.COOH + \begin{matrix} CH_3.C & \text{——} & C & \text{——} & N \\ \| & & \| & & \| \\ NOH & & N & -O- & C.CH_3 \end{matrix}$$

si ottiene, dopo trattamento con carbonato sodico, la suddetta ossima, che riscaldata a sua volta con acido cloridrico diluito reagisce coll'acqua per dare altro acido acetico e metilaminofurazano

$$\begin{matrix} CH_3.C & \text{——} & C & \text{——} & N \\ \| & & \| & & \| \\ NOH & & N & -O- & C.CH_3 \end{matrix} \xrightarrow{+H_2O}$$

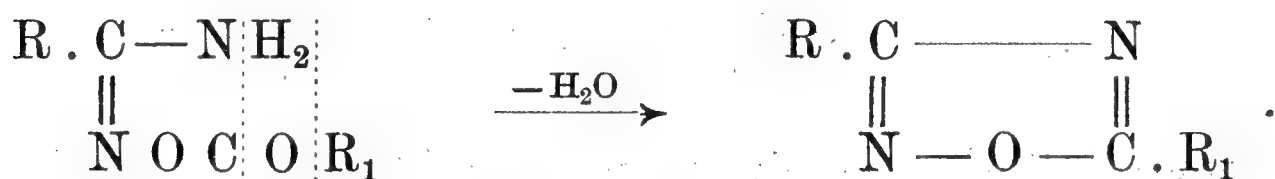
$$CH_3.COOH + \begin{matrix} CH_3.C & \text{——} & C.NH_2 \\ \| & & \| \\ N & -O- & N \end{matrix} .$$

Sulla prima e sulla terza delle reazioni ora esposte non c'è nulla da osservare; la seconda è analoga alla sintesi delle azossime

$$\begin{array}{lcl} R\,.\,C & \text{———} & N \\ \| & & \| \\ N & - O - & C\,.\,R_1 \end{array}$$

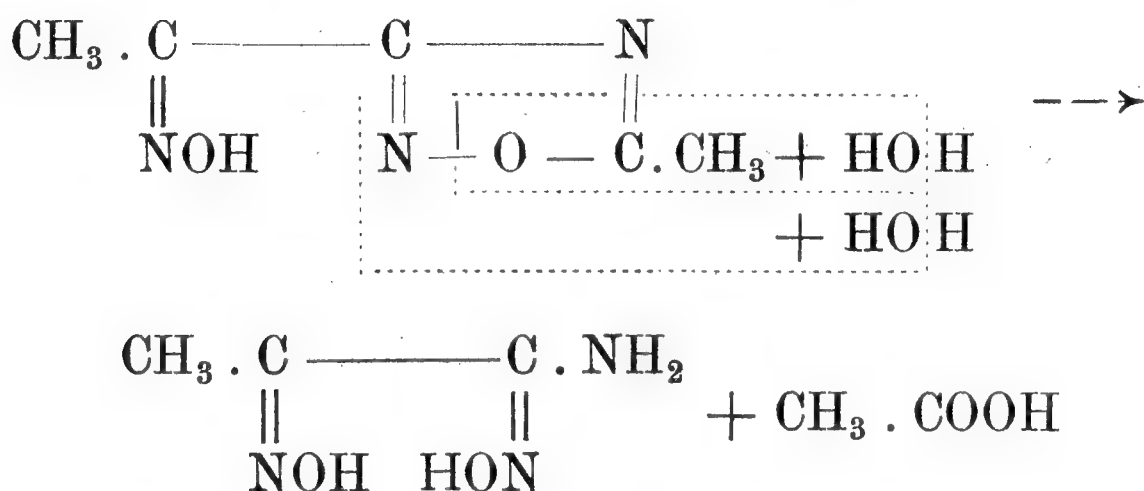
dagli acilderivati delle amidossime

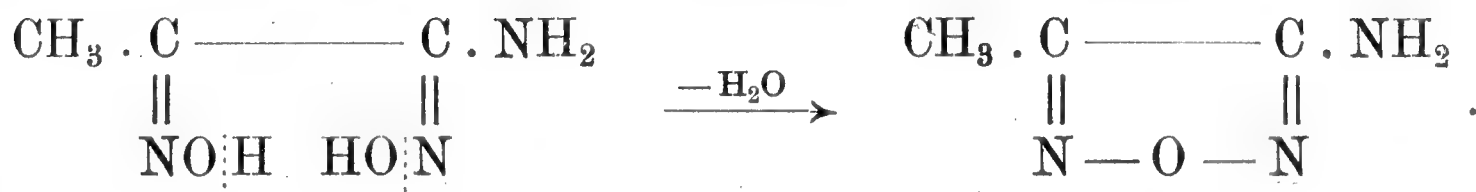
$$\begin{array}{l} R\,.\,C\,.\,NH_2 \\ \quad\;\| \\ \quad NOH \end{array}$$

per mezzo dei disidratanti

$$\begin{array}{l} R\,.\,C-NH_2 \\ \quad\;\| \\ \quad N\,O\,C\,O\,R_1 \end{array} \xrightarrow{-H_2O} \begin{array}{lcl} R\,.\,C & \text{———} & N \\ \| & & \| \\ N & - O - & C\,.\,R_1 \end{array}\,.$$

In quanto alla quarta, che consiste nella trasformazione di un'azossima in un furazano (trasformazione non ancora stata osservata, si può interpretare ammettendo che per azione di due molecole di acqua su una molecola dell'ossima del 3-acetil-5-metil-furo-$(a\,b_1)$-diazolo risulti come prodotto intermedio una forma labile della metilaminogliossima

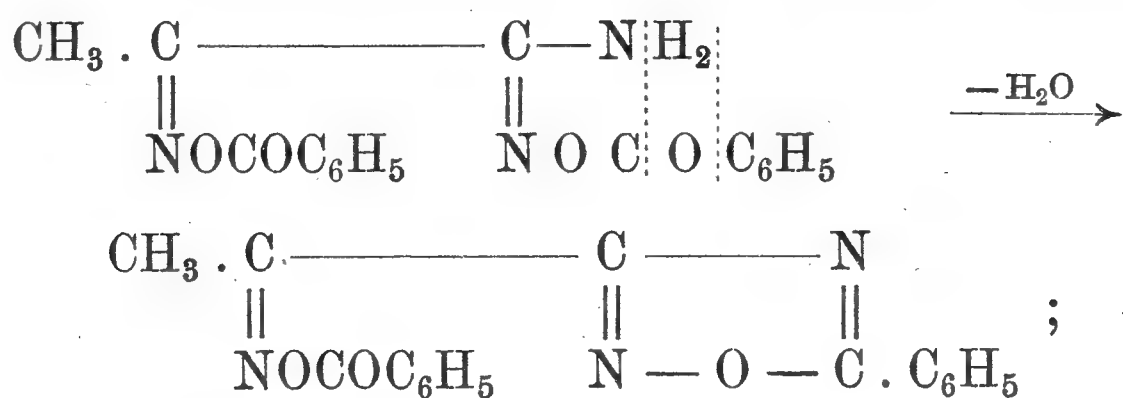
$$\begin{array}{lcl} CH_3\,.\,C & \text{———} & C \text{———} N \\ \| & & \| \qquad\quad \| \\ NOH & & N - O - C\,.\,CH_3 + HO\,H \\ & & \qquad\qquad\qquad + HO\,H \end{array} \dashrightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} CH_3\,.\,C & \text{———} & C\,.\,NH_2 \\ \| & & \| \\ NOH & & HON \end{array} + CH_3\,.\,COOH$$

la quale, a differenza della forma stabile da noi descritta nella Nota II (loc. cit.), è spontaneamente anidrizzabile in metilaminofurazano

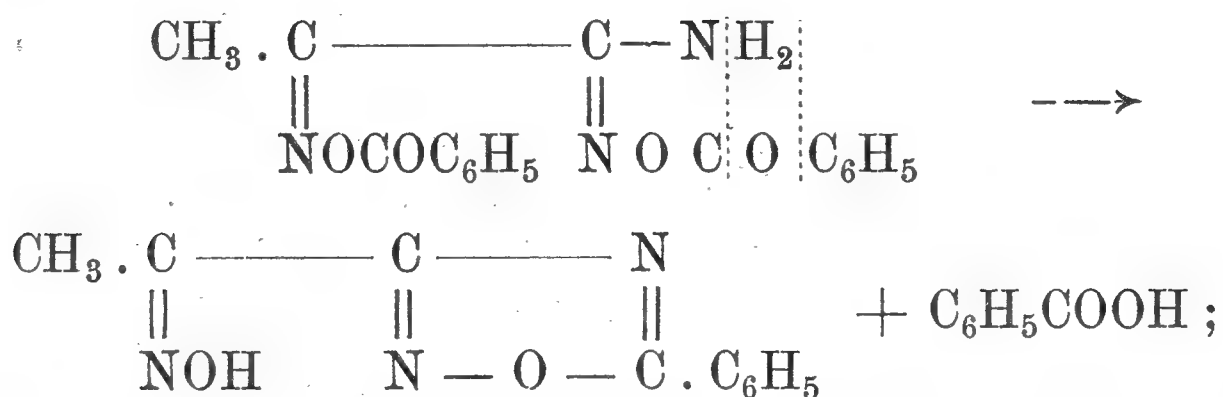
$$\begin{array}{lcl} CH_3\,.\,C & \text{———} & C\,.\,NH_2 \\ \| & & \| \\ NO\,H & & HO\,N \end{array} \xrightarrow{-H_2O} \begin{array}{lcl} CH_3\,.\,C & \text{———} & C\,.\,NH_2 \\ \| & & \| \\ N & - O - & N \end{array}\,.$$

In perfetto accordo col nostro modo di vedere stanno i fatti che dal dibenzoilderivato della metilaminogliossima, per eliminazione di una molecola di acqua a spese dell'aminogruppo e del benzoile vicini mediante l'anidride acetica bollente, ab-

biamo ottenuto il benzoilderivato dell'ossima del 3-acetil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo

$$\begin{array}{llll} CH_3\,.\,C & \text{———} & C-N\vdots H_2\vdots & \\ \;\;\;\;\;\| & & \| & \xrightarrow{-H_2O} \\ \;\;\;NOCOC_6H_5 & & N\;O\;C\vdots\,O\,\vdots C_6H_5 & \end{array}$$

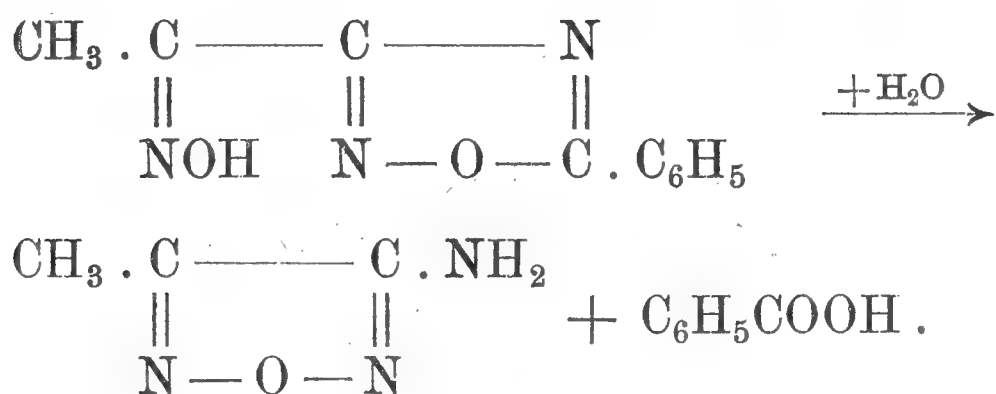
$$\begin{array}{lllll} CH_3\,.\,C & \text{———} & C & \text{———} & N \\ \;\;\;\;\;\| & & \| & & \| \quad ; \\ \;\;\;NOCOC_6H_5 & & N & -\,O\,- & C\,.\,C_6H_5 \end{array}$$

che da detto dibenzoilderivato, per eliminazione di una molecola di acqua come sopra e sostituzione di un benzoile con un atomo di idrogeno mediante riscaldamento con idrossido di sodio diluito, abbiamo ottenuto l'ossima del 3-acetil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo [1]

$$\begin{array}{llll} CH_3\,.\,C & \text{———} & C-N\vdots H_2\vdots & \\ \;\;\;\;\;\| & & \| & \longrightarrow \\ \;\;\;NOCOC_6H_5 & & N\;O\;C\vdots\,O\,\vdots C_6H_5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} CH_3\,.\,C & \text{———} & C & \text{———} & N & \\ \;\;\;\;\;\| & & \| & & \| & + C_6H_5COOH\,; \\ \;\;\;NOH & & N & -\,O\,- & C\,.\,C_6H_5 & \end{array}$$

ed infine che per azione dell'acido cloridrico diluito abbiamo potuto trasformare quest'ultima in metilaminofurazano

$$\begin{array}{llllll} CH_3\,.\,C & \text{——} & C & \text{——} & N & \\ \;\;\;\;\;\| & & \| & & \| & \xrightarrow{+H_2O} \\ \;\;\;NOH & & N & -\,O\,- & C\,.\,C_6H_5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} CH_3\,.\,C & \text{——} & C\,.\,NH_2 & \\ \;\;\;\;\;\| & & \| & + C_6H_5COOH\,. \\ \;\;\;\;\;N & -\,O\,- & N & \end{array}$$

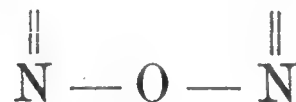
---

[1] L'eliminazione di una molecola di acqua coll'idrossido di sodio non è comune in questo gruppo di composti; tuttavia fu già effettuata da Schmidtmann (*Ber.* *29*, 1171 (1896)), il quale dal dibenzoilderivato della malonen-bis-amidossima $CH_2\left(C\begin{smallmatrix}\diagup NH_2 \\ \diagdown NOCOC_6H_5\end{smallmatrix}\right)_2$ ottenne il cosidetto malonen-diazossimdibenzenile $CH_2\left(C\begin{smallmatrix}\diagup N \diagdown \\ \diagdown NO \diagup\end{smallmatrix}C\,.\,C_6H_5\right)_2$.

Ammettendo che soltanto le forme labili (non conosciute), e non le forme stabili, della metilaminogliossima $CH_3.C(:NOH).C(:NOH).NH_2$ ed in genere delle gliossime alifatiche $R.C(:NOH).C(:NOH).R_1$ siano capaci di anidrizzarsi direttamente sotto l'influenza dei disidratanti, si spiega come dalle forme stabili (le quali danno sali complessi di nichel e che noi chiamiamo forme β) non sia mai stato possibile preparare, per riscaldamento con acido solforico concentrato o con anidride acetica, i corrispondenti furazani [1]. È però probabile che mediante reazioni analoghe a quelle da noi osservate si possano ottenere altri aminofurazani da altre aminogliossime, e ci riserviamo di tornare sull'argomento in una prossima Nota.

Limitandoci per ora al metilaminofurazano, possiamo dire che la presenza del gruppo $-NH_2$ modifica profondamente le proprietà dell'anello

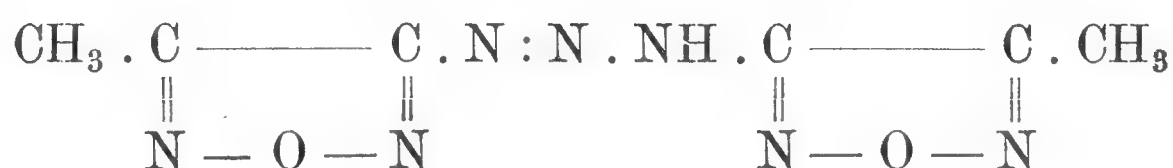
$$\begin{array}{ccc} -C & \text{———} & C- \\ \| & & \| \\ N & -O- & N \end{array}$$

la stabilità del quale non è più così grande come nei furazani

$$\begin{array}{ccc} R.C & \text{———} & C.R_1 \\ \| & & \| \\ N & -O- & N \end{array}$$

in cui R ed R_1 sono alchili od arili. Scompaiono anche la volatilità col vapor d'acqua e l'odore caratteristico di questi ultimi composti, mentre per contro compariscono alcune proprietà caratteristiche dei C-amino-v-triazoli

$$\begin{array}{ccc} R.C & \text{———} & C.NH_2 \\ \| & & \| \\ N & -NH- & N \end{array}$$

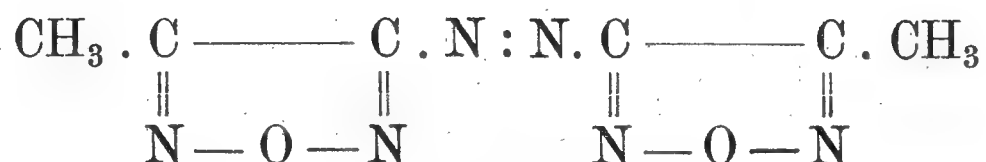
Infatti il metilaminofurazano è diazotabile mediante l'acido nitroso e può copularsi con sè stesso dando l'azoiminometilfurazano

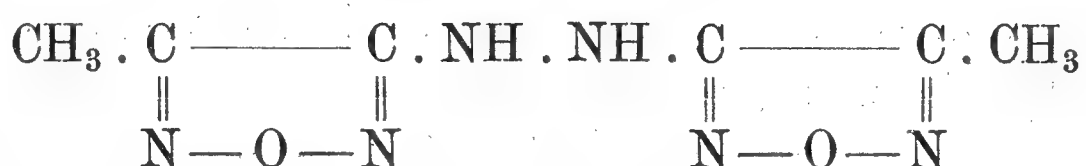
$$\begin{array}{ccccccc} CH_3.C & \text{———} & C.N:N.NH.C & \text{———} & C.CH_3 \\ \| & & \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad \| & & \| \\ N & -O- & N \quad\quad\quad\quad\quad\quad N & -O- & N \end{array}$$

con tale facilità che non si riesce a far reagire il diazo, il quale dapprima risulta, con altre basi. Inoltre mentre il gruppo $-CH_3$ dei metilfurazani è ossidabile in carbossile $-COOH$,

---

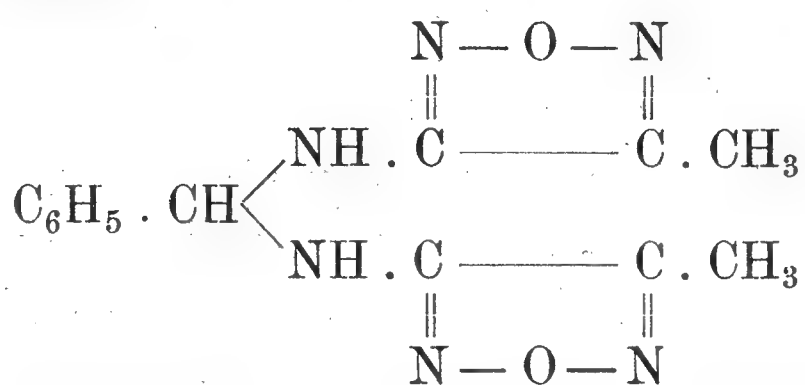
[1] Questi si ottengono, come è noto (Wolff. *Ber.* 28, 69, 1895), per prolungato riscaldamento delle gliossime con ammoniaca acquosa, a 160°-170°; forse in dette condizioni esse si isomerizzano dapprima nelle forme labili, le quali poi si anidrizzano.

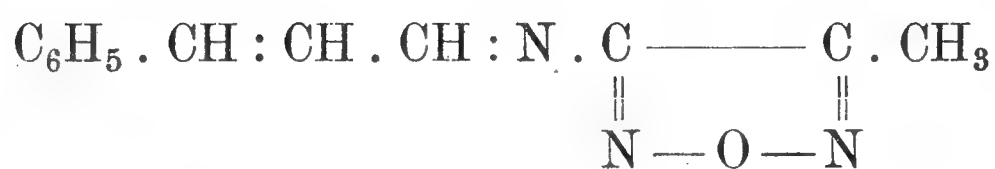
quello del metilaminofurazano resiste straordinariamente agli ossidanti energici, come il permanganato potassico e l'acido nitrico concentrati, i quali invece deidrogenano l'aminogruppo costituendo, coi residui di due molecole, l'azometilfurazano

$$\begin{array}{l} CH_3 . C \text{———} C . N : N . C \text{———} C . CH_3 \\ \quad\;\;\, \| \qquad\quad\;\; \| \qquad\quad\;\; \| \qquad\quad\;\; \| \\ \quad\;\;\, N - O - N \qquad N - O - N \end{array}$$

facilmente riducibile in idrazometilfurazano

$$\begin{array}{l} CH_3 . C \text{———} C . NH . NH . C \text{———} C . CH_3 \\ \quad\;\;\, \| \qquad\quad\;\; \| \qquad\qquad\qquad\; \| \qquad\quad\;\; \| \\ \quad\;\;\, N - O - N \qquad\qquad\;\; N - O - N \end{array}$$

a sua volta riossidabile nel precedente.

Infine il metilaminofurazano può condensarsi con alcune aldeidi, ma non sempre allo stesso modo: p. es. colla benzaldeide dà il composto

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad N - O - N \\ \qquad\qquad\qquad\quad \| \qquad\quad\;\; \| \\ \qquad\qquad\quad\; NH . C \text{———} C . CH_3 \\ C_6H_5 . CH \langle \\ \qquad\qquad\quad\; NH . C \text{———} C . CH_3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \| \qquad\quad\;\; \| \\ \qquad\qquad\qquad\quad N - O - N \end{array}$$

risultante da due molecole; coll'aldeide cinnamica quest'altro

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . CH : CH . CH : N . C \text{———} C . CH_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \| \qquad\quad\;\; \| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; N - O - N \end{array}$$

risultante da una sola.

XIX. — **Metilaminogliossima** $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . NH_2$. Oltre che nei modi già indicati (loc. cit.) si può ottenere rapidamente introducendo poco a poco in ammoniaca acquosa $d = 0{,}888$, rimescolata con una turbina e raffreddata con ghiaccio, la metilclorogliossima $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . Cl$ in fina polvere, per il che si separa in parte subito quasi pura con ottimo rendimento.

Diacetilderivato $CH_3 . C(:NOCOCH_3) . C(:NOCOCH_3) . NH_2$. Si prepara facendo agire sulla metilaminogliossima $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . NH_2$ l'anidride acetica raffreddata con ghiaccio ed in presenza di acetato sodico fuso. Cristallizza dall'alcool acquoso in grossi prismi splendenti, od in aghi appiattiti, con una molecola di acqua di cristallizzazione che non perde nell'aria ma lentamente nel vuoto e rapidamente se scaldato. Il monoidrato comincia a rammollire a 75° ed è tutto fuso a 100°; disidratato con precauzione a temperatura man mano crescente fino a costanza di peso diventa opaco pur conservando la forma cristallina primitiva, ed allora fonde nettamente a 123° senza decomposizione.

Sostanza gr. 2,0642: H_2O gr. 0,1825.
Sostanza anidra gr. 0,1482: N cc. 25,9 a 9° e 746,026 mm.

Trovato %:	H_2O	8,82.
Per $C_7H_{11}O_4N_3 + H_2O$ calc.:		8,24.
Trovato %:	N	20,86.
Per $C_7H_{11}O_4N_3$ calc.:		20,89.

Anidro è discretamente solubile a freddo in alcool; molto solubile in acetone ed in cloroformio e poco in etere; discretamente solubile a caldo e poco a freddo in benzene ed in ligroina.

È insolubile in acqua, solubile nell'acido cloridrico diluito.

Idrolizzato a freddo con idrossido di sodio sia concentrato che diluito, od a caldo con carbonato sodico od acido cloridrico diluito, ridà la metilaminogliossima da cui deriva.

Ossima del 3-acetil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo $CH_3.C(:NOH).(C_2N_2O).CH_3$. Si ottiene riscaldando per qualche ora all'ebollizione con un eccesso di anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso il diacetilderivato della metilaminogliossima, versando in acqua il prodotto della reazione, neutralizzando con carbonato sodico ed estraendo poi il liquido con etere; od anche direttamente dalla metilaminogliossima operando nel modo ora detto.

Cristallizzata da una miscela di benzene e ligroina si presenta in prismetti allungati fusibili a 145° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1476: N cc. 37 a 9° e 731,974 mm.
Trovato %: N 29,37.
Per $C_5H_7O_2N_3$ calc.: 29,78.

È solubile a freddo in etere, alcool, acetone e cloroformio; discretamente a caldo e poco a freddo in acqua ed in benzene; poco a caldo e quasi affatto a freddo in ligroina.

Trattando con cloruro di benzoile la sua soluzione in idrossido di sodio al 20 % se ne ottiene il *benzoilderivato* $CH_3 . C(:NOCOC_6H_5) . (C_2N_2O) . CH_3$ che cristallizza dall'alcool in lunghi aghi fusibili a 198°-199° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1383: N cc. 20,1 a 10° e 734,671 mm.
Trovato %: N 17,03.
Per $C_{12}H_{11}O_3N_3$ calc.: 17,14.

È pochissimo solubile a caldo e quasi nulla a freddo in alcool ed in acetone; discretamente solubile a caldo e poco a freddo in benzene; quasi insolubile in ligroina ed in etere.

Come l'ossima da cui deriva, esso fornisce, se fatto bollire con acido cloridrico diluito, il metilaminofurazano.

Ossima del 3-acetil-5-fenil-furo-(ab₁)-diazolo $CH_3.C(:NOH).(C_2N_2O) . C_6H_5$. Si forma assieme a metilaminogliossima $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . NH_2$ riscaldando con idrossido di sodio al 20 % ed un po' di alcool il dibenzoilderivato di quest'ultima $CH_3 . C(:NOCOC_6H_5) . C(:NOCOC_6H_5) . NH_2$ che abbiamo già descritto nella Nota II [1]. Dopo aver diluito con acqua (onde mantenere in soluzione la gliossima) si neutralizza il liquido con una corrente di anidride carbonica, per il che precipita soltanto l'ossima, la quale cristallizzata dall'alcool si presenta in grossi prismi fusibili a 205°-209° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1083: N cc. 18,7 a 9° e 741,348 mm.
Trovato %: N 20,48.
Per $C_{10}H_9O_2N_3$ calc.: 20,68.

---

(1) " Gazz. Chim. Ital. „, *52*, I, 297 (1922).

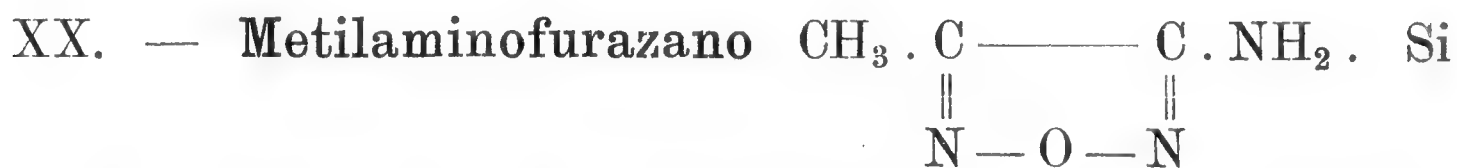
È molto solubile a caldo e poco a freddo in alcool ed in acetone; poco a caldo e pochissimo a freddo in benzene ed in cloroformio; poco solubile nell'etere; quasi insolubile nella ligroina.

Fatta bollire a lungo con acido cloridrico al 20 % fornisce aminometilfurazano.

Benzoilata con cloruro di benzoile in soluzione piridinica (1) si trasforma nel *benzoilderivato* $CH_3.C(:NOCOC_6H_5).(C_2N_2O).C_6H_5$ il quale cristallizza dall'alcool in aghetti allungati fusibili a 174°-175° senza decomposizione.

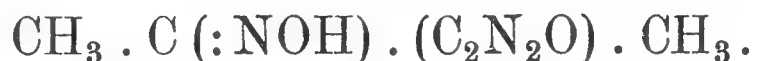
Sostanza gr. 0,1257: N cc. 14,4 a 9° e 741,348 mm.
Trovato %: N 13,58.
Per $C_{17}H_{13}O_3N_3$ calc.: 13,68.

È solubile a freddo in acetone, cloroformio, benzene, etere; discretamente solubile a caldo e poco a freddo in alcool; pochissimo solubile nella ligroina bollente.

Il benzoilderivato dell'ossima del 3-acetil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo $CH_3 . C(:NOCOC_6H_5) . (C_2N_2O) . C_6H_5$, preparato come abbiamo detto ora, è identico in tutte le sue proprietà col composto che si ottiene direttamente dal dibenzoilderivato della metilaminogliossima $CH_3 . C(:NOCOC_6H_5) . C(:NOCOC_6H_5) . NH_2$ per eliminazione di una molecola di acqua a spese dell'aminogruppo e del benzoile vicini mediante anidride acetica bollente in presenza di acetato sodico fuso, ed idrolizzato per riscaldamento con idrossido di sodio al 20 % ed un po' di alcool dà l'ossima del 3-acetil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo, il che è una conferma della struttura che gli abbiamo attribuita.

XX. — **Metilaminofurazano**
$$\begin{array}{ccc} CH_3 . C & \text{———} & C . NH_2 \\ \| & & \| \\ N & —O— & N \end{array}$$
Si forma, come già abbiamo detto, per azione dell'acqua (riscaldamento con acido cloridrico diluito) sull'ossima del 3-acetil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo $CH_3 . C(:NOH) . (C_2N_2O) . CH_3$ e sulla

(1) Questa ossima non si scioglie che nell'idrossido di sodio diluito, e dà con quello concentrato un sale sodico poco solubile.

ossima del 3-acetil-5-fenil-furo--(a b_1)-diazolo $CH_3 . C (: NOH) . (C_2N_2O) . C_6H_5$; e si prepara nel miglior modo riscaldando alla ebollizione per alcune ore la metilaminogliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso, versando in acqua il prodotto della reazione, neutralizzando con carbonato sodico ed estraendo ripetutamente con molto etere il liquido in cui può essere sospesa, e per la maggior parte è disciolta, l'ossima del 3-acetil-5-metil-furo-(a b_1)-diazolo

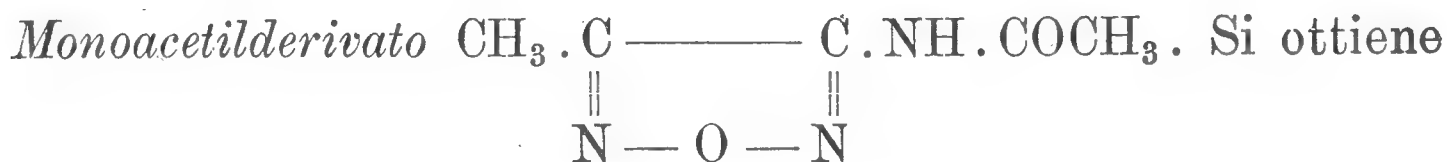
$$CH_3 . C (: NOH) . (C_2N_2O) . CH_3 .$$

Eliminato il solvente si fa bollire per mezz'ora il residuo con acido cloridrico al 20 %, ed in ultimo si scalda su bagno d'acqua bollente fino ad eliminazione completa dell'acido cloridrico e dell'acido acetico, cioè fino a che, col raffreddamento, il metilaminofurazano solidifichi.

Cristallizzato dall'acqua bollente e decolorato con carbone animale si presenta in grossi prismi bianchi fusibili a 72°-73° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,2905: CO_2 gr. 0,3869, H_2O gr. 0,1405.
Sostanza gr. 0,1114: N cc. 43,2 a 24° e 724,873 mm.

Trovato %:	C 36,32	H 5,37	N 42,70.
Per $C_3H_5ON_3$ calc.:	36,33	5,05	42,42.

È molto solubile nell'acqua a caldo e notevolmente anche a freddo; solubile a freddo in alcool, etere, acetone; molto solubile a caldo e meno a freddo in benzene ed acetone; poco solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in ligroina, dalla quale cristallizza in laminette splendenti.

Non ha odore; non è volatile col vapor d'acqua; riscaldato con idrossido di sodio o con acido cloridrico, anche concentrati, non subisce alcuna alterazione.

Monoacetilderivato $CH_3 . C$ ——— $C . NH . COCH_3$ (C = N — O — N = C). Si ottiene acetilando con anidride acetica, in presenza di acetato sodico fuso, il metilaminofurazano. Cristallizzato dal benzene costituisce laminette splendenti fusibili a 115°-116° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1144: N cc. 31,2 a 24° e 723,273 mm.
Trovato %: N 29,96.
Per $C_5H_7O_2N_3$ calc.: 29,78.

È molto solubile nell'acqua a caldo e discretamente anche a freddo; solubile a freddo in alcool, acetone, cloroformio; poco solubile in etere; discretamente solubile a caldo e poco a freddo in benzene; pochissimo solubile nella ligroina bollente e quasi insolubile a freddo.

Si idrolizza con facilità per riscaldamento con acido cloridrico diluito.

Benzilidenderivato $C_6H_5 . CH [NH(C_2N_2O)CH_3]_2$. Si separa dopo breve tempo per trattamento della soluzione acquosa del metilaminofurazano con benzaldeide e con qualche goccia di idrossido di potassio. Cristallizza dall'acetone per diluizione con acqua in aghi appiattiti fusibili a 155°-156° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,0947: N cc. 23,7 a 12° e 746,582 mm.
Trovato %: N 29,52.
Per $C_{13}H_{14}O_2N_6$ calc.: 29,37.

È solubile a freddo in alcool, acetone, etere; molto a caldo e poco a freddo in cloroformio; poco a caldo e pochissimo a freddo in benzene; quasi insolubile anche a caldo in ligroina.

Riscaldato con acido cloridrico diluito si idrolizza facilmente; resiste invece all'azione delle basi.

Cinnamilidenderivato $C_6H_5 . CH : CH . CH : N (C_2N_2O) CH_3$. Si forma mescolando in soluzione alcoolica il metilaminofurazano con aldeide cinnamica. Precipitato, dopo riposo, per diluizione con acqua e cristallizzato dall'alcool costituisce laminette paglierine fusibili a 126° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1303: N cc. 22,3 a 12° e 725,957 mm.
Trovato %: N 19,67.
Per $C_{12}H_{11}ON_3$ calc.: 19,71.

È solubile a freddo in etere, acetone, cloroformio e benzene; molto solubile a caldo e poco a freddo in alcool; poco a caldo e pochissimo a freddo in ligroina.

Riscaldato con acido solforico diluito s'idrolizza rapidamente.

Azometilfurazano $CH_3(C_2N_2O)N:N(C_2N_2O)CH_3$. Si prepara deidrogenando il metilaminofurazano, e nel miglior modo aggiungendo poco a poco permanganato potassico in polvere alla sua soluzione in acido solforico al 30 $^0/_0$ riscaldata a 60°-70°. Purificato per distillazione col vapore costituisce laminette aranciate fusibili a 107° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,0724: N cc. 28,3 a 24° e 723,273 mm.
Trovato $^0/_0$: N 42,94.
Per $C_6H_6O_2N_6$ calc.: 43,29.

È insolubile nell'acqua; solubile a freddo nei comuni solventi organici; facilmente volatile col vapore.

Si forma anche per riscaldamento con acido nitrico del metilaminofurazano, il quale però, in dette condizioni, viene per la maggior parte decomposto in anidride carbonica, acido cianidrico, ammoniaca, ecc.

Idrazometilfurazano $CH_3(C_2N_2O)NH.NH(C_2N_2O)CH_3$. Si ottiene idrogenando l'azometilfurazano con fenilidrazina in soluzione eterea, per il che si separa quasi subito dal liquido diventato incoloro dopo lo sviluppo di azoto. Cristallizza dall'alcool leggermente acquoso in prismetti bianchi contenenti una molecola di acqua di cristallizzazione la quale non si elimina alla temperatura ordinaria neppure in essiccatore nel vuoto, ma soltanto per riscaldamento a 90°-95°. Sia idrato che anidro fonde a 118°-119° con leggera decomposizione.

Sostanza gr. 0,1806: H_2O gr. 0,0156.
Sostanza gr. 0,1082: N cc. 36 a 9° e 746,026 mm.
Trovato $^0/_0$: H_2O 8,63 N 39,71.
Per $C_6H_8O_2N_6.H_2O$ calc.: 8,41 39,70.

È alquanto solubile nell'acqua bollente e quasi insolubile in quella fredda; solubile a freddo in alcool ed in acetone; discretamente solubile a caldo e pochissimo a freddo in benzene; pochissimo solubile a caldo e quasi nulla a freddo in etere, cloroformio e ligroina.

Sospeso in acido solforico e trattato con permanganato potassico si deidrogena con facilità nell'azometilfurazano, il

quale risulta anche introducendo l'idrazometilfurazano nella soluzione acquosa degli idrossidi dei metalli alcalini o di ammonio. In questo caso si ha dapprima un liquido intensamente colorato in rosso-vinoso, dal quale si separa immediatamente l'azocomposto, mentre la soluzione si decolora poco a poco.

Azoiminometilfurazano $CH_3 (C_2N_2O) N : N . NH (C_2N_2O) CH_3$. Si separa istantaneamente facendo gocciolare una soluzione acquosa diluita di nitrito sodico nella soluzione di metilaminofurazano in acido solforico o cloridrico al 20 $^0/_0$ raffreddata in ghiaccio. Cristallizza dall'alcool acquoso in laminette paglierine contenenti acqua di cristallizzazione, le quali sfioriscono lentamente alla temperatura ordinaria diventando bianche ed opache. Riscaldato per breve tempo a 100° diventa anidro ed allora fonde a 114° senza decomposizione, alterandosi qualche grado più alto.

Sostanza gr. 0,0809: N cc. 32,7 a 11° e 731,693 mm.
Trovato $^0/_0$: N 46,98.
Per $C_6H_7O_2N_7$ calc.: 46,88.

Anidro è solubile a freddo in alcool, etere, acetone; discretamente solubile a caldo in ligroina, cloroformio e benzene.

La formazione di questo azoiminocomposto costituisce una reazione sensibilissima per il riconoscimento del metilaminofurazano.

Sale di argento $CH_3 (C_2N_2O) N : N . NAg (C_2N_2O) CH_3$. Si separa trattando la soluzione alcoolica dell'azoiminometilfurazano con soluzione alcoolica di nitrato di argento e costituisce una polvere bianca inalterabile alla luce; insolubile nei comuni solventi organici; solubile nell'idrossido di ammonio e riprecipitabile con acido nitrico diluito.

Sostanza gr. 0,3458: Ag gr. 0,1188.
Trovato $^0/_0$: Ag 34,35.
Per $C_6H_6O_2N_7$ calc.: 34,15.

Riscaldato esplode violentemente.

Acetilderivato $CH_3 (C_2N_2O) N : N . N (COCH_3) (C_2N_2O) CH_3$. Si forma acetilando a freddo l'azoiminometilfurazano con ani-

dride acetica in presenza di acetato sodico fuso e cristallizza dall'alcool acquoso in laminette bianche fusibili a 72° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1035: N cc. 35,3 a 12° e 725,957 mm.
Trovato %: N 39,19.
Per $C_8H_9O_3N_7$ calc.: 39,04.

È molto solubile a caldo e discretamente anche a freddo nell'alcool; solubile a freddo in benzene ed in cloroformio; poco solubile in etere, quasi insolubile nella ligroina.

Torino - Istituto Chimico della R. Università.
Gennaio 1923.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LVIII, Disp. 7ª, 1922-1923

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1923

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Febbraio 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Herlitzka e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza i Soci D'Ovidio e Segre.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio Ponzio presenta le Note VIII e IX delle sue *Ricerche sulle diossime,* che vengono accolte per la inserzione negli *Atti.*

Il Socio Parona, una Nota del Socio corrispondente Michele Gortani, *Il preteso carreggiamento delle Dinaridi sulle Alpi.*

L'inserzione di questa Nota negli *Atti* viene approvata dalla Classe, salvo a prendere decisioni in merito al diritto dei Soci corrispondenti di presentare direttamente lavori, senza cioè l'intermediario di un Socio effettivo.

LETTURE

Ricerche sulle diossime

Nota VIII del Socio nazionale residente GIACOMO PONZIO
e del dott. LODOVICO AVOGADRO

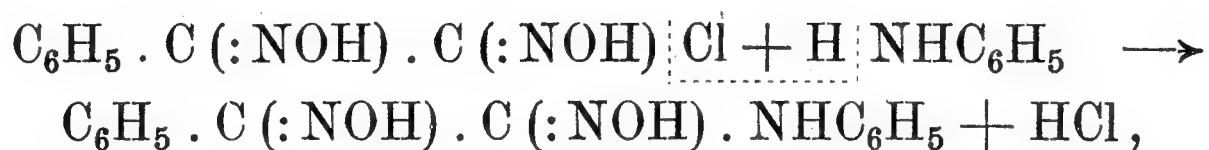
Per azione dell'anilina sul perossido dell'α-fenilgliossima (fenilfurossano) $C_6H_5(C_2N_2O_2H)$ in soluzione benzenica, Wieland e Semper [1] ottennero una sostanza fusibile a circa 180° con imbrunimento e decomposizione, da essi ritenuta, per il suo modo di formazione e per l'intensa colorazione che dà con cloruro ferrico, come l'amidossima sostituita $C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).NHC_6H_5$ e della quale non si occuparono ulteriormente.

Avendo noi già dimostrato nella Nota VI [2] l'esistenza di due forme della fenilaminogliossima $C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).NH_2$, abbiamo pensato che lo stesso fatto dovesse verificarsi per la fenilaminofenilgliossima $C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).NHC_6H_5$ (l'amidossima sostituita dei suddetti Autori), e l'esperienza ha pienamente confermato le nostre previsioni.

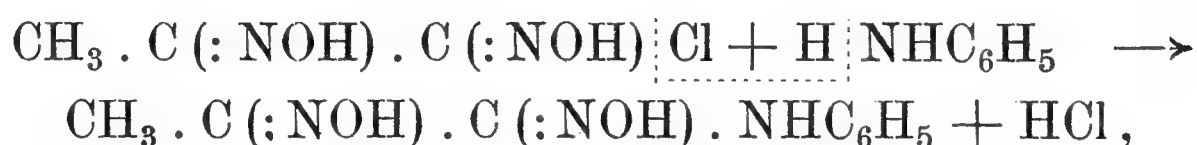
Le due fenilaminofenilgliossime da noi preparate, e che descriviamo in questa Nota, stanno fra di loro nello stesso rapporto delle due fenilaminogliossime: per conseguenza distingueremo col prefisso α quella che non dà sali complessi e col prefisso β quella che risulta dalla forma α per riscaldamento con acido acetico diluito e che dà col nichel, col cobalto e col rame *sali complessi* derivanti da due molecole di gliossima per sostituzione di due atomi di idrogeno ossimico, uno per ciascuna molecola, con un atomo bivalente di metallo.

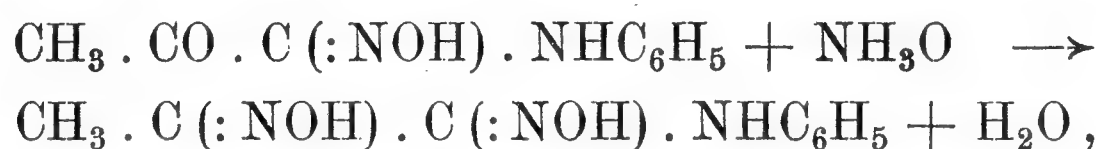
(1) *Ann.* 358, 63 (1907).
(2) “ Gazz. Chim. Ital. „, *53*, I, 25 (1923).

La β-fenilaminofenigliossima risulta pure per azione dell'anilina sulla fenilclorogliossima

$$C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) \vdots Cl + H \vdots NHC_6H_5 \longrightarrow$$
$$C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5 + HCl ,$$

e, come l'α-fenilaminofenilgliossima, ha netta funzione basica. Tutte e due danno infatti cloridrati assai stabili, pur essendo anche solubili nelle basi forti; ma soltanto la forma β, e non la forma α, possiede la caratteristica proprietà, da noi trovata (1), di intaccare, in soluzione acquosa, alcuni metalli dell'VIII gruppo trasformandosi nei corrispondenti *sali complessi*, precisamente come tutte le gliossime che Tschugaeff (2) considera forme *sin* e che noi chiamiamo forme β.

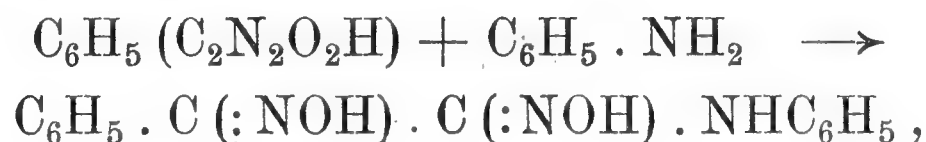
Con una reazione analoga a quella su accennata, cioè per azione dell'anilina sulla metilclorogliossima

$$CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) \vdots Cl + H \vdots NHC_6H_5 \longrightarrow$$
$$CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5 + HCl ,$$

ed inoltre per azione dell'idrossilamina sull'acetilfenilisuretina

$$CH_3 . CO . C(:NOH) . NHC_6H_5 + NH_3O \longrightarrow$$
$$CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5 + H_2O ,$$

abbiamo ottenuto la forma β anche della metilaminofenilgliossima $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5$. Questa ha pure comportamento di base forte, ma è instabile; dà però un sale complesso di nichel, del quale diremo più avanti.

XXI. — **α-fenilaminofenilgliossima**, p. f. 188°. Si ottiene dal perossido dell'α-fenilgliossima (fenilfurossano), ma se, come consigliano Wieland e Semper (loc. cit.), si fa agire l'anilina sul perossido sospeso in benzene, non ha luogo, come ritennero detti Autori, soltanto la reazione

$$C_6H_5(C_2N_2O_2H) + C_6H_5 . NH_2 \longrightarrow$$
$$C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5 ,$$

---

(1) " Gazz. Chim. Ital. ", *51*, II, 213 (1921).

(2) " Zeit. anorg. allgem. Chem. ", *46*, 148 (1905); *Ber. 41*, 1678 (1908) " J. Chem. Soc. ", *105*, 2187 (1914).

poichè contemporaneamente si origina una sostanza bianca, fusibile a 202°, della quale intendiamo occuparci in altra occasione.

Ad ogni modo, operando in tali condizioni, ed agitando a freddo la miscela, si ottiene quasi subito un liquido limpido, dal quale col riposo si separano poco a poco cristalli. Questi, raccolti assieme a quelli che si ottengono per evaporazione all'aria del filtrato benzenico, si trattano con acido cloridrico diluito, ove soltanto la α-fenilaminofenilgliossima si scioglie, mentre la sostanza fusibile a 202° rimane insolubile. Dalla soluzione cloridrica, dopo filtrazione, si precipita la gliossima per aggiunta di acetato sodico cristallizzato e la si purifica ridisciogliendola e riprecipitandola più volte collo stesso procedimento fino a che si abbia un prodotto il quale sospeso in acqua e trattato goccia a goccia con acido cloridrico diluito si sciolga completamente.

Molto più conveniente per la preparazione dell'α-fenilaminofenilgliossima è il seguente procedimento, mediante il quale la sostanza fusibile a 202° non si forma affatto. Esso consiste nell'agitare il perossido della α-fenilgliossima (fenilfurossano), finamente polverizzato, colla soluzione acquosa di un po' più della quantità equimolecolare di anilina: in tal modo il perossido si trasforma poco a poco, ma quantitativamente, in *α-fenilaminofenilgliossima* $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5$ la quale, raccolta e lavata con acqua, si ha subito perfettamente pura in laminette bianche fusibili a 187°-188° senza decomposizione e senza imbrunimento ed alterandosi qualche grado più alto.

Sostanza gr. 0,1595: N cc. 24,1 a 24° e 731,314 mm.
Trovato %: N 16,79.
Per $C_{14}H_{13}O_2N_3$ calc.: 16,47.

Dopo cristallizzazione sia dall'acqua, che dall'alcool acquoso, che dal cloroformio, il punto di fusione da noi trovato, e che è notevolmente superiore a quello dato da Wieland e Semper (loc. cit.), non varia.

La α-fenilaminofenilgliossima è quasi insolubile nell'acqua fredda e pochissimo in quella bollente; solubile a freddo, in alcool, etere, acetone; poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in cloroformio ed in benzene; insolubile nella ligroina.

Si scioglie negli idrossidi dei metalli alcalini e riprecipita per trattamento con acido acetico; si scioglie pure negli acidi cloridrico, solforico e nitrico diluiti; dai due primi riprecipita per aggiunta di acetato sodico, mentre è alterata rapidamente dall'ultimo.

La sua soluzione acquosa trattata con cloruro ferrico dà una colorazione intensamente azzurra.

Sciolta in alcool acquoso e riscaldata con acido acetico diluito si isomerizza lentamente in β-fenilaminofenilgliossima.

Cloridrato $C_6H_5 . C (: NOH) . C (: NOH) . NHC_6H_5 . HCl$. Si ottiene sciogliendo la α-fenilaminofenilgliossima in acido cloridrico al 20 % bollente e cristallizza col raffreddamento in lunghi aghi bianchi fusibili a 208°-209° con viva decomposizione ed imbrunendo qualche grado prima.

Sostanza gr. 0,4334 richiesero per la neutralizzazione cc. 15,3 di NaOH $\frac{N}{10}$.

Trovato %: HCl 12,88.

Per $C_{14}H_{13}O_2N_3 . HCl$ calc.: 12,50.

È solubile nell'alcool; insolubile nell'etere.

È discretamente stabile all'aria, rapidamente idrolizzato a freddo dall'acqua ridando la α-gliossima.

Diacetildérivato $C_6H_5 . C (: NOCOCH_3) . C (: NOCOCH_3) . NHC_6H_5$. Si ottiene acetilando a freddo la α-fenilaminofenilgliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso; cristallizzato dall'alcool si presenta in aghetti bianchi fusibili a 179° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1274: N cc. 14,1 a 24° e 726,424 mm.

Per $C_{18}H_{17}O_4N_3$ calc. %: N 12,38.

trov. 12,21.

È insolubile in acqua; discretamente solubile a caldo e pochissimo a freddo in alcool ed in benzene; molto a caldo e poco a freddo in acetone; solubile in cloroformio; pochissimo solubile in etere; insolubile in ligroina.

Sospeso in idrossido di sodio al 20 $^0/_0$ si trasforma lentamente per la maggior parte in α-fenilaminofenilgliossima (la quale rimane disciolta e si può ricuperare neutralizzando il liquido basico con anidride carbonica) ed in piccola parte in fenilaminofenilfurazano.

Dibenzoilderivato $C_6H_5 . C (: NOCOC_6H_5) . C (: NOCOC_6H_5) . NHC_6H_5$. Si prepara benzoilando la α-fenilaminofenilgliossima sciolta in idrossido di sodio; cristallizzato dall'alcool costituisce piccoli cristalli fusibili a 201° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1614: N cc. 12,9 a 12° e 733,257 mm.
Trovato $^0/_0$: N 9,26.
Per $C_{28}H_{21}O_4N_3$ calc.: 9,07.

È discretamente solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool; pochissimo solubile in cloroformio, benzene, acetone; insolubile nell'etere e nella ligroina.

Riscaldato con idrossido di sodio al 20 $^0/_0$ non si altera sensibilmente.

Fenilaminofenilfurazano $C_6H_5.C$ —— $C . NHC_6H_5$. Si forma

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5.C & \text{———} & C.NHC_6H_5 \\ \| & & \| \\ N & -O- & N \end{array}$$

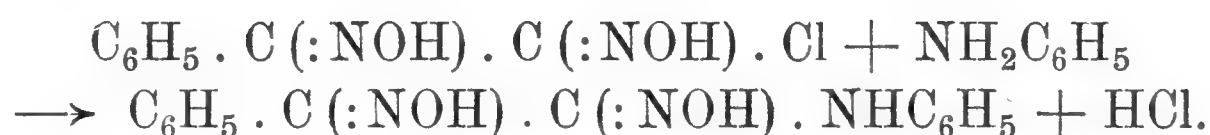
nel modo detto poc'anzi dal diacetilderivato della α-fenilaminofenilgliossima, ma conviene prepararlo facendo bollire quest'ultimo con idrossido al 20 $^0/_0$, per il che si separa dal liquido col raffreddamento. Cristallizzato dall'alcool si presenta in aghi bianchi splendenti fusibili a 158° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1018: N cc. 15,5 a 12° e 732,700 mm.
Trovato $^0/_0$: N 17,66.
Per $C_{14}H_{11}ON_3$ calc.: 17,72.

È insolubile nell'acqua; solubile a freddo in etere ed in acetone; discretamente solubile a caldo e poco a freddo in alcool, cloroformio, benzene; poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in ligroina.

Si scioglie nell'acido solforico concentrato e riprecipita per diluizione con acqua; si scioglie pure alquanto nell'idrossido di sodio e nell'acido cloridrico bollente e cristallizza inalterato con raffreddamento.

XXII. — **β-fenilaminofenilgliossima** $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5$, p. f. 124°. Risulta lentamente per isomerizzazione della α-fenilaminofenilgliossima riscaldando la soluzione acquoso-alcoolica di quest'ultima con acido acetico diluito; ma conviene prepararla facendo agire l'anilina sulla fenilclorogliossima

$$C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . Cl + NH_2C_6H_5$$
$$\longrightarrow C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5 + HCl.$$

A tale scopo si fa bollire per qualche tempo la soluzione in alcool assoluto di pesi eguali delle due sostanze, quindi si diluisce con acqua, si acidifica leggermente con acido acetico e si tratta con acetato di nichel al 20 %, per il che precipita il sale complesso $(C_{14}H_{12}O_2N_3)_2Ni$, il quale si lava con alcool bollente e si scalda con un piccolo eccesso di acido cloridrico al 20 %. Dalla soluzione risultante cristallizza col raffreddamento il cloridrato della β-gliossima, dal quale si mette finalmente in libertà la base per mezzo dell'idrossido di ammonio.

La β-*fenilaminofenilgliossima* $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5$ cristallizzata dall'acqua o dall'alcool acquoso si presenta in piccolissimi aghetti bianchi fusibili a 124° con leggera decomposizione e rammollendo alcuni gradi prima.

Sostanza gr. 0,1426: N cc. 21 a 24° e 730,992 mm.
Trovato %: N 16,35.
Per $C_{14}H_{13}O_2N_3$ calc.: 16,47.

È un po' solubile nell'acqua bollente e quasi insolubile in quella fredda; solubile a freddo in alcool, acetone, etere; molto solubile a caldo e poco a freddo in benzene e cloroformio; quasi insolubile anche a caldo in ligroina.

Si scioglie negli idrossidi dei metalli alcalini e riprecipita inalterata per trattamento con anidride carbonica o con acido acetico diluito; forma coll'acido cloridrico un cloridrato e coll'acido nitrico un nitrato poco solubili in acqua, ma mentre il primo di questi sali è stabile, il secondo si altera rapidamente perchè la gliossima è facilmente decomposta dall'acido nitrico anche diluitissimo.

In soluzione acquosa intacca lentamente a freddo e rapidamente verso 100° il nichel compatto; intacca pure, ma soltanto

a caldo, il rame ed il cobalto, trasformandosi nei rispettivi sali complessi. Trattata con cloruro ferrico dà una colorazione verde azzurra intensa.

Cloridrato $C_6H_5 . C (: NOH) . C (: NOH) . NHC_6H_5 . HCl$. Si separa spontaneamente dopo qualche istante dalla soluzione della β-fenilaminofenilgliossima nell'acido cloridrico diluito; cristallizzato dall'acqua bollente acidulata con acido cloridrico si presenta in tavole rombiche, talora di notevoli dimensioni, fusibili a 210°-211° con decomposizione, imbrunendo qualche grado prima.

Sostanza gr. 0,1478 richiesero per la neutralizzazione cc. 5,1 di NaOH $\frac{N}{10}$.

Trovato %: HCl 12,58.
Per $C_{14}H_{13}O_2N_3 . HCl$ calc.: 12,50.

È solubile nell'alcool; insolubile nell'etere.

È abbastanza stabile all'aria, facilmente idrolizzato dall'acqua a caldo.

Sale di nichel $(C_{14}H_{12}O_2N_3)_2Ni . 2H_2O$. Risulta, come abbiamo già accennato, per azione diretta della β-fenilaminofenilgliossima in soluzione acquosa sul metallo; si prepara trattando con acetato di nichel la diossima sciolta in acido acetico diluito. Cristallizzato dal cloroformio si presenta in prismetti rosso-scuri, ovvero in finissime lamine setacee di colore caffè-chiaro contenenti due molecole di acqua di cristallizzazione che perdono a 100°. Fonde, con decomposizione profonda, a 268°.

Sostanza gr. 0,0593; perdita di peso a 100° gr. 0,0037; $NiSO_4$ gr. 0,0057.

	H_2O	Ni
Trovato %:	6,23	9,59.
Per $C_{28}H_{24}O_4N_6Ni . 2H_2O$ calc.:	5,97	9,73.

È insolubile nell'acqua; poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in cloroformio; quasi insolubile negli altri comuni solventi organici. È facilmente decomposto dagli acidi minerali diluiti; lentamente dall'acido acetico al 50 % e dall'idrossido di sodio al 20 %; non reagisce coll'idrossido di ammonio.

Diacetilderivato $C_6H_5.C(:NOCOCH_3).C(:NOCOCH_3).NHC_6H_5$. Si ottiene acetilando a freddo la β-fenilaminofenilgliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso, e cristallizza dall'alcool in aghi bianchi raggruppati, fusibili a 150° senza decomposizione, rammollendo qualche grado prima.

Sostanza gr. 0,1347: N cc. 14,8 a 24° e 731,314 mm.
Trovato $^0/_0$: N 12,20.
Per $C_{18}H_{17}O_4N_3$ calc.: 12,38.

È insolubile nell'acqua; poco solubile in etere; solubile a freddo in cloroformio ed in acetone; molto solubile a caldo e poco a freddo in alcool; poco a caldo e pochissimo a freddo in benzene; quasi insolubile anche a caldo in ligroina.

XXIII. — **Metilaminofenilgliossima** $CH_3.C(:NOH).C(:NOH).NHC_6H_3$. Risulta, come già abbiamo detto, per azione dell'anilina sulla metilclorogliossima $CH_3 . C (:NOH) . C (:NOH) . Cl + C_6H_5NH_2 \longrightarrow CH_3 . C (: NOH) . C (: NOH) . NHC_6H_5 + HCl$ e dell'idrossilamina sull'acetilfenilisuretina $CH_3 . CO . C (: NOH). NHC_6H_5 + NH_2OH \longrightarrow CH_3.C(:NOH).C(:NOH).NHC_6H_5 + H_2O$. Messa in libertà dal suo cloridrato si altera rapidamente: dobbiamo perciò limitarci a descrivere il sale complesso di nichel che due molecole di essa formano con un atomo di metallo.

Sale di nichel $(C_9H_{10}O_2N_3)_2Ni$:

a) dalla metilclorogliossima. Si scalda per qualche minuto su bagno d'acqua bollente una soluzione alcoolica di metilclorogliossima e di anilina, dopo riposo si diluisce con acqua, si acidifica leggermente con acido acetico diluito e si tratta con acetato di nichel;

b) dall'acetilfenilisuretina. Questo composto, preparato da noi molti anni fa [1] per azione dell'anilina sul cloroisonitrosoacetone $CH_3 . CO . C (: NOH) . Cl$ in soluzione eterea, si può anche ottenere mescolando le soluzioni alcooliche delle due sostanze e diluendo con acqua dopo riposo di qualche ora alla temperatura ordinaria. Cristallizzato dall'acqua, ove è poco solubile a caldo

---

[1] " Gazz. Chim. Ital. ", *37*, II, 70 (1907).

e pochissimo a freddo, si presenta in laminette splendenti fusibili a 119°.

Riscaldato per breve tempo in soluzione alcoolica, su bagno d'acqua bollente, colle quantità equimolecolari di cloridrato di idrossilamina e di carbonato sodico in soluzione acquosa, si trasforma in metilaminofenilgliossima, la quale si isola dal liquido per trattamento con acetato di nichel.

Il sale di nichel della metilaminofenilgliossima $(C_9H_{10}O_2N_3)_2Ni$ cristallizzato dall'alcool si presenta in laminette splendenti di color rosso vinoso, fusibili a 242° con decomposizione, imbrunendo qualche grado prima.

Sostanza gr. 0,1818: $NiSO_4$ gr. 0,0652.
Trovato %: Ni 13,60.
Per $C_{18}H_{20}O_4N_6Ni$ calc.: 13,62.

È poco solubile a caldo e pochissimo a freddo nell'alcool; discretamente a caldo e poco a freddo in benzene ed in acetone; solubile a freddo in cloroformio; insolubile in acqua, etere e ligroina.

Si scioglie nell'idrossido di sodio al 20 % con colorazione rosso-bruna; non nell'idrossido di ammonio. È decomposto a freddo dall'acido acetico al 50 %, resiste invece discretamente all'azione di quello diluito.

Trattato con acido cloridrico, fornisce il cloridrato della metilaminofenilgliossima $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5 . HCl$, il quale si separa, concentrando la soluzione, in laminette bianche. Da esso mediante l'idrossido di ammonio si può isolare la base, la quale è solida, ma si altera rapidamente.

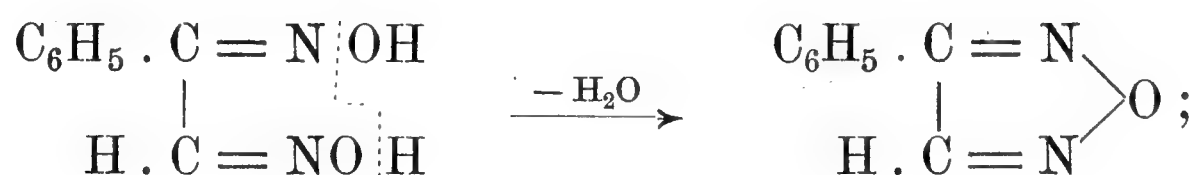
Torino – Istituto Chimico della R. Università.
Febbraio 1923.

Ricerche sulle diossime

Nota IX del Socio nazionale residente prof. GIACOMO PONZIO
e del dott. LODOVICO AVOGADRO

In questa Nota continuiamo ad occuparci della fenilgliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$ e riferiamo alcune nuove esperienze, le quali, dimostrando la grande differenza di comportamento delle sue due forme, costituiscono un'altra conferma della nostra opinione sull'inaccettabilità della teoria di Hantzsch e Werner sull'isomeria delle α-diossime.

Di notevole importanza ci sembrano specialmente i risultati che abbiamo ottenuto mediante l'impiego dell'acido solforico concentrato e del cloruro di fenildiazonio. Infatti, per azione del primo una molecola di α-fenilgliossima (p. f. 168°) perde una molecola di acqua trasformandosi in fenilfurazano

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C = N \vdots OH \\ \quad\;\; | \\ \;\; H . C = NO \vdots H \end{array} \xrightarrow{-H_2O} \begin{array}{l} C_6H_5 . C = N \\ \quad\;\; | \qquad\quad\;\; \rangle O ; \\ \;\; H . C = N \end{array}$$

mentre due molecole di β-fenilgliossima (p. f. 180°) perdono assieme una molecola di idrossilamina

$$2\, C_8H_8O_2N_2 \xrightarrow{-NH_3O} C_{16}H_{13}O_3N_3$$

e danno il composto $C_{16}H_{13}O_3N_3$ ottenuto per la prima volta da Müller e Pechmann [1] trattando con cloridrato di idrossil-

[1] *Ber.* *22*, 2560 (1889).

amina il fenilgliossale $C_6H_5 . CO . CHO$, poi da Scholl (1) riscaldando l'isonitrosoacetofenone $C_6H_5 . CO . C(:NOH) . H$ con un eccesso di cloridrato di idrossilamina, e da Korten e Scholl (2) per azione dell'idrossilamina sull'ω-dibromoacetofenone $C_6H_5 . CO . CHBr_2$, ed infine da Diels e Sasse (3) ossimando il prodotto risultante dall'anidrizzazione dell'isonitrosoacetofenone con acido cloridrico gassoso in soluzione eterea.

A detto composto Scholl (4) attribuisce la struttura di 1-fenil-3-ossiminobenzil-2-isossazolonossima

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C(:NOH) . CH \text{———} C:NOH \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \qquad\qquad | \\ \qquad\qquad\qquad\quad O — N = C . C_6H_5 \end{array} ;$$

secondo Diels e Sasse (loc. cit.) esso sarebbe invece l'ossima della 4-fenil-6-benzoil-4-idrossi-1,2,5-oxdiazina

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad C_6H_5\diagdown\diagup OH \\ \qquad\qquad\qquad N \text{———} C \text{———} CH \\ \qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad \| \\ C_6H_5 . C(:NOH) . C \text{———} O \text{———} N \end{array} ;$$

però il modo col quale noi l'abbiamo preparato e che si può schematicamente rappresentare così

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C(:NOH) . CH \qquad\qquad H\,C:NOH \\ \qquad\qquad\qquad\quad \| \qquad + \qquad\qquad | \\ \qquad\qquad\qquad NOH \qquad H\,ON = C . C_6H_5 \end{array}$$

$$\xrightarrow{-NH_3O} \begin{array}{l} C_6H_5 . C(:NOH) . CH \text{———} C:NOH \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \qquad\qquad | \\ \qquad\qquad\qquad\quad O — N = C . C_6H_5 \end{array}$$

si accorda colla prima formola di struttura, non potendosi ammettere, come si dovrebbe fare adottando la seconda, che l'acido solforico concentrato trasformi dapprima la β-fenilgliossima in

(1) *Ber. 23*, 3580 (1890).
(2) *Ber. 34*, 1909 (1901).
(3) *Ber. 40*, 4057 (1907).
(4) *Ber. 30*, 1312 (1897).

idrossilamina ed in isonitrosoacetofenone, che due molecole di questo si condensino poi, con eliminazione di una molecola di acqua, in 4-fenil-6-benzoil-4-idrossi-1,2,5-oxdiazina, la quale in ultimo venga ossimata dall'idrossilamina messa inizialmente in libertà.

In quanto al comportamento verso il cloruro di fenildiazonio abbiamo trovato che ambedue le diossime del fenilgliossale $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$ si copulano facilmente con esso, e che, per successiva eliminazione di azoto da un composto intermedio instabile, risultano in definitiva le diossime del difenildichetone $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . C_6H_5$ (benzildiossime)
$C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H \xrightarrow{C_6H_5N_2Cl} C_6H_5 . C(:NOH) .$
$C(:NOH) . N_2 . C_6H_5 \xrightarrow{-N_2} C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . C_6H_5$;
ma dalla α-fenilgliossima p. f. 168°, che non dà sale complesso di nichel, si ottiene la difenilgliossima fusibile a 207° che non dà sale complesso di nichel; mentre dalla β-fenilgliossima p. f. 180°, che dà sale complesso di nichel, si ottiene la difenilgliossima fusibile a 237° che dà sale complesso di nichel.

Avendo noi sempre distinto col prefisso α le forme delle gliossime che non danno sali complessi di nichel e col prefisso β quelle che li danno, dovremmo per conseguenza considerare come α-difenilgliossima la diossima del difenildichetone fusibile a 207° (detta comunemente β-benzildiossima), e come β-difenilgliossima la diossima del difenildichetone fusibile a 237° (detta comunemente α-benzildiossima). Ma quello che a noi interessa, e che ha una grande importanza per la tesi da noi sostenuta, si è che le due forme delle difenilgliossime risultanti nella reazione suaccennata stanno fra di loro precisamente nello stesso rapporto delle due fenilgliossime dalle quali si parte, nel senso che, come diremo più avanti, la difenilgliossima fusibile a 237° si forma per isomerizzazione della difenilgliossima fusibile a 207° nello stesso modo delle altre nostre β-gliossime dalle α, cioè per riscaldamento con acido acetico diluito. Ora, siccome riteniamo di aver dimostrato nella Nota VI [1] che le due fenilgliossime $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$ non sono isomeri geometrici, ci crediamo autorizzati di concludere che neppure le

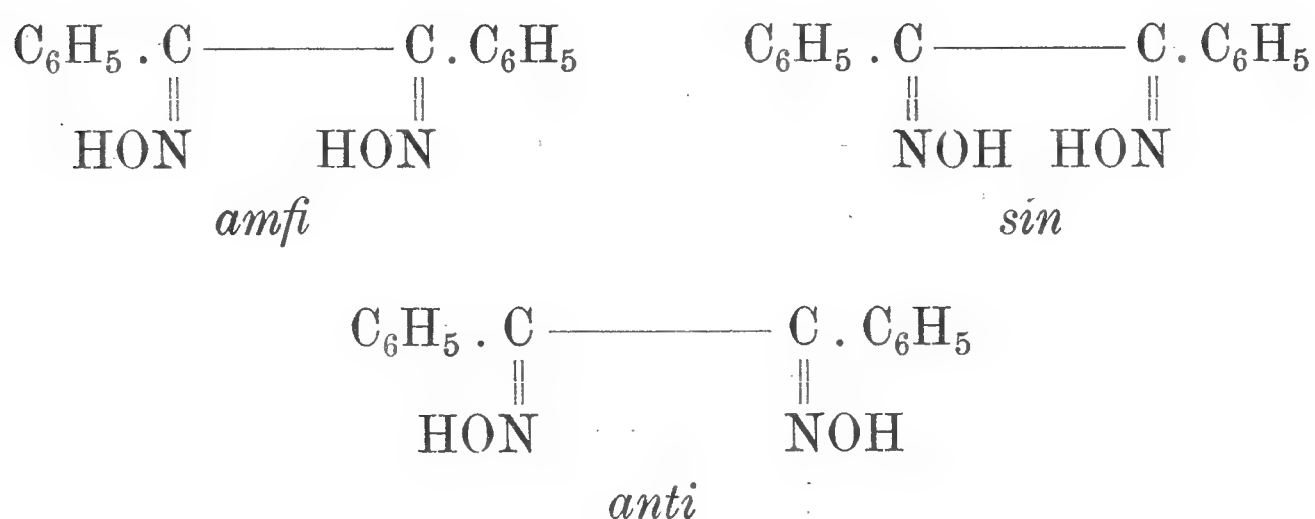
---

[1] " Gazz. Chim. Ital. „, *53*, I, 25 (1923).

due difenilgliossime $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . C_6H_5$, fusibili rispettivamente a 207° ed a 237°, sono isomeri di tale natura, e che la teoria di Hantzsch e Werner, la quale fu proposta essenzialmente per spiegare l'esistenza di tre diossime del difenildichetone (benzildiossime), non è valida neppure per queste.

D'altra parte a screditare completamente detta teoria basterebbe, a nostro parere, il fatto che dai numerosissimi autori i quali si occuparono della difenilgliossima fusibile a 237° e che dà sale complesso di nichel (α-benzildiossima), sono state, una dopo l'altra, ed ogni volta per ragioni ritenute inoppugnabili, attribuite le tre diverse configurazioni

$$\begin{array}{cc} C_6H_5 . C \text{———} C . C_6H_5 & C_6H_5 . C \text{———} C . C_6H_5 \\ \quad \| \qquad\qquad \| & \quad \| \qquad\qquad \| \\ HON \qquad HON & NOH \quad HON \\ \textit{amfi} & \textit{sin} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C_6H_5 . C \text{———} C . C_6H_5 \\ \quad \| \qquad\qquad \| \\ HON \qquad NOH \\ \textit{anti} \end{array}$$

cioè tutte le possibili configurazioni che il concetto dell'isomeria geometrica lascia prevedere, e come, di conseguenza, siano state successivamente cambiate le configurazioni delle altre due benzildiossime fusibili a 207° ed a 163°.

Poichè le due fenilgliossime si possono, col procedimento da noi descritto nella Nota VI (loc. cit.), ottenere senza difficoltà allo stato di purezza, è probabile che, impiegando sali di diazonio sostituiti, si riuscirà con esse a preparare le due forme delle diossime di difenildichetoni monosostituiti $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . C_6H_4R$. Inoltre, siccome esperienze preliminari da tempo iniziate ci hanno già permesso di isolare le due forme delle fenilgliossime $RC_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$, dovrà esser possibile stabilire anche un metodo semplice ed elegante di sintesi delle difenilgliossime bisostituite $R . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . C_6H_4R$ ed $R . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . C_6H_3R_1$. L'argomento ha notevole importanza per lo studio che stiamo facendo sui perossidi delle gliossime, e perciò ci riserviamo di trattarlo prossimamente.

XXIV. — **Fenilgliossime** $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$.

Azione dell'anidride propionica. In accordo a quanto asserisce Russanow (1), trattando con anidride acetica sia l'una che l'altra forma della fenilgliossima abbiamo ottenuto il medesimo diacetilderivato $C_6H_5 . C(:NOCOCH_3) . C(:NOCOCH_3) . H$, il quale cristallizzato dall'alcool acquoso si presenta in aghetti fusibili a 92°. Siccome, secondo le nostre osservazioni, dalla α-fenilgliossima, e non dalla β, risulta contemporaneamente anche fenilfurazano $C_6H_5 . C \text{———} C . H$ (facilmente eliminabile per

$$\begin{array}{ccccc} C_6H_5 . C & \text{———} & C . H \\ \| & & \| \\ N & — O — & N \end{array}$$

trattamento con etere del prodotto della reazione versato in acqua e neutralizzato con carbonato sodico), e poichè, come diremo più avanti, l'α-fenilgliossima non è benzoilabile, ci sembra logico ammettere che detto diacetilderivato provenga dall'acetilazione della forma β, nella quale una parte della forma α, che sfugge all'azione anidrizzante dell'anidride acetica (cioè che non è trasformata in furazano per la reazione $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H \longrightarrow H_2O + C_6H_5(C_2N_2O)H$), viene isomerizzata.

L'anidride propionica, la quale ha proprietà disidratanti non molto energiche, dà invece origine colle due forme della fenilgliossima a due differenti dipropionilderivati. Infatti, scaldando la forma α di quest'ultima con un piccolo eccesso di anidride propionica e trattando, dopo riposo, con acqua e carbonato sodico, si ottiene il *dipropionilderivato della α-fenilgliossima* $C_6H_5 . C(:NOCOCH_2CH_3) . C(:NOCOCH_2CH_3) . H$, il quale cristallizza dall'alcool in prismetti fusibili a 75° senza decomposizione.

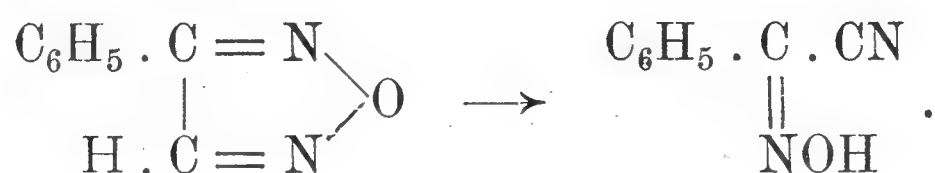
Sostanza gr. 0,1584: N cc. 13,5 a 10° e 738,733 mm.
Trovato %: N 10,03.
Per $C_{14}H_{16}O_4N_2$ calc.: 10,14.

È poco solubile in etere; molto solubile a caldo e poco a freddo in alcool; poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in ligroina; solubile a freddo in acetone, benzene e cloroformio.

Trattato con idrossido di sodio al 20 % vi si scioglie lentamente trasformandosi in fenilfurazano $C_6H_5(C_2N_2O)H$ e nel-

(1) *Ber.* 24, 3502 (1891).

l'ossima del cianuro di benzoile $C_6H_5 . C (: NOH) . CN$, la quale, come è noto, risulta dal primo per una isomerizzazione provocata dalle basi forti

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C = N \\ \quad | \qquad\quad > O \\ H . C = N \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} C_6H_5 . C . CN \\ \qquad\quad \| \\ \qquad NOH \end{array} .$$

Propionilando nel modo detto sopra la β-fenilgliossima se ne ottiene il *dipropionilderivato* $C_6H_5 . C (: NOCOCH_2CH_3) . C (: NOCOCH_2CH_3) . H$, il quale cristallizza dall'alcool in laminette fusibili ad 89°-90° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1898: N cc. 16,4 a 10° e 739,283 mm.
Trovato %: N 10,18.
Per $C_{14}H_{16}O_4N_2$ calc.: 10,14.

È solubile a freddo in acetone, benzene, cloroformio; poco solubile in etere; molto solubile a caldo e poco a freddo in alcool; poco solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in ligroina.

Trattato con idrossido di sodio al 20 % si idrolizza ridando la β-fenilgliossima da cui deriva.

Azione del cloruro di benzoile. La benzoilazione dell'α-fenilgliossima non è possibile nè in soluzione in idrossido di sodio nè in soluzione piridinica. Operando con quest'ultimo solvente abbiamo ottenuto il *benzoilderivato dell'ossima del cianuro di benzoile* $C_6H_5 . C (: NOCOC_6H_5) . CN$, la cui formazione è facile a spiegarsi quando si consideri la tendenza che tale gliossima ha di anidrizzarsi in fenilfurazano $C_6H_5 (C_2N_2O) H$ [1] isomerizzabile a sua volta nell'ossima del cianuro di benzoile $C_6H_5 . C (: NOH) . CN$. Detto benzoilderivato cristallizzato dall'acetone si presenta in aghetti splendenti fusibili a 139°-140° senza decomposizione conforme ai dati di Zimmermann [2], il quale lo aveva ottenuto per benzoilazione diretta della cianossima.

---

(1) Questo infatti risulta, assieme al benzoilderivato dell'ossima del cianuro di benzoile, se si fa agire il cloruro di benzoile sulla α-fenilgliossima sciolta nell'idrossido di sodio al 20 %.

(2) J. Prakt. Chem. (2), *66*, 363 (1902).

Sostanza gr. 0,1822: N cc. 17,2 a 9° e 736,751 mm.
Trovato %: N 11,13.
Per $C_{15}H_{10}N_2O_2$ calc.: 11,20.

È poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in alcool ed in ligroina; molto solubile a caldo e poco a freddo in acetone ed in benzene; poco solubile in etere; solubile a freddo in cloroformio.

Trattato a freddo con idrossido di sodio al 20 % vi si scioglie lentamente idrolizzandosi nell'ossima del cianuro di benzoile $C_6H_5 . C(:NOH) . CN$, la quale cristallizza dall'acqua in laminette bianche fusibili a 129° conforme ai dati di Meyer (1).

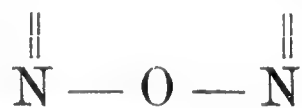
Benzoilando la β-fenilgliossima in soluzione piridinica se ne ottiene invece il *dibenzoilderivato* $C_6H_5 . C(:NOCOC_6H_5) . C(:NOCOC_6H_5)H$, il quale cristallizza dall'acetone in aghi appiattiti fusibili a 150° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1532: N cc. 9,6 a 9° e 748,876 mm.
Trovato %: N 7,48.
Per $C_{22}H_{16}O_4N_2$ calc.: 7,52.

È poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in alcool ed in ligroina; poco solubile in etere; molto solubile a caldo e poco a freddo in acetone; solubile a freddo in benzene ed in cloroformio.

Sospeso in idrossido di sodio al 20 % addizionato di un po' di alcool, si scioglie lentamente idrolizzandosi nella β-fenilgliossima da cui deriva.

Azione dell'acido solforico concentrato. Scaldando brevemente verso 100° l'α-fenilgliossima con acido solforico concentrato essa si trasforma in fenilfurazano $C_6H_5 . C$ —— CH, il quale, pre-

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 . C & \text{——} & CH \\ \| & & \| \\ N & — O — & N \end{array}$$

cipitato per diluizione con acqua, distillato col vapore e cristallizzato dall'alcool acquoso, costituisce prismi bianchi fusibili a 35°-36°, senza decomposizione, cioè ad una temperatura più elevata di quella riferita da Russanow (loc. cit.).

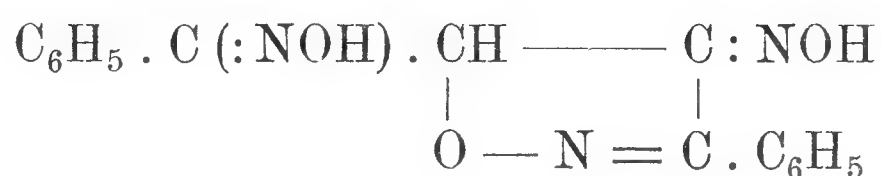
---

(1) *Ber. 21*, 1314 (1888).

Sostanza gr. 0,1062: N cc. 17 a 11° e 741,517 mm.
Trovato %: N 18,78.
Per $C_8H_6ON_2$ calc.: 19,17.

È solubile a freddo nei comuni solventi organici; alquanto solubile anche nell'acqua specialmente a caldo. Non distilla inalterato alla pressione ordinaria.

Nelle identiche condizioni, ma lentamente, l'acido solforico concentrato trasforma invece la β-fenilgliossima in 1-fenil-3-ossiminobenzil-2-isossazolonossima

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C(:NOH) . CH \text{———} C:NOH \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; | \qquad\qquad\;\; | \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; O — N = C . C_6H_5 \end{array}$$

la quale, diluendo con acqua, si separa dal liquido (in cui si riscontra idrossilamina) come una polvere giallognola. Cristallizzata dall'acido cloridrico diluito costituisce laminette bianche pennate fusibili a 218° con imbrunimento e decomposizione, ed è identica in tutte le sue proprietà col composto ottenuto da Scholl [1] per prolungata ebollizione dell'isonitrosoacetofenone con cloridrato di idrossilamina in soluzione acquosa.

Sostanza gr. 0,1071: N cc. 12,7 a 10° e 743,171 mm.
Trovato %: N 14,05.
Per $C_{16}H_{13}O_3N_3$ calc.: 14,23.

Facciamo notare come riscaldando verso 100° l'isonitrosoacetofenone con acido solforico concentrato si ottenga acido benzoico.

Azione del cloruro di fenildiazonio. Aggiungendo poco a poco alla soluzione raffreddata in ghiaccio della α-fenilgliossima in un eccesso di idrossido di sodio al 10 % una soluzione diluita di cloruro di fenildiazonio si ha dapprima un liquido limpido, poi si inizia un moderato sviluppo di azoto e la separazione di una resina rosso-bruna. Quando la reazione è completa, cioè dopo circa 12 ore, si filtra e si acidifica con acido acetico diluito, ed il precipitato risultante si purifica ridisciogliendolo in idrossido di sodio, riprecipitandolo con acido acetico e finalmente

[1] *Ber.* *23*, 3580 (1890).

cristallizzandolo dall'alcool acquoso. Si hanno in tal modo laminette bianche, contenenti alcool di cristallizzazione, le quali sfioriscono all'aria e fondono anidre a 207°-208° con decomposizione.

Sostanza gr. 0,1505: N cc. 15,2 a 10° e 739,283 mm.
Trovato %: N 11,90.
Per $C_{14}H_{12}O_2N_2$ calc.: 11,66.

Tutte le proprietà del composto da noi ottenuto sono identiche con quelle della cosidetta *β-benzildiossima* C_6H_5 . C (: NOH) . C (: NOH) . C_6H_5. Acetilato a freddo con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso dà il diacetilderivato C_6H_5 . C (: $NOCOCH_3$) . C (: $NOCOCH_3$) . C_6H_5 fusibile a 124°-125° conforme ai dati di Auwers e Meyer [1]. Inoltre riscaldato in soluzione acquoso-alcoolica con un po' di acido acetico diluito si trasforma lentamente nella difenilgliossima fusibile a 237° e facilmente riconoscibile sotto forma di sale di nichel.

Facendo agire nelle condizioni di cui sopra il cloruro di fenildiazonio sulla soluzione della β-fenilgliossima in idrossido di sodio al 10 % risulta invece la cosidetta *α-benzildiossima* C_6H_5 (C : NOH) . C (: NOH) . C_6H_5, la quale precipitata con acido acetico diluito e cristallizzata dall'alcool si presenta in laminette fusibili a 237°-238° con decomposizione.

Sostanza gr. 0,1461: N cc. 14,4 a 10° e 738,733 mm.
Trovato %: N 11,61.
Per $C_{14}H_{12}O_2N_2$ calc.: 11,66.

Sciolta in alcool e trattata con acetato di nichel fornisce il caratteristico sale complesso [C_6H_5 . C (: NOH) . C (: NO —) . C_6H_5]$_2$Ni; acetilata a freddo anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso dà un diacetilderivato C_6H_5 . C (: $NOCOCH_3$) . C (: $NOCOCH_3$) . C_6H_5 fusibile a 150°, cioè un po' più alto di quanto dicono Auwers e Meyer [2].

Preparazione delle fenilgliossime dall'ω-dibromoacetofenone. L'azione dell'idrossilamina sull'ω-dibromoacetofenone C_6H_5.CO. $CHBr_2$ fu già studiata da Schramm [3] e da Strassmann [4], il

(1) *Ber.* *21*, 799 (1888).
(2) *Ber.* *21*, 798 (1888).
(3) *Ber.* *16*, 2186 (1883).
(4) *Ber.* *22*, 419 (1889).

primo dei quali ebbe una sostanza fusibile a 152°, il secondo una sostanza fusibile a 162°, che descrissero come fenilgliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$. Ritenendo che dovesse invece risultare una miscela delle due forme di quest'ultima, abbiamo creduto opportuno di controllare le asserzioni dei detti Autori, ed, operando nel seguente modo, l'esperienza ha confermato le nostre previsioni.

Alla soluzione alcoolica di ω-dibromoacetofenone si aggiunge un piccolo eccesso delle quantità teoriche di cloridrato di idrossilamina e di acetato sodico cristallizzato sciolti in poca acqua e si scalda la miscela per alcune ore a 70°-80°. Avvenuta la reazione $CH_3 . CO . CHBr_2 + 2NH_3O \longrightarrow CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . H + H_2O + 2HBr$ si diluisce con acqua, si aggiunge idrossido di sodio fino a che il liquido ridiventi limpido, si filtra per eliminare le tracce di ω-dibromoacetofenone rimasto inalterato, si acidifica con acido acetico diluito e si tratta con un eccesso di acetato di nichel al 20 %. Si raccoglie il sale rosso di nichel della β-fenilgliossima, che precipita, si neutralizza *esattamente* il filtrato con idrossido di ammonio, si filtra nuovamente per separare un altro po' di sale, che in tal modo si separa, e si rende leggermente basico il filtrato con idrossido di ammonio: precipita allora il composto giallo verdastro di nichel della α-fenilgliossima. Dal primo sale, mediante trattamento con acido cloridrico, si mette in libertà la β-gliossima, che si estrae poi con etere; lo stesso si fa col composto di nichel della forma α, e le due fenilgliossime si purificano come è detto nella Nota VI (loc. cit.).

Il procedimento ora descritto può anche essere seguìto per isolare la α e la β-fenilgliossime dalla loro miscela, la quale risulta facendo agire il cloridrato di idrossilamina e l'acetato sodico sull'isonitrosoacetofenone in soluzione acquoso-alcoolica, ed offre sul metodo che abbiamo adottato nella Nota ora citata il vantaggio di essere molto più rapido e di fornire una maggiore quantità della forma α.

Torino – Istituto Chimico della R. Università.
Febbraio 1923.

Il preteso carreggiamento delle Dinaridi sulle Alpi

Nota del Socio corrispondente MICHELE GORTANI

1. Introduzione. — Il prof. P. TERMIER, noto come fautore della teoria dei carreggiamenti fino alle conseguenze e applicazioni più spinte, ha recentemente pubblicato tre note sulla struttura delle Alpi Orientali (1), esprimendo in forma di aforismi opinioni personali con tale sicurezza di sè, da poter forse trarre in errore chi non abbia diretta conoscenza dei luoghi e delle circostanze di fatto.

In tali note l'autore sostiene le tesi seguenti:

1°) da Sterzing al Katschberg la catena degli Alti Tauri, lunga 170 e larga una trentina di km., è da interpretarsi come una *finestra* tettonica da cui sorge il sistema delle coltri di carreggiamento " pennine „ (facies della zona delle pietre verdi), nel mezzo di coltri carreggiate " austro-alpine „ o delle Alpi Orientali, sovrapposte alle prime;

2°) la zona fra gli Alti Tauri e le Dinaridi, prevalentemente scistoso-cristallina con terreni paleozoici e con terreni secondari aventi facies analoga alle Alpi calcaree settentrionali, è la zona delle radici multiple delle " coltri austro-alpine „; in particolare, fascio radicale della " coltre austro-alpina superiore „ è la catena delle Alpi della Gaila (Drauzug), continuata verso

(1) TERMIER P., *Sur la structure des Alpes orientales: fenêtre des Tauern et zone des racines.* " C.-R. Ac. Sc. Paris „, 175, 20 nov. 1922, pag. 924-29; — ID., *Sur la structure des Alpes orientales: rapports des Dinarides et des Alpes.* " Ibid. „, 11 dic. 1922, pag. 1173-78; — ID., *Sur la structure des Alpes orientales: origine de la nappe superalpine: problème de l'âge des grandes nappes.* " Ibid. „, 26 dic. 1922, pag. 1366-71.

ponente con le sue propaggini fino a Brunico (e idealmente assai più oltre) e verso oriente con le Caravanche orientali e settentrionali fino al gruppo del Bacher;

3°) il limite alpino-dinarico non corre a nord delle Alpi Carniche, ma entro queste ultime, a sud della zona paleozoica antica; la così detta trasgressione carbonifera è una sovrapposizione per carreggiamento;

4°) le Dinaridi sono state carreggiate verso nord, schiacciando e laminando le Alpi;

5°) sotto la coltre carreggiata delle Dinaridi va cercata la radice della coltre " superalpina „ o di Hallstatt; l'età di tutte le grandi coltri di carreggiamento delle Alpi Orientali è oligocenica.

Tali affermazioni non sono tutte nuove; l'autore stesso ci tiene anzi a ricordare come egli fin dal 1903 abbia enunciato le principali fra esse, e come da allora abbia continuato a insegnarle, senza curarsi delle dimostrazioni in contrario dei suoi oppositori. Queste ultime tuttavia non devono essere rimaste senza qualche effetto se, per riconfermare e completare le sue conclusioni, l'anno passato egli ha voluto fare una corsa nelle Alpi Orientali. Frutto di tale corsa sono le note di cui ci occupiamo.

Dei lavori precedenti in cui il Termier ed i suoi colleghi toccarono in qualche modo del settore alpino che da vent'anni assorbe la mia attività di studioso, non credetti necessario nè opportuno occuparmi, trattandosi di affermazioni a distanza basate su ipotesi derivate da lettura di qualche lavoro altrui e non sulla osservazione diretta, la sola che in geologia abbia un reale valore.

Ma questa volta il Termier espone argomentazioni tratte da una visita, sia pure sommaria, dei luoghi; e cerca in qualche modo di provarle.

Esaminiamole.

Procederemo nell'esame con tutta obiettività, dimenticando l'offesa che egli fa ai geologi italiani — dal Taramelli al Dal Piaz, al Vinassa, allo scrivente — che egli ostenta di ignorare, anche se il meglio della loro vita abbiano speso nello studio delle Alpi Orientali; la dimenticheremo, anche se ciò gli abbia permesso di esporre come proprie scoperte cose già dimo-

strate, e anche se la stessa terminologia da lui adottata palesi l'animo a noi poco amico.

2. La così detta zona delle radici. — Cominciamo da quella che il TERMIER chiama " zona delle radici „. Ricordate le pieghe longitudinali della catena fra Gaila e Drava (Alpi della Gaila), egli afferma come risultato nuovo che non esiste alcuna faglia lungo la valle della Drava, nè lungo la valle della Gaila. Se tali espressioni devono essere prese alla lettera, sono contrarie ai fatti; se invece l'autore ha voluto intendere che la linea della Drava e la linea della Gaila, lungi dall'avere il valore e il significato di grandi linee di faglia, come un tempo erano state ritenute, sono linee di dislocazione discontinua e parziale e di limitata importanza, debbo osservare che, assai prima di lui, dal GEYER, dalla FURLANI, dal HERITSCH e da me questo era stato non soltanto detto, ma anche dimostrato (1).

Il TERMIER prosegue: " Le faisceau de racines, courant vers ESE, coupe cette vallée (de la Gail) sous un angle très aigu, passe sur sa rive droite, est tranché en cluse par les gorges du Gailitz et se poursuit par la chaîne des Karawanken, en reprenant peu à peu la direction Est. On le suit ainsi, par le Hochobir, jusqu'au Bachergebirge, au delà duquel il disparaît sous les plaines. Mais, plus on va vers l'Est et plus on voit le faisceau se coucher vers le Nord: dans le Drauzug, il était formé de plis verticaux ou presque verticaux; dans les Karawanken et le Hochobir, c'est une série isoclinale plongeant au Sud... Ce déversement vers le Nord annonce la naissance du pays de nappes. Le massif du Dobratsch, où le Secondaire est presque horizontal, n'appartient déjà plus au pays de racines „ (2).

---

(1) Cfr. GEYER G., *Ein Beitrag zur Stratigraphie und Tektonik der Gailthaler Alpen in Kärnten.* " Jahrb. geol. R-Anst. Wien „, 47, 1897, pag. 356 e segg.; — FURLANI M., *Der Drauzug im Hochpustertal.* " Mitt. geol. Ges. Wien „, 5, 1912, pag. 262 e segg.; — HERITSCH F., *Die österreichischen und deutschen Alpen bis zur alpino-dinarischen Grenze.* " Handb. d. Region. Geol. „, n. 18, Heidelberg, 1915, pag. 125; — GORTANI M., *Progressi nella conoscenza geologica delle Alpi Carniche Principali.* " Mem. Soc. toscana Sc. nat. „, 34, Pisa, 1921, pag. 37 d. estr.

(2) TERMIER, l. c., pag. 929.

Ma le cose non stanno precisamente così. I terreni delle Alpi della Gaila (cioè il così detto fascio delle radici) *non* tagliano ad angolo molto acuto la valle, *non* sono incisi dalla Gailizza, *non* si continuano nella porzione occidentale delle Caravanche, *non* si separano dal Dobrać, e *non* presentano un graduale arrovesciarsi delle pieghe verso settentrione. Con qualche maggior particolare, diremo che a nord della Gaila scisti paleozoici e calcari triassici continuano a mantenere anche a ponente del Weissensee la loro direzione parallela all'asse della valle principale; la massa calcareo-dolomitica del Dobrać, o Villacher Alpe, fa di essi parte integrante: soltanto, la rigidità del massiccio roccioso ha qui convertito le pieghe in fratture. In tutta la catena, lunga un centinaio di km., le pieghe (in generale molto compresse) sono diritte, ovvero alquanto inclinate indifferentemente al sud o al nord, senza che si possa indicare una direzione prevalente della spinta. A mezzodì della Gaila la catena principale delle Alpi Carniche mantiene fino all'ultimo la sua piena e perfetta individualità e si continua direttamente nelle Caravanche occidentali. Tanto le pieghe dei terreni paleozoici, quanto le altre, conservano inalterata la loro direzione generale ONO-ESE, anch'essa parallela all'asse della val Gaila. La Gailizza — confine convenzionale fra Alpi Carniche e Caravanche — taglia esclusivamente queste pieghe carniche proseguenti verso levante; e precisamente, da Tarvis in giù: 1° la ellissoide permo-triassica di Goggau; 2° la fascia permotriassica che lega le falde meridionali della Göriacher Alpe al Čabin; 3° i grossi banchi di calcare permocarbonifero a Fusuline interposti fra le arenarie permiane di Val Gardena e gli scisti; 4° la zona degli scisti carboniferi trasgressivi, da cui emergono: a sinistra i prossimi dossoni devonici del Kapin, a destra i più lontani spuntoni devonici del Peć, e, a settentrione, il nastro calcareo neosilurico >Hohenturm (Strajaves)-Arnoldstein<. Si aggiunga che i terreni permotriassici qui indicati hanno tipica facies meridionale.

Le recenti osservazioni in sito del Termier, oltre ad essere errate circa i rapporti fra Alpi della Gaila, Carniche e Caravanche, non portano quindi alcun argomento positivo in favore dell'idea, ormai vecchia, di considerare le Alpi della Gaila e le loro propaggini come una zona di radici.

Contro tale ipotesi continuano pertanto ad avere pieno valore le dimostrazioni in senso contrario avanzate sia da fautori della teoria dei carreggiamenti su larga scala, come HAUG e KOBER (1), sia da osservatori spassionati, come KOSSMAT, HERITSCH e la sig. CORNELIUS-FURLANI (2). E in verità le Alpi della Gaila sono così ristrette, così tipicamente foggiate a catena a pieghe e unite da così strette relazioni con le Alpi meridionali, che l'insistere per localizzarvi una grande zona di radici multiple di amplissime coltri settentrionali ha soltanto il risultato di mettere in luce uno dei punti più deboli della teoria.

3. Il limite alpino-dinarico. — Devo premettere che, insieme con i più autorevoli geologi italiani, io considero la divisione fra Alpi e Dinaridi come una divisione artificiale. Divisioni nette sono ben rare in natura, e non meno fra i sistemi montuosi che fra le innumerevoli cose che noi siamo tentati a classificare. Ma, oltre a questa considerazione d'ordine generale, che a nostro parere non patisce eccezione nel caso presente, si può osservare che il complesso dei rilievi aggruppati sotto il nome di Dinaridi, è diverso secondo i diversi autori; come secondo i vari autori variano le idee intorno ai rapporti delle Dinaridi con gli altri sistemi montuosi ad esse più prossimi (Alpi Orientali, Alpi Occidentali, Appennini, Carpazi e magari anche " Ellenidi " e Tauridi). Particolarmente discu-

---

(1) HAUG E., *Sur les nappes des Alpes orientales et leur racines.* " C.-R. Ac. Sc. Paris ", 148, 1° sem. 1909, pag. 1477; — KOBER L., *Ueber Bau und Entstehung der Ostalpen.* " Mitt. geol. Ges. Wien ", 5, 1912, pag. 466.

(2) KOSSMAT F., *Die adriatische Umrandung in der alpinen Faltenregion.* " Mitt. geol. Ges. Wien ", 6, 1913, pag. 119; — HERITSCH F., op. cit., pag. 128, 135; — SCHWINNER R., *Dinariden und Alpen.* " Geol. Rundschau ", 6, 1915, pag. 12; — CORNELIUS-FURLANI M., *Considerazioni orogenetiche sul limite alpino-dinarico in Pusteria.* " Atti Acc. scient. ven.-trent.-istr. ", (3), 12-13, Padova, 1922, pag. 147 e segg. — Secondo quest'ultima autrice, cui si unisce il HENNY, il limite alpino-dinarico si aprirebbe verso oriente e sarebbe rappresentato dall'intera catena delle Alpi della Gaila, considerata nel suo insieme come una sinclinale complessa in cui si dilata la prosecuzione della sinclinale del Canavese (cfr. FURLANI M. et HENNY G., *Du prolongement vers l'Est du synclinal du Canavèse*, etc. " Eclogae geol. Helv. ", 16, Bâle, 1920, pag. 95).

tibile è poi, a nostro parere, la rigida separazione delle Alpi meridionali dalle Alpi propriamente dette, per includerle invece nel sistema dinarico. Le divisioni, che avevano prima una prevalente ragion d'essere nella comodità di studio e di esposizione dei risultati complessivi, son venute sempre più assumendo, con lo sviluppo della teoria dei carreggiamenti, il significato di distinzioni genetiche profonde; acquistano per conseguenza maggior valore le osservazioni fatte da varie parti sulle strette affinità che terreni e facies ritenuti tipici delle Dinaridi presentano con terreni e facies di catene attribuite ad altri sistemi, e in modo particolare sulle affinità di facies " dinariche " delle Alpi meridionali con facies " alpine " assai mal discernibili dalle prime; ci basti ricordare, a mo' di esempio, le osservazioni del DIENER, del HAUG, del TARAMELLI e del HERITSCH (1).

Ma, d'altra parte, questa stessa tendenza a valorizzare le distinzioni fra i singoli sistemi montuosi o raggruppamenti di ordine anche più elevato, rende in special modo importanti le loro delimitazioni, e fa quindi moltiplicare le ricerche lungo le linee o le zone di contatto: principalissima quella fra le Dinaridi e le Alpi Orientali.

Il limite adottato per quest'ultimo caso da E. SUESS, e di poi generalmente accettato — sia pure con le accennate riserve, — era segnato dalla depressione della Pusteria, dall'intero corso della Gaila, e più ad est, oltre la piana di Villaco, dal limite sud delle Caravanche calcaree settentrionali. La catena principale Carnica era pel SUESS (che lo afferma con chiare ragioni in modo assai reciso e preciso) una catena indipendente, di età varisca, estranea tanto alle Dinaridi quanto alle Alpi propriamente dette (2). Chi seguiva solo in parte tali vedute, come il KOBER, manteneva però sempre il limite meridionale

---

(1) DIENER C., *Bau und Bild der Ostalpen und des Kartsgebietes.* Wien, 1903; — HAUG E., op. cit.; — TARAMELLI T., *Se le Dinaridi costituiscano realmente una massa carreggiata.* " Rend. R. Ist. Lomb. ", (2) 45, 1912, pag. 1011 e segg.; — HERITSCH F., op. cit., pag. 125-130; — ID., *Die Anwendung der Deckentheorie auf die Ostalpen. III.* " Geol. Rundschau ", 5, 1914, pag. 559.

(2) SUESS E., *Das Antlitz der Erde.* Vol. III, 1, Wien, 1901, pag. 433.

delle Alpi lungo la Gaila a nord delle Carniche, inglobando queste ultime nelle Dinaridi (1).

Non intendo di occuparmi qui delle vedute del Kober, che del resto sono già state egregiamente ribattute (2). Tutto è per lui carreggiato: il limite alpino-dinarico del Suess diventa la cicatrice che nasconde le complesse radici così delle " coltri alpine superiori „ come delle coltri dinariche; carreggiate sono le Alpi della Gaila al pari delle Carniche e delle Caravanche e di ogni altra catena. Asserzioni portate innanzi senza neppure un principio nè un tentativo di prova, e che però tendono a sfuggire al controllo come tutti i prodotti della fantasia; ma che vengono a dare sempre maggiore importanza al limite alpino-dinarico quale era stato considerato finora.

Il Termier non è invece di quest'opinione. Egli fa scendere la linea del confine verso mezzodì, fino al contatto con i terreni permo-triassici, inglobando nel sistema alpino propriamente detto tutti i terreni antichi delle Alpi Venete. Le filladi della Pusteria farebbero così parte integrante del sistema alpino, e precisamente della zona delle radici; lo stesso dicasi dei terreni antichi delle Carniche, che sono poi fatti sparire sotto la coltre carreggiata dinarica per ricomparire in finestra nell'assai più orientale affioramento di Vellach in seno alle Caravanche.

Del preteso carreggiamento dinarico, diremo poi; ci limitiamo ora a notare come sia per l'appunto esso a rendere necessaria cotesta trasposizione del limite alpino a sud, trasposizione che non è per alcun altro verso richiesta nè giustificata. Per i fautori dei grandi carreggiamenti non dovrebbe a meno di riuscir singolare cotesto grande fascio di radici paleozoiche, a cui non corrisponde in nessuna parte delle Alpi la più piccola traccia di coltri o di superstiti lembi di coltri; senza contare che tutti i lembi di Trias inclusi nella catena principale Carnica — valga ad es. quello dello stretto golfo triassico di Bordaglia,

---

(1) Kober L., *Alpen und Dinariden.* " Geol. Rundschau „, 5, 1914, pag. 197 e 200; cfr. anche la cartina a pag. 178 e la carta annessa al lavoro precedentemente citato (*Bau u. Entstehung der Ostalpen,* 1912).

(2) Vedi principalmente Schwinner R., *Dinariden und Alpen.* " Geol. Rundschau „, 6, 1915, pag. 1-22; cfr. anche Heritsch, *Oesterr. und deutsche Alpen,* l. c., pag. 129 e segg.

a ridosso dei monti di Volaia — hanno tipica facies meridionale. E neppure si comprende, con le idee dell'autore, come e perchè si siano originate le differenze di facies in seno al grande fascio di terreni antichi appartenenti ad una medesima entità genetica e tettonica, quale verrebbe ad essere costituita dalle Alpi della Gaila e dalle Carniche principali.

D'altro canto, è forse giustificato lo smembramento delle Alpi Carniche in due sistemi profondamente diversi? Dice il TERMIER: " Il y a, dans la chaîne Carnique, deux entités tectoniques très distinctes: un pays de plis, où l'on voit des gneiss, des phyllites, du Silurien, du Dévonien, peut-être aussi du Dinantien; et, montant sur ce premier pays, un pays d'écailles où le Permien et le Trias ont les faciès dinariques et où l'on trouve, sous le Permien et concordant avec lui, de l'Ouralien fossilifère. Le pays d'écailles appartient incontestablement aux Dinarides; il est inséparable de la région des Dolomies. Le pays de plis appartient aux Alpes... „ (1). La zona paleozoica delle Carniche è indubbiamente una catena a pieghe; il VINASSA ed io lo abbiamo dimostrato da tempo, ed io ne ho data anzi recentemente una rappresentazione grafica e una sommaria descrizione (2). Ma ciò non toglie che si manifestino accavallamenti e talora perfino una struttura embriciata anche in seno alla zona paleozoica e anche in corrispondenza delle pieghe paleocarniche, come conseguenza dell'intenso costipamento delle pieghe e della diversa plasticità dei calcari a strati sottili, dei calcari massicci e degli scisti. E a sud della zona paleozoica anche nell'area carnica la piegatura è del pari il motivo tettonico dominante (3), non infirmato dal fatto che esistono parziali scorrimenti e fratture anche estese, inseparabili dal corrugarsi di enormi masse eterogenee e di scarsa plasticità sotto spinte energiche e ripe-

---

(1) TERMIER, l. c., pag. 1176.

(2) GORTANI M., *I bacini della But, del Chiarsò e della Vinàdia in Carnia.* " R. Magistrato alle Acque, Uff. idrogr. „, pubbl. 104, Venezia, 1920 (con carta geologica e profili); — ID., *Progressi nella conoscenza geologica delle Alpi Carniche principali.* Estr. dalle " Mem. Soc. toscana Sc. nat. „, 34, 1921; — ID., *Le linee orotettoniche delle Alpi Carniche.* Estr. dagli " Atti VIII Congr. geogr. ital. „, Firenze, 1922 (con carta orotettonica).

(3) Cfr. i miei scritti già citati.

tute. E ciò è, del resto, in perfetta correlazione con il tipico motivo tettonico a pieghe offerto dalle Alpi e Prealpi Venete. Lo smembramento delle Alpi Carniche in due sistemi diversi e diversamente costituiti non ha quindi ragione di essere.

Osserveremo infine che non si esce da queste alternative: o le Dinaridi, e in particolare le Alpi Venete, si vogliono carreggiate verso sud, come pretende il Kober senza darne la benchè minima prova, e la costruzione del Termier crolla per intero; o si vogliono carreggiate verso nord, e si urta contro i fatti e le circostanze che subito passeremo ad esporre; o sono ben radicate, come noi riteniamo per fermo, e allora lo spostamento del limite alpino-dinarico verso mezzodì rende quest'ultimo più artificiale che mai, abbandonando senza motivo plausibile una linea tettonica — sia pure discontinua e d'importanza limitata e diversa da punto a punto — per seguire il capriccioso andamento del processo di denudazione.

4. Il preteso carreggiamento dinarico. — Nel cercar di rimettere a nuovo la sua vecchia e ormai abbandonata ipotesi dell'esteso carreggiamento delle Dinaridi verso nord, il Termier crede di portare questa volta una prova decisiva: la discordanza interpretata come trasgressione carbonifera nelle Alpi Carniche è per lui una discordanza tettonica, la quale dimostrerebbe la sovrapposizione e la traslazione delle Dinaridi sulle Alpi.

La trasgressione carbonifera è a lui nota soltanto nei modesti limiti rilevati dal Geyer nella sezione pontebbana del foglio Oberdrauburg-Mauthen della Spezial-Karte austriaca: neocarbonifero fossilifero sovrapposto ai terreni paleozoici antichi come una placca lunga una ventina di km., dominata dal Gartnerkofel. " Sous le Gartnerkofel et sous la Krone, qui sont des lambeaux de recouvrement dinariques, le contact de l'Ouralien et de la série paléozoïque plus ancienne est un contact anormal, un contact par charriage. Le véritable substratum originel de l'Ouralien carnique ne nous est pas connu " (1).

Lasciamo stare la Krone, che a memoria d'uomo non ha mai avuto un coronamento dinarico, ma è sempre stata per

(1) Termier, l. c., pag. 1177.

intero carbonifera e non lascia scorgere, nè sotto nè attorno a sè, alcun affioramento della serie paleozoica antica. Quest'ultima viene a giorno, in corrispondenza del Gartnerkofel, solo dal lato settentrionale; l'unica " anormalità „ che vi si riscontri è un piccolo lembo di Permiano impigliato fra gli scisti carboniferi e i calcari filladici devoniani, facilmente interpretabile come un minuscolo disturbo tettonico locale durante le successive intense piegature. E tutto è qui.

Come e perchè siano così perfette e perfettamente riconoscibili su venti chilometri di lunghezza quelle relazioni di giacitura che dopo la classica dimostrazione del Geyer sono universalmente ritenute modello scolastico di trasgressione tipica; come e perchè, sempre in questo settore, i fossili neocarboniferi più delicati siano conservati perfettamente a contatto immediato (1) con i calcari fossiliferi siluriani e devoniani; come e perchè il crestone del Malvuerich (Malurch) sopra Pontebba mostri tutti i passaggi dal calcare devonico alla breccia di trasgressione e al conglomerato del Carbonifero; come e perchè in nessun punto di cotesta estesissima linea di contatto dal M. Lodìn al Rio del Bombaso sian visibili miloniti, nè strutture cataclastiche, nè alcun altro effetto dell'intenso metamorfismo dinamico che dovrebbe avere logicamente accompagnato la traslazione delle imponenti masse dinariche (per un minimo di 150 km., secondo le precedenti asserzioni del Termier) sul substrato paleozoico alpino, — tutto ciò conta poco pel nostro autore: *ex occidente lux*!

Delle prove della trasgressione il Termier si induce tuttavia ad ammetterne una: la presenza di conglomerati neocarboniferi ed eopermici con elementi di calcari siluriani e devoniani. Cerca allora di conciliare le cose: " le substratum originel (de l'Ouralien) doit bien être un substratum plissé, un élément de la chaîne hercynienne: de sort que la conclusion de mes devanciers subsiste, quant à l'histoire stratigraphique de la région carnique „ (2). Ma è logico che nè i conglomerati dicon

---

(1) A pochi metri dal contatto in corrispondenza del Rosskofel e di Lanza, a pochi centimetri e perfino a pochi millimetri dal contatto in corrispondenza dei monti Lodìn e Cima Val di Puàrtis.

(2) Termier, l. c., pag. 1177.

più nulla se vengono da lontane e ignote regioni, nè volere e disvolere

> insieme puossi
> per la contraddizion che nol consente.

La contraddizione risulterebbe ancor meglio se il Termier non si fosse limitato alle conoscenze che sulla catena carnica si avevano or sono vent'anni. L'estensione e il riconoscimento della catena paleocarnica e della trasgressione carbonifera sui più che 100 km. di lunghezza della catena, con prosecuzione ulteriore a oriente e a occidente, sono fatti ormai acquisiti alla scienza, e che cominciano ad avere ripercussione su varie parti della geologia alpina ed extra-alpina. Gli scisti siluriani sono ridotti ai nuclei delle pieghe paleocarniche erose; al Carbonifero trasgressivo appartiene la grande massa degli scisti, prima considerati parte integrante del substrato antico e riferiti in parte al Siluriano e in parte al Culm, o tutti al Siluriano; spettano al Carbonifero, almeno in parte, anche le filladi. Soltanto lunghe e pazienti ricerche hanno potuto dimostrare l'unità della formazione scistosa e la sua generale giacitura trasgressiva: tanto la massa degli scisti è strettamente connessa con il substrato silurico-devonico, tanto è stata fittamente piegata con esso nei corrugamenti mesozoici e terziari, tanto ha subìto insieme con esso il dinamo-metamorfismo nel versante settentrionale della catena, alla sua estremità occidentale e nella sua prosecuzione ulteriore verso ponente (1).

Non è pertanto il caso d'insistere ulteriormente sulle idee peregrine del sig. Termier. Aggiungeremo soltanto che una conoscenza meno superficiale delle Alpi Carniche e della loro letteratura geologica avrebbe potuto dargli qualche parvenza di prova alquanto più seria. Alludo in particolare all'accavallamento del Trias sul Paleozoico, che si riscontra in più punti della linea Pontebbana- alta Fella -alta Sava. Come ho altrove

---

(1) Fino a che tali condizioni di età e di giacitura non furono chiarite, si potè perfino pensare (cfr. Tilmann N., *Ueber den tektonischen Carakter des Paläozoikums der Karnischen Alpen.* " Geol. Rundschau ", 2, 1911, pag. 114) ad una struttura a coltri carreggiate della catena paleocarnica, che si è dimostrata invece una delle più tipiche catene a pieghe.

accennato (1), si ha effettivamente un sospingimento della serie permo-triassica sulle formazioni più antiche dal M. Salinchiêt al Rio del Bombaso, al Poludnig e al Kok; la posizione del Trias ritorna poi normale fin oltre la Gailizza, e la dislocazione ricompare nelle Caravanche occidentali (gruppo del Peć) e si riprende nelle orientali a levante di Vellach. Gli esempi più belli di tali sospingimenti sono allo Zirkelspitz (dolomia infraraibliana su Neocarbonifero) nelle Carniche, e alla Kopa (calcare e conglomerato del Muschelkalk su Neocarbonifero) nelle Caravanche occidentali; interessanti sono anche i lembi di Neocarbonifero laminato, impigliati nella dolomia infraraibliana, che appaiono nel profondo di alcune valli (2). Ma il fatto che i sospingimenti sono nettamente circoscritti e rilegati da tratti in cui le condizioni di giacitura dell'intera serie paleozoico-triassica sono normali, dimostra senza possibilità di dubbio o di equivoco che si tratta di fenomeni locali e limitati: sono anzi essi la più chiara prova della inesistenza del fenomeno generale e su larghissima scala. Viene pertanto ad essere rafforzata la conclusione di E. SUESS (3); non ostante i parziali accavallamenti e slittamenti, manca non solo ogni prova del carreggiamento dinarico sulle Alpi, ma abbiamo anzi le prove che ne dimostrano l'inesistenza.

Questa conclusione fa naturalmente cadere senz'altro la ricerca delle radici della " coltre superalpina „ al di sotto delle Dinaridi. Tale ricerca è, del resto, oziosa per noi che — mentre riteniamo col HERITSCH (4) impossibile una separazione tra facies alpine orientali superiori e inferiori — giudichiamo sufficienti i metodi e gli elementi della tettonica clas-

---

(1) GORTANI M., *Progressi conosc. geol. d. Alpi Carniche.* L. c., pag. 45 dell'estr.

(2) Per esempio, nel vallone di S. Caterina (Weissenbach), nel vallone di Malborghetto, nell'alta Fella presso il forte Hensel, nel corso inferiore del rio di Lussari.

(3) SUESS E., *Das Antlitz der Erde.* Vol. III, 2, Wien, 1909, pag. 168 (cfr. anche pag. 178).

(4) HERITSCH F., *Die Anwendung der Deckentheorie auf die Ostalpen. II.* " Geol. Rundschau „, 5, 1914, pag. 287.

sica anche per interpretare la struttura delle Alpi calcaree settentrionali (1).

Pavia, R. Istituto geologico, gennaio 1923.

---

(1) Un esame delle supposte coltri, la cui sdrucitura darebbe origine alla così detta finestra dei Tauri, andrebbe troppo oltre i limiti della presente Nota. Mi limito ad osservare che l'autore non porta alcun fatto nè alcuna considerazione nuova in appoggio di tali ipotesi, che non sono nuove e contro le quali continuano a sussistere le non ancora ribattute obiezioni di valorosi geologi austriaci. E circa l'età da attribuirsi ai principali movimenti orogenetici delle Alpi Orientali, mi sembra che il Termier — prescindendo dalla esagerata applicazione della teoria dei carreggiamenti — dia, per lo meno, troppo scarso peso alle prove positive di energici corrugamenti preterziari, e in ispecie alla trasgressione sopracretacea. Egli sorvola anche qui su fatti accertati, di cui pure era stato segnalato il valore e il significato anche alla luce della teoria dei carreggiamenti (cfr., per es., Heritsch F., *Das Alter des Deckenschubes in den Ostalpen.* " Sitzber. Akad. Wiss. Wien ", I, 121, 1912, pag. 615 e segg.).

L'Accademico Segretario
Oreste Mattirolo

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati**, **A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla**, **G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LVIII, DISP. 8a, 1922-1923

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1923

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Febbraio 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. CORRADO SEGRE
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Peano, Guidi, Grassi, Somigliana, Ponzio, Sacco, Pochettino e Mattirolo Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Parona, Naccari e Foà.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica all'Accademia la notizia della morte del nostro Socio corrispondente aella Sezione di Fisica, Guglielmo Corrado Röntgen, avvenuta a Monaco di Baviera il giorno 10 corr.

Il Socio Pochettino, con brillante evocazione, commemora l'insigne Socio Röntgen illustrando le grandi e luminose benemerenze scientifiche di questo fisico il cui nome vivrà eternamente legato ad una delle più importanti scoperte della scienza moderna, la quale ha aperto la via ad applicazioni importantissime nel campo specialmente della Chirurgia. La bella commemorazione lumeggia non solo le benemerenze scientifiche di Corrado Röntgen, ma rende doveroso omaggio al carattere di questo scienziato che fu nello stesso tempo esempio preclaro di modestia e di elevato valore morale.

La commemorazione del Socio Pochettino, accolta con plauso unanime dall'Accademia, viene approvata per la pubblicazione negli *Atti*.

Il Socio Grassi, ricordando come già fino dal 1896 egli aveva avuto la ventura di servirsi della scoperta del Röntgen per localizzare la posizione di un proiettile in un ferito, reduce dall'infausta giornata di Abba Garima, si associa alle parole dette dal Socio Pochettino in onore del Röntgen, del quale egli pure ricorda le alte benemerenze.

Il Segretario Mattirolo, nel nome del Comitato per le onoranze alla memoria del compianto nostro Socio Icilio Guareschi, presenta e fa dono ai Soci di un certo numero di esemplari della pubblicazione testè comparsa nella quale furono riuniti i discorsi tenuti il giorno 20 maggio dell'anno ora scorso, in occasione della solenne inaugurazione del ricordo al Prof. Guareschi, e la rivista bibliografica delle sue opere.

Il busto, opera egregia dello scultore Gaetano Cellini, venne fuso nel bronzo di cannoni austriaci, all'uopo concesso dal Ministro della Guerra, e inaugurato nell'Aula di Chimica Farmacologica dell'Istituto fondato dallo stesso Prof. Guareschi.

Il Segretario riassumendo il contenuto di tale pubblicazione espone sommariamente l'operato del Comitato che, oltre al ricordo bronzeo, potè istituire un premio annuo di Lire 1000, destinato agli studenti di Chimica e Farmacia, ed una medaglia di argento da conferirsi, annualmente, allo studente che avrà dato affidamento di miglior profitto seguendo il corso recentemente istituito di Pratica Galenica.

Così il Comitato ha creduto di onorare nel modo più consentaneo ai sentimenti del compianto insigne Chimico, la memoria del Guareschi, che l'Accademia nostra si onorò di annoverare fra i Soci più attivi e benemeriti.

Lo stesso Segretario presenta in dono una sua Nota pubblicata negli " Annali del Giardino botanico di Bruxelles ",

illustrante un interessante fungo ipogeo scoperto nel Congo dal Dr Ettore Bovone, Ispettore veterinario del Governo del Congo Belga.

Egli fa rilevare le notevoli benemerenze botaniche del Bovone che ha saputo, malgrado difficoltà non lievi, assicurare all'Italia e all'Istituto botanico di Torino, ingenti quantità di materiali vegetali del Congo, i quali furono già in gran parte pubblicati e illustrati, specialmente per quanto si riferisce ad importanti specie nuove di Graminacee.

Il Socio Ponzio presenta quindi una sua Nota, *Ricerche sulle diossime*, che sarà indicata col numero X, in continuazione alle Note precedentemente presentate.

La Nota del Socio Ponzio è accolta per gli *Atti*.

Il Socio Naccari fa presentare quindi, nel nome del Socio corrispondente Alessandro Amerio, una Nota che ha per titolo: *Variazione diurna della distribuzione dell'energia sul Disco solare.*

Intorno a questa presentazione prendono la parola i Soci Segre, Guidi e Grassi per richiamare l'attenzione dell'Accademia sul diritto che hanno i Soci corrispondenti di presentare Note, direttamente, senza l'intermediario dei Soci residenti, facoltà che, per le condizioni economiche dell'Accademia, il Consiglio di Amministrazione aveva temporaneamente sospesa (come risulta dal verbale della seduta dell'8 settembre 1920) e che si spera possa ora riattivarsi in vista delle migliorate condizioni del bilancio.

Di tale questione si delibera abbia ad occuparsi il Consiglio di Amministrazione che sarà prossimamente convocato.

GUGLIELMO CORRADO RÖNTGEN

commemorato dal Socio ALFREDO POCHETTINO

Alle ore 9 del giorno 10 di questo mese si è spento in Monaco di Baviera Guglielmo Corrado Röntgen; con Lui la fisica tedesca, già così duramente provata in questi ultimi tre anni con le morti, susseguitesi in breve volger di tempo, di Voigt, di Riecke, di Rubens, ecc., vede sparire uno dei pochi superstiti di quella schiera di maestri che aveva così potentemente contribuito a dar rinomanza agli studi fisici del suo paese.

Nato il 27 marzo 1845 a Lennep in Renania, si addottorò nel 1868 presso l'Università di Zurigo, e fu assistente del Kundt prima in Würzburg e poi in Strassburgo dal 1870 al 1874, anno in cui conseguì la privata docenza presso quest'ultima Università. Dopo un anno d'insegnamento nella scuola agraria di Hohenheim, fu, nel 1876, assunto quale straordinario di fisica sperimentale nell'Università di Strassburgo e quindi, nel 1879, nominato ordinario della stessa disciplina nell'Università di Giessen, donde venne successivamente trasferito nel 1888 all'Università di Würzburg e finalmente nel 1900 a quella di Monaco. Nel 1901 conseguì il premio Nobel per la fisica e nel 1909 ebbe conferito il titolo di Eccellenza; membro di parecchie Accademie scientifiche del Suo paese ed estere, la nostra Lo annoverava fra i suoi corrispondenti stranieri dal 14 giugno 1903. Questo il *curriculum vitae* di Guglielmo Corrado Röntgen.

Il frutto del lungo lavoro scientifico del Röntgen si trova come sommerso di fronte all'importanza e alla popolarità della scoperta, da Lui fatta, dei raggi che portano il suo nome; ma sarebbe somma ingiustizia il non ricordare le Sue ricerche an-

teriori, che, se non hanno avuto nel campo degli studi fisici tanta eco, dimostrano una attività scientifica e una abilità sperimentale veramente notevoli, e contengono risultati che, se ora son trascurati nel turbinio della ricerca scientifica moderna orientata verso le speculazioni prevalentemente teoriche oggi di moda, non potranno che riacquistare la importanza loro dovuta quando si ritornerà a considerare al giusto valore tutte quelle ricerche sperimentali che tendono penosamente a preparare il materiale numerico, senza il sussidio del quale qualunque ricerca scientifica sarebbe vana.

I lavori del Röntgen, estranei ai raggi X, si possono dividere, qualora non si segua l'ordine cronologico della loro pubblicazione, in vari gruppi a seconda dell'argomento trattato. Un primo gruppo riguarda la compressibilità dei solidi e dei liquidi e l'influenza della pressione su le proprietà dei liquidi; tra le numerose osservazioni e le molteplici tabelle che vanno a completare il materiale raccolto dal Grassi, dal Quincke, ecc., ricorderò l'ingegnoso calcolo dimostrante la possibilità di dedurre la compressibilità di un corpo solido da quella delle sue soluzioni; l'ipotesi, accolta poi solo molto più tardi, che nell'acqua ordinaria sussista una specie di equilibrio fra molecole di complessità diversa corrispondenti allo stato liquido e allo stato solido, ossia, come diremmo oggi, fra molecole di diidrolo e di triidrolo; la constatazione dell'influenza della pressione su la velocità di inversione del saccaroso, su la velocità della corrente osmotica e su la viscosità dei liquidi; e la dimostrazione della non validità delle leggi di Beer e di Lorenz-Lorentz quando si tratti dell'influenza della pressione su l'indice di rifrazione e su la costante dielettrica di alcuni liquidi. Al Röntgen si debbono ancora alcune determinazioni del rapporto dei calori specifici di alcuni gas con il metodo di Clément-Desormes, nelle quali alcune ingegnose modificazioni dell'aneroide destinato alla misura delle pressioni consentono all'Autore di dare dei numeri che le esperienze posteriori non fecero che confermare.

Un altro gruppo di lavori riguarda i fenomeni piezo-attino-elettro-ottici: fondamentali fra essi sono: le ricerche su la birifrangenza del Quarzo in un campo elettrico; su la piezoelettricità del quarzo per torsione e sul fenomeno reciproco, in cui trovasi la constatazione della variabilità del potere rotatorio

per torsione; su l'effetto Kerr nei liquidi, fenomeno che Egli riesce ad osservare anche in sostanze non perfettamente isolanti; in queste ultime ricerche è particolarmente importante lo spostamento delle bande nere, che si ottengono osservando fra nicol incrociati, quando si fa muovere il liquido normalmente ai raggi luminosi e al campo elettrico. Sottili ed acute sono le considerazioni con le quali il Röntgen dimostra come i vari fenomeni, osservati da Hankel e da altri nel quarzo e denominati termo- e attino-elettrici, altro non siano che fenomeni piezoelettrici provocati dalle tensioni che si destano nel cristallo per effetto di un riscaldamento non uniforme.

Nei Suoi studi su la scarica elettrica fra punta e piano è notevole la relazione trovata fra il potenziale minimo e il cammino medio delle molecole del gas attraverso il quale passa la scarica; notevole tanto più in quanto che le cognizioni su la conducibilità dei gas erano allora affatto rudimentali; come pure interessante è la constatazione dell'importanza che, nella formazione delle figure elettriche del Kundt, ha lo strato gassoso sempre aderente ai corpi per adsorbimento.

Un altro gruppo importante delle Sue ricerche è costituito da quelle sull'effetto magnetico della convezione elettrica; per primo Egli tenta la ripetizione della celebre esperienza di Rowland sull'effetto magnetico di una vera corrente di convezione quale quella che si ha con un disco conduttore carico rotante, e, dopo molti sforzi, riesce a confermarla. Quindi dimostra l'effetto magnetico delle correnti di polarizzazione dielettrica come si ottengono con un disco dielettrico rotante in un campo elettrico dissimmetrico rispetto all'asse di rotazione di quello. I Suoi risultati furono confermati dalle ricerche eseguite molto posteriormente quando sorse la celebre polemica su l'esistenza o meno di tali effetti, e chi sa le difficoltà sperimentali con cui si dovette lottare in tali ricerche non può che ammirare i risultati ottenuti dal Röntgen circa venti anni prima.

Altre ricerche riguardano, la determinazione del numero di Poisson nel caucciù, l'assorbimento del calore raggiante nei gas, la dilatazione lineare della Cuprite e del Diamante, una modificazione ingegnosa del metodo di Sénarmont per tracciare le isoterme nelle lamine cristalline, l'elettrostrizione dei liquidi, alcune esperienze da scuola, ecc. Non voglio infine passare sotto

silenzio due altre ricerche interessantissime: una, compiuta con Exner, in cui si tenta una prima misura assoluta della costante solare con un pireliometro a ghiaccio, e una, in collaborazione con Kundt, con cui si dimostra e si misura il potere rotatorio magnetico nei gas e nei vapori. Ma, come dissi, la gloria più grande doveva venire al Röntgen dai Suoi lavori del 1895 e 1896.

Al 1895 erano perfettamente note le proprietà principali dei raggi catodici, grazie agli studi di Lenard; ma erano nozioni di interesse puramente scientifico. Fu in quell'anno che la scoperta del Röntgen portò un vero sconvolgimento nella scienza e mise a rumore non solo il campo dei fisici, ma anche la fantasia dei profani in un modo assolutamente raro nella storia della scienza. Non si trattava di una di quelle speculazioni astratte, di quelle concezioni filosofiche che tratto tratto vengon di moda, cui anche il profano tributa ammirazione e fede anche senza capirne niente; si trattava di fatti reali: il giorno 8 novembre 1895 Röntgen aveva scoperto dei raggi capaci di attraversare i corpi più opachi alla luce ordinaria. Quando nei primi giorni del 1896 la stampa quotidiana annunciò la scoperta quasi miracolosa che permetteva di rivelare forma e posizione di corpi estranei nel corpo umano, che permetteva di vedere le ossa muoversi nell'organismo vivente dell'uomo, si ebbe dapprima come un movimento d'incredulità; certo bisogna far astrazione dalle cognizioni che or sono in nostro sicuro possesso per comprendere lo stupore di allora. Senza tema di esagerare si può affermare che in quasi tutti i gabinetti di fisica del mondo civile si volle tentare di riprodurre le esperienze del Röntgen, constatare l'esistenza, vedere gli effetti di questi raggi meravigliosi che permettevano di indagare campi che sembravano dover rimanere perpetuamente preclusi all'indagine umana. Chi ha frequentato dei laboratori di fisica in quei giorni può far fede che un'ansia febbrile di ricerca come quella che si manifestò allora non si vide più, nemmeno quando si annunciò la scoperta della radioattività.

Le difficoltà di avere tubi di vetro convenienti e di ottenere in essi il vuoto necessario per queste esperienze, con i mezzi di cui si disponeva allora, furono grandissime, ma l'ansia della ricerca, la curiosità del pubblico furono tale sprone ai

fisici che in poche settimane cominciarono a comparire le prime note confermanti la scoperta dei nuovi raggi. Così la prima di quelle straordinarie scoperte fisiche, che hanno commosso il mondo scientifico e profano negli ultimi anni, era resa di pubblico dominio. Certo anche le altre che seguirono questa e ne discesero quasi, più o meno direttamente, non sono meno interessanti ed hanno modificato forse più profondamente le idee e i concetti della Fisica; ma poche, forse nessuna, hanno più prontamente e più intensamente colpita l'immaginazione del pubblico. Non era dunque più necessario " ex morte cognoscere vitam " come si legge nelle vecchie sale anatomiche, ma nella vita stessa studiarne il ritmo e negli intimi penetrali dell'organismo vivente gettare lo sguardo indiscreto dell'indagine scientifica! Come sempre accade, le fantasie lavorarono, e si intravidero applicazioni dei raggi scoperti dal Röntgen in tutti i campi della scienza. Che faceva il Röntgen in questo tempo? Qui è dove la Sua figura ci appare veramente grande: tranquillo, modesto, chiuso nel Suo laboratorio continuava lo studio dei Suoi raggi con rara perseveranza e abilità, tanto che nelle parecchie centinaia di lavori che su questo argomento apparvero nel 1896 nei giornali scientifici, ben poco è contenuto che già compreso non fosse nella prima nota del Röntgen, e per tutto il biennio 1896-97 i laboratori di tutto il mondo scientifico poco assai videro più di quanto Egli non avesse già visto o non andasse vedendo nel continuare l'opera Sua, grande quanto grande fu la modestia del Suo atteggiamento!

Uno spirito eccessivamente caustico indusse uno scrittore francese a scrivere a proposito della scoperta del Röntgen le seguenti parole: " generalmente quando gli scienziati perdono il loro latino nello studio di un fenomeno, battezzano questo con un nome convenientemente greco per far credere alle anime semplici che esso non ha segreti per loro; in questo caso lo stupore fu però tale che dimenticarono di simulare e battezzarono le nuove radiazioni con il nome di raggi X ". Se c'è un caso in cui la stoccata dell'arguto scrittore non ha ragione di essere è proprio questo: il nome di raggi X fu creato dal Röntgen stesso ad indicare la natura allora misteriosa di queste radiazioni, e la modesta serietà con cui sono redatti i Suoi pur fondamentali lavori su i nuovi raggi mette il loro scopritore ben

al di sopra di certe satire. Del resto nel campo stesso dei fisici tedeschi il Röntgen non doveva trovare una generale simpatia: si parlò di scoperta casuale, come se la storia della scienza non dimostrasse all'evidenza che quasi tutte le più belle scoperte sperimentali ebbero origine da osservazioni casuali e spesso si verificarono durante ricerche indirizzate a scopo affatto diverso; si affermò che la scoperta del Röntgen era già virtualmente contenuta nelle ricerche di Lenard su i raggi catodici, e che quindi a questo ne spettava il maggior merito. Si racconta che, in una conversazione in casa di Lord Kelvin, avendo un professore tedesco proclamato che i raggi X erano già nella mente di Lenard, Stokes, sorridendo argutamente, abbia esclamato: " Lenard avrà avuto i raggi X nel suo cervello, ma Röntgen li ha mandati fra le ossa della gente! „.

Effettivamente è nel modo con cui lo scienziato accoglie la, vogliamo pur dir casuale, rivelazione di un fenomeno nuovo che si può stabilire la grandezza del suo ingegno. Röntgen non si dà a voli pindarici nei Suoi scritti, non si preoccupa di dare subito una teoria dei fenomeni osservati, li studia; alla domanda di un intervistatore, poco dopo la Sua scoperta: " Che ne pensate voi? „; " Io non penso niente per ora, risponde, cerco „. E, silenzioso, in due mesi mette insieme la Sua prima pubblicazione in cui le proprietà fondamentali delle nuove radiazioni sono completamente esposte: la loro propagazione rettilinea, la non esistenza di una riflessione e di una rifrazione ordinaria, la loro inomogeneità rispetto al potere penetrante, la diffusione che subiscono in gas contenenti pulviscolo o nebbie, il loro assorbimento (non proporzionale alla massa attraversata) nei vari elementi e quindi la relazione fra quello e il peso atomico di questi, la loro penetrabilità attraverso i tessuti molli dell'organismo e l'opacità per essi del tessuto osseo, le loro azioni chimiche su la lastra fotografica e la capacità di destare la luminescenza in varie sostanze, la loro indifferenza rispetto ai campi elettrici e magnetici, sono tutte dimostrate nella Sua prima Nota: *Ueber eine neue Art von Strahlen.*

Nel successivo svolgersi delle ricerche su i raggi X riesce difficile stabilire esattamente la priorità cronologica delle scoperte delle varie altre proprietà dei raggi Röntgen; molti fatti furono pubblicati quasi contemporaneamente da Lui e da altri,

ma, dato il metodo di lavoro del Röntgen, non si può non attribuire il merito anche a Lui. Ed ecco nelle Sue note successive dimostrate: l'influenza della natura dell'anticatodo con l'ingegnoso uso di un anticatodo composito, la distribuzione non uniforme dell'energia irraggiata dall'anticatodo, l'emissione di raggi X anche sulla parte posteriore dell'anticatodo se questo è di metallo leggero, l'emissione di raggi secondari da un corpo irraggiato con raggi X e finalmente la conducibilità acquisita dai gas attraversati da quelli e la persistenza di essa per qualche tempo dopo cessato l'irraggiamento.

Quanta somma di lavoro nelle tre Note del Röntgen susseguitesi fra il 1895 e il 1897! Nell'opera Sua avviene qui un arresto; il Suo lavoro scientifico non riprende che dopo parecchio tempo con un lungo e magistrale gruppo di ricerche circa l'influenza dei raggi X su la conducibilità elettrica della Calcite, con le quali dimostra che questa conducibilità può diventare fino a 200 volte maggiore con tale irraggiamento, e che, soppresso questo, non riacquista il suo valore primitivo se non dopo parecchi anni, e cioè con un processo lentissimo che si può accelerare con un aumento di temperatura.

Segue un altro silenzio e poi ... ecco la morte!

La Fisica non dimenticherà mai come il Röntgen abbia messo a disposizione delle sue indagini più delicate su la struttura dei corpi un mezzo di straordinaria efficacia. Non è ancora il caso di considerare quali servigi abbiano portato o possano portare i raggi X nel campo della terapia; ancora troppo lungo è il cammino da percorrere per giungere a risultati sicuramente concreti. Ma basta già l'aiuto che essi hanno prestato e quotidianamente prestano nella pratica chirurgica per assicurare alla nobile e disinteressata figura di Guglielmo Corrado Röntgen la gratitudine di quel mondo che, come a pochi è dato di fare, non certo da debitore Egli ha testè per sempre abbandonato.

Ricerche sulle diossime

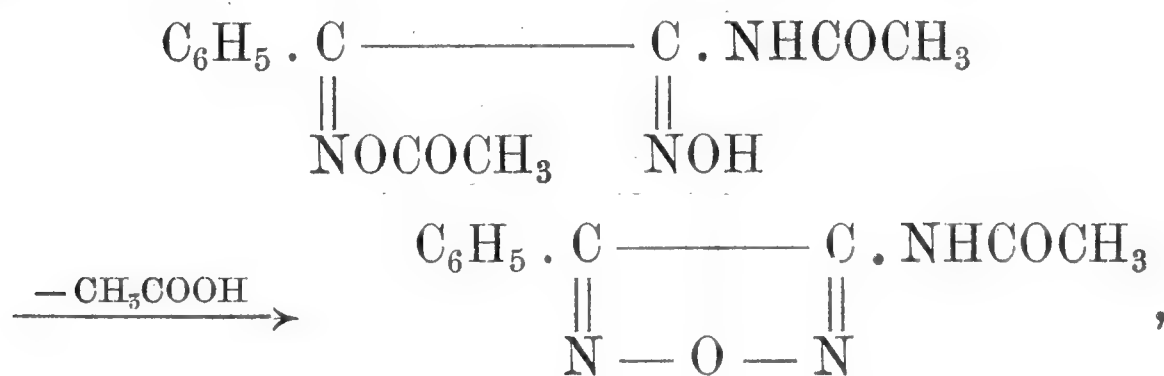
Nota X del Socio nazionale residente prof. GIACOMO PONZIO
e del dott. LODOVICO AVOGADRO

Abbiamo detto nella Nota VI su questo argomento (1) che per chiarire la natura dell'isomeria delle due fenilaminogliossime $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NH_2$ non era possibile ricorrere, come nei casi precedentemente esaminati, all'impiego del tetrossido di azoto. Una soluzione elegante del problema la diamo ora, deducendola dallo studio del comportamento della α e della β-fenilaminogliossima verso l'anidride acetica.

Le esperienze più avanti riferite dimostrano infatti che detto reattivo sostituisce sempre due atomi di idrogeno con due acetili, ma facendo agire a freddo l'anidride acetica sulla α-fenilaminogliossima vengono sostituiti un atomo di idrogeno ossimico ed un atomo di idrogeno aminico, risultando il diacetilderivato $C_6H_5 . C(:NOCOCH_3) . C(:NOH) . NHCOCH_3$; mentre facendola agire, nelle identiche condizioni, sulla β-fenilaminogliossima vengono sostituiti tutti e due gli atomi di idrogeno ossimico e risulta il diacetilderivato $C_6H_5 . C(:NOCOCH_3) . C(:NOCOCH_3) . NH_2$. Trattando poi, alla temperatura ordinaria, i due diacetilderivati con idrossido di sodio, si elimina da ognuno di essi una molecola di acido acetico, e dal diacetilderivato della α-fenilaminogliossima si ottiene l'acetilderivato del fenilaminofurazano

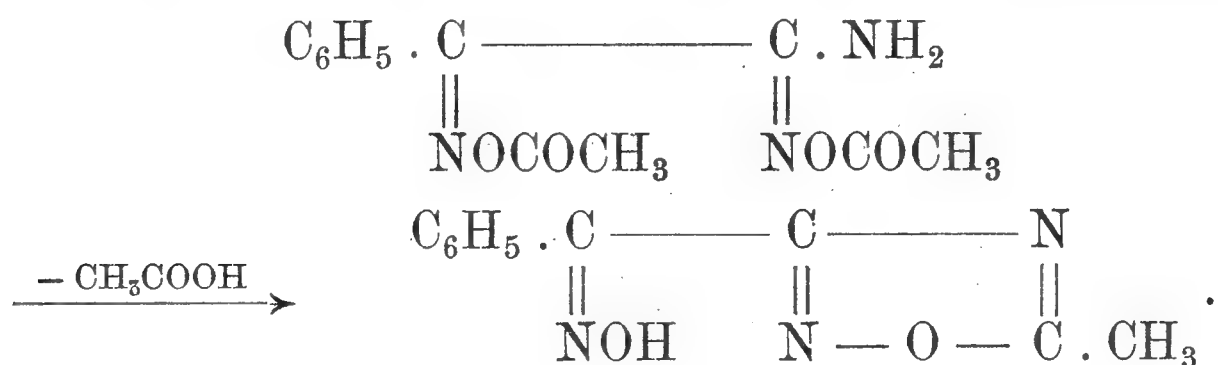
$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 . C & \text{———} & C . NHCOCH_3 \\ \| & & \| \\ NOCOCH_3 & & NOH \end{array}$$

$$\xrightarrow{-CH_3COOH} \quad \begin{array}{ccc} C_6H_5 . C & \text{———} & C . NHCOCH_3 \\ \| & & \| \\ N & — O — & N \end{array} ,$$

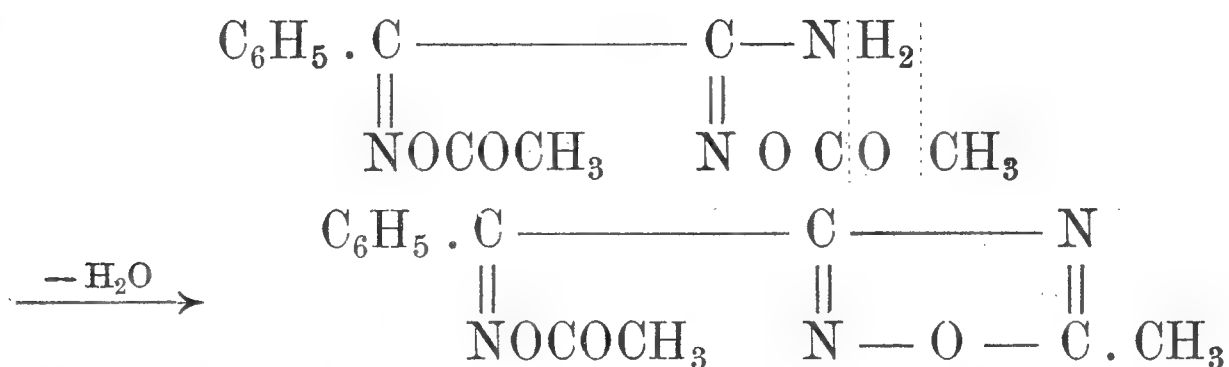
---

(1) " Gazz. Chim. Ital. „, *53*, I, 25 (1923).

mentre dal diacetilderivato della β-fenilaminogliossima si ottiene l'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(a b_1)-diazolo

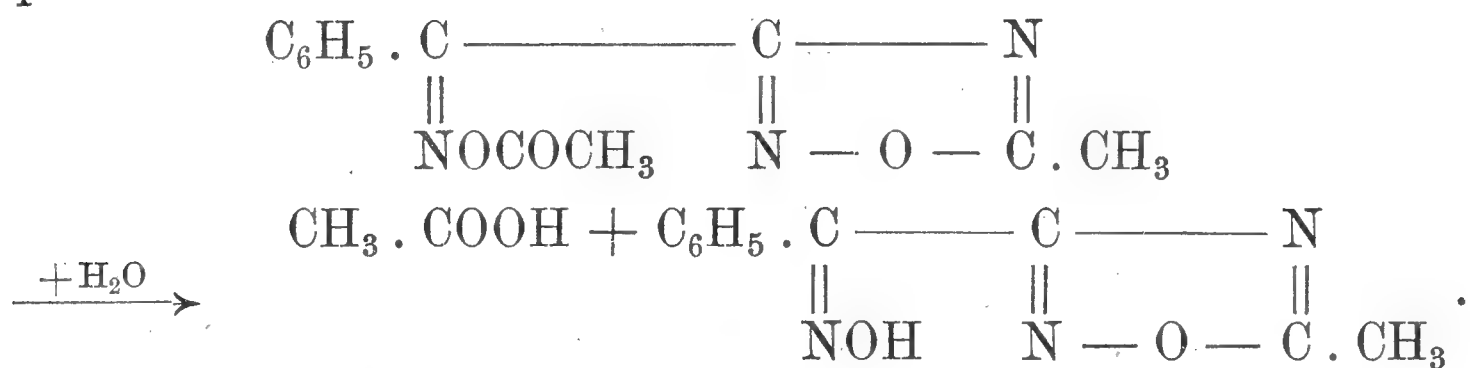
$$\begin{array}{lcl} C_6H_5 . C & \text{———} & C . NH_2 \\ \quad \| & & \| \\ \quad NOCOCH_3 & & NOCOCH_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{- CH_3COOH} \begin{array}{lcccl} C_6H_5 . C & \text{——} & C & \text{——} & N \\ \quad \| & & \| & & \| \\ \quad NOH & & N & - O - & C . CH_3 \end{array} .$$

La reazione che dà origine a quest'ultima procede però in due tempi: dapprima, per eliminazione di una molecola d'acqua a spese dell'idrogeno aminico e dell'ossigeno carbonilico vicini, risulta l'acetilderivato dell'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(a b_1)-diazolo

$$\begin{array}{lcl} C_6H_5 . C & \text{———} & C—N \vdots H_2 \vdots \\ \quad \| & & \| \\ \quad NOCOCH_3 & & N\ O\ C \vdots O \vdots CH_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{- H_2O} \begin{array}{lcccl} C_6H_5 . C & \text{———} & C & \text{——} & N \\ \quad \| & & \| & & \| \\ \quad NOCOCH_3 & & N & - O - & C . CH_3 \end{array}$$

il quale viene poi idrolizzato in acido acetico e nell'ossima corrispondente

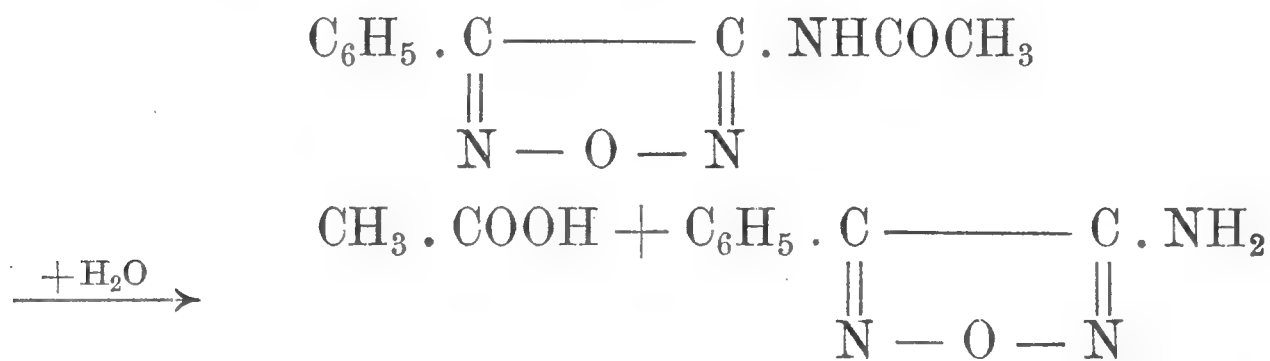
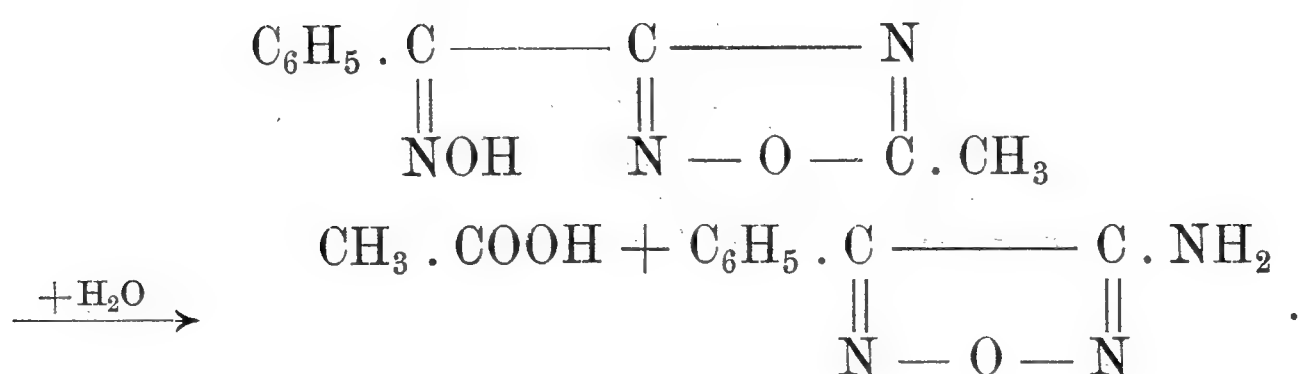
$$\begin{array}{lcccl} C_6H_5 . C & \text{———} & C & \text{——} & N \\ \quad \| & & \| & & \| \\ \quad NOCOCH_3 & & N & - O - & C . CH_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{+ H_2O} CH_3 . COOH + \begin{array}{lcccl} C_6H_5 . C & \text{——} & C & \text{——} & N \\ \quad \| & & \| & & \| \\ \quad NOH & & N & - O - & C . CH_3 \end{array} .$$

Riscaldando, infine, sia l'acetilderivato del fenilaminofurazano, che l'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(a b_1)-diazolo con acido cloridrico diluito, essi reagiscono con una molecola di acqua, e, formandosi nei due casi una molecola di acido acetico, si origina fenilaminofurazano

$$\begin{array}{lcl} C_6H_5 . C & \text{——} & C . NHCOCH_3 \\ \quad \| & & \| \\ \quad N & - O - & N \end{array}$$

$$\xrightarrow{+ H_2O} CH_3 . COOH + \begin{array}{lcl} C_6H_5 . C & \text{——} & C . NH_2 \\ \quad \| & & \| \\ \quad N & - O - & N \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C \text{———} C \text{———} N \\ \quad\;\; \| \qquad\quad \| \qquad\quad \| \\ \quad NOH \quad N - O - C . CH_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{+H_2O} \begin{array}{l} CH_3 . COOH + C_6H_5 . C \text{———} C . NH_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad N - O - N \end{array} .$$

Il comportamento verso l'anidride acetica delle due forme della fenilaminogliossima conferma, in modo a nostro parere indiscutibile, che esse non sono, come vorrebbe la teoria di Hantzsch e Werner sull'isomeria delle α-diossime, isomeri geometrici, e che esse non differiscono fra di loro semplicemente per la posizione spaziale degli ossidrili ossimici; bensì pel fatto che nella α-fenilaminogliossima, *i due ossiminogruppi non sono equivalenti*, poichè uno solo si lascia sostituire l'idrogeno coll'acetile; mentre, nella β-fenilaminogliossima, *i due ossiminogruppi sono equivalenti*, poichè ambedue si lasciano sostituire l'idrogeno coll'acetile. E, riassumendo i risultati delle ricerche da noi fatte sinora sulle α-diossime, crediamo di poter dedurre la regola seguente: *quando una gliossima* $R . C(:NOH) . C(:NOH) . R_1$ (ove R_1 può anche essere H od R) *esiste in due forme*, una labile ed una stabile (ottenibile dalla forma labile per riscaldamento con acido acetico diluito), *queste differiscono fra di loro perchè nella forma labile* (da noi detta forma α) *i due ossiminogruppi si comportano verso alcuni reattivi come se avessero struttura differente, mentre nella forma stabile* (da noi detta forma β) *i due ossiminogruppi hanno il medesimo comportamento verso tutti i reattivi.*

Rimarrebbe da spiegare come le forme β delle gliossime, le quali secondo noi sono vere α-diossime, diano coi metalli dell'VIII gruppo *sali complessi* derivanti da due molecole di gliossima per sostituzione di due atomi di idrogeno ossimico, uno per ciascuna molecola, con un atomo di metallo bivalente; ma quanto abbiamo detto nella Nota I (1) sul modo di formazione di tali *sali complessi* per azione diretta delle gliossime in soluzione acquosa sui metalli compatti, ed esperienze in corso,

---

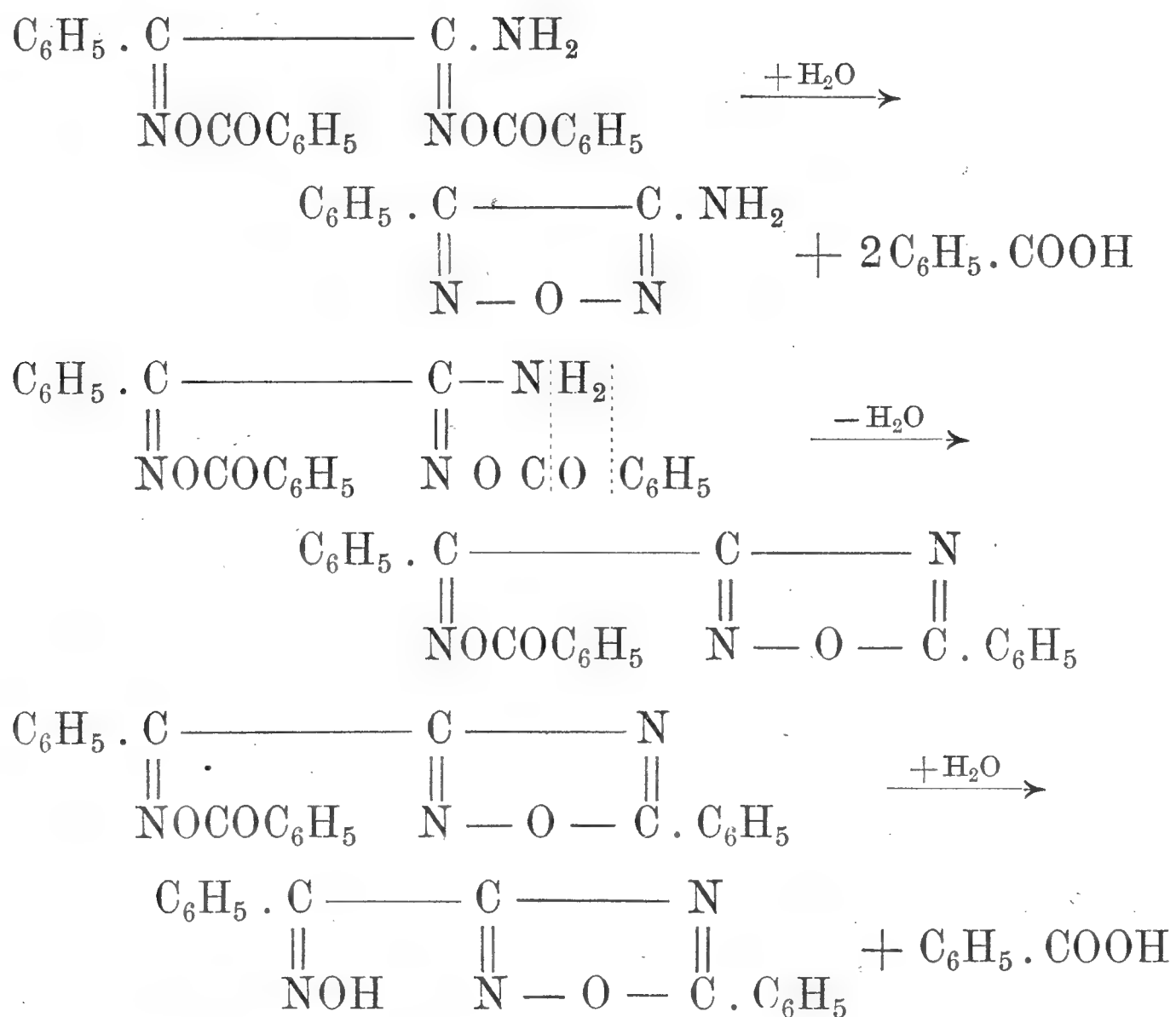
(1) " Gazz. Chim. Ital. ", *51*, II, 213 (1921).

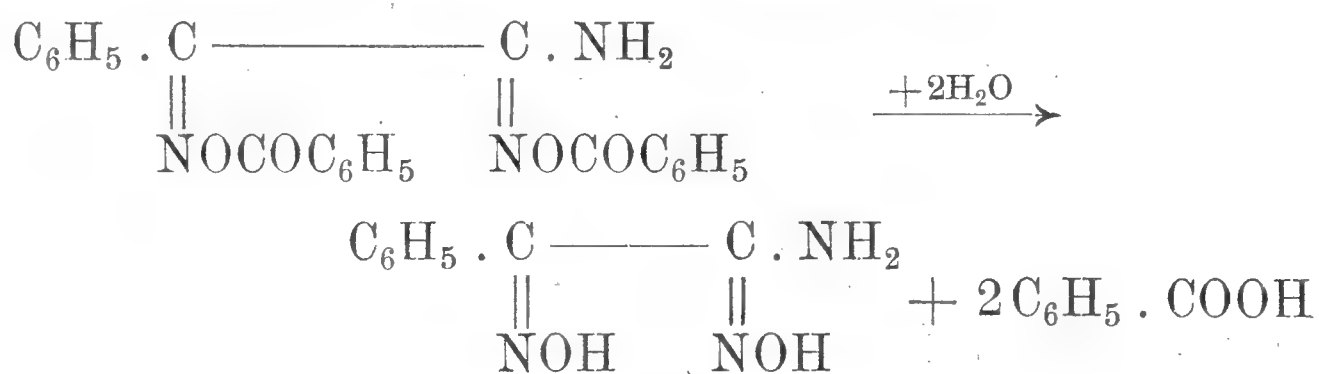
ci inducono a dissentire dalle opinioni finora accettate riguardo alla loro struttura.

Anche i dibenzoilderivati delle due fenilaminogliossime che da queste risultano per sostituzione di due benzoili ai due atomi di idrogeno ossimico, offrono un interesse notevole per l'argomento del quale ci stiamo occupando. Il dibenzoilderivato della α-fenilaminogliossima $C_6H_5.C(:NOCOC_6H_5).C(:NOCOC_6H_5).NH_2$ trattato con idrossido di sodio dà contemporaneamente origine, per le reazioni

$$\begin{array}{lll} C_6H_5.C & \text{———} & C.NH_2 \\ \quad \| & & \| \\ \quad NOCOC_6H_5 & & NOCOC_6H_5 \end{array} \xrightarrow{+H_2O} \begin{array}{lll} C_6H_5.C & \text{———} & C.NH_2 \\ \quad \| & & \| \\ \quad N & —O— & N \end{array} + 2C_6H_5.COOH$$

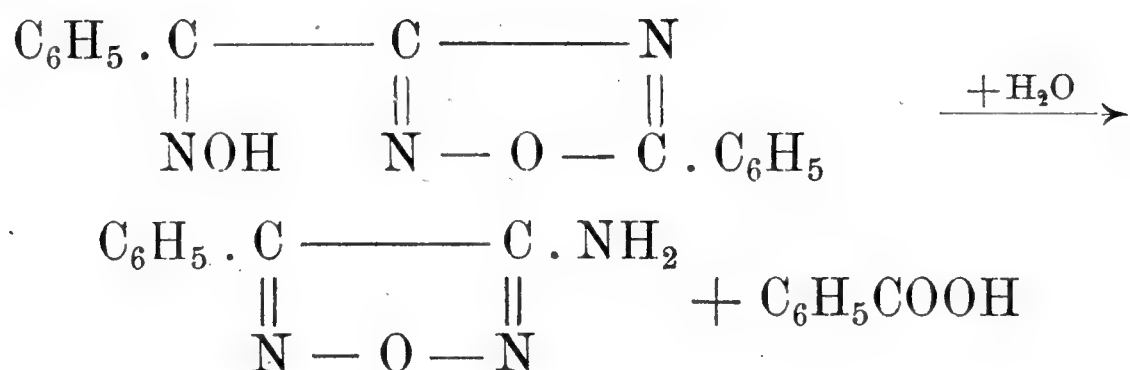
$$\begin{array}{lll} C_6H_5.C & \text{———} & C—NH_2 \\ \quad \| & & \| \\ \quad NOCOC_6H_5 & & N\,O\,CO\,C_6H_5 \end{array} \xrightarrow{-H_2O} \begin{array}{lllll} C_6H_5.C & \text{———} & C & \text{———} & N \\ \quad \| & & \| & & \| \\ \quad NOCOC_6H_5 & & N & —O— & C.C_6H_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} C_6H_5.C & \text{———} & C & \text{———} & N \\ \quad \| & & \| & & \| \\ \quad NOCOC_6H_5 & & N & —O— & C.C_6H_5 \end{array} \xrightarrow{+H_2O} \begin{array}{lllll} C_6H_5.C & \text{———} & C & \text{———} & N \\ \quad \| & & \| & & \| \\ \quad NOH & & N & —O— & C.C_6H_5 \end{array} + C_6H_5.COOH$$

a fenilaminofurazano $C_6H_5.(C_2N_2O).NH_2$ ed all'ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo $C_6H_5.C(:NOH).(C_2N_2O).C_6H_5$; mentre il dibenzoilderivato della β-fenilaminogliossima $C_6H_5.C(:NOCOC_6H_5).C(:NOCOC_6H_5).NH_2$ dà col suddetto reattivo contemporaneamente origine, per la reazione

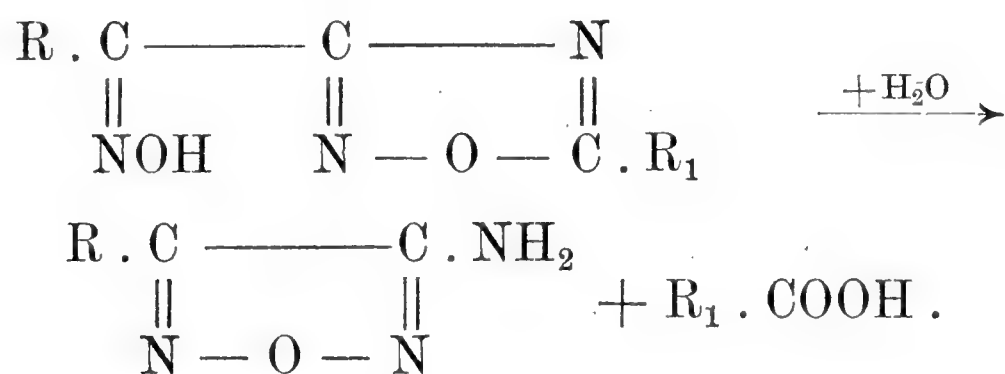
$$\begin{array}{lll} C_6H_5.C & \text{———} & C.NH_2 \\ \quad \| & & \| \\ \quad NOCOC_6H_5 & & NOCOC_6H_5 \end{array} \xrightarrow{+2H_2O} \begin{array}{lll} C_6H_5.C & \text{———} & C.NH_2 \\ \quad \| & & \| \\ \quad NOH & & NOH \end{array} + 2C_6H_5.COOH$$

a β-fenilaminogliossima $C_6H_5 . C (: NOH) . C (: NOH) . NH_2$, e, per reazioni analoghe a quelle scritte sopra, all'ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo $C_6H_5 . C (: NOH) . (C_2N_2O) . C_6H_5$.

Però, se dal dibenzoilderivato della β-fenilaminogliossima non si ottiene direttamente il fenilaminofurazano, si può tuttavia arrivare egualmente a quest'ultimo, per successivo riscaldamento dell'ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo con acido cloridrico diluito

$$
\begin{array}{l}
C_6H_5 . C \text{———} C \text{———} N \\
\qquad \| \qquad\quad \| \qquad\quad \| \qquad\qquad \xrightarrow{+H_2O} \\
\quad NOH \quad N - O - C . C_6H_5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
C_6H_5 . C \text{———} C . NH_2 \\
\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad + C_6H_5COOH \\
\qquad N - O - N
\end{array}
$$

precisamente come per ottenere il metilaminofurazano $CH_3 . (C_2N_2O) . NH_2$ dal dibenzoilderivato della metilaminogliossima (la quale è una forma β) $CH_3 . C (: NOCOC_6H_5) . C (: NOCOC_6H_5) . NH_2$ è necessario passare per l'ossima del 3-acetil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo $CH_3 . C (: NOH) . (C_2N_2O) . C_6H_5$ [1]. Ma il metilaminofurazano risulta anche per riscaldamento con acido cloridrico diluito dell'ossima del 3-acetil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo $CH_3 . C (: NOH) . (C_2N_2O) . CH_3$ (loc. cit.), ed il fenilaminofurazano risulta allo stesso modo dall'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo $C_6H_5 . C (: NOH) . (C_2N_2O) . CH_3$; per conseguenza resta stabilito un metodo generale di preparazione degli aminofurazani $R . (C_2N_2O) . NH_2$ il quale consiste nell'azione dell'acqua sulle ossime dei 3-acil-5-alchil (od aril) -furo-(ab_1)-diazoli

$$
\begin{array}{l}
R . C \text{———} C \text{———} N \\
\quad \| \qquad\quad \| \qquad\quad \| \qquad\qquad \xrightarrow{+H_2O} \\
NOH \quad N - O - C . R_1
\end{array}
$$

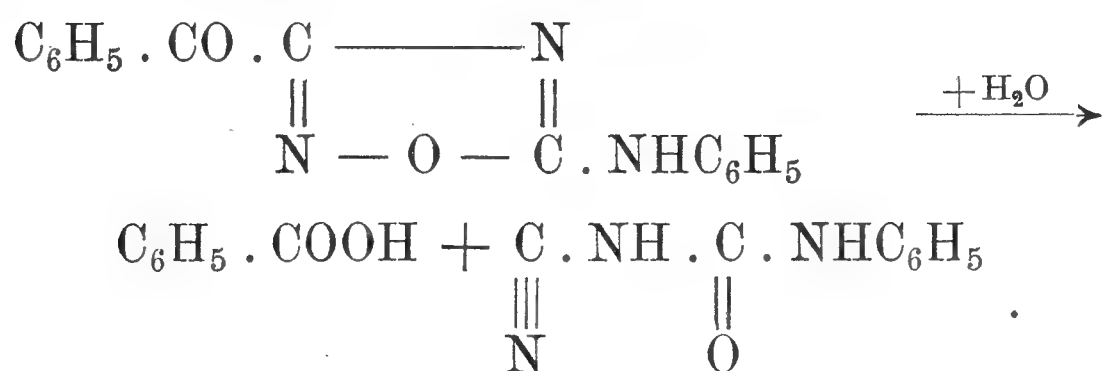
$$
\begin{array}{l}
R . C \text{———} C . NH_2 \\
\quad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad + R_1 . COOH . \\
\quad N - O - N
\end{array}
$$

A questo proposito osserviamo come il comportamento delle ossime dei 3-acil-5-aril-furo-(ab_1)-diazoli sia assolutamente di-

---

[1] Nota VII.

verso da quello dei loro isomeri 3-acil-5-aminoaril-furo-(ab_1)-diazoli R.CO.(C_2N_2O).NHAr studiati da Holleman (1), da Boeseken (2) e da Wieland e Gmelin (3). Infatti, per es., mentre l'ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo dà per azione dell'acqua (riscaldamento con acido cloridrico diluito) acido benzoico e fenilaminofurazano, il 3-benzoil-5-aminofenil-(ab_1)-diazolo dà, per riscaldamento con idrossido di sodio, acido benzoico e fenilcianurea, cioè reagisce coll'acqua in questo modo:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . CO . C \text{———} N \\ \qquad\qquad\;\; \| \qquad\quad \| \\ \qquad\qquad N - O - C . NHC_6H_5 \end{array} \xrightarrow{+H_2O}$$

$$C_6H_5 . COOH + \underset{\underset{N}{|||}}{C} . NH . \underset{\underset{O}{\|}}{C} . NHC_6H_5 .$$

XXV. — **α-fenilaminogliossima** $C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).NH_2$ (p. f. 154°).

Diacetilderivato $C_6H_5.C(:NOCOCH_3).C(:NOH).NHCOCH_3$. Si ottiene trattando a freddo la α-fenilaminogliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso e cristallizza dall'alcool in aghi appiattiti fusibili a 150°-151° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1228: N cc. 17,6 a 26° e 724,700 mm.
Trovato %   N 15,68.
Per $C_{12}H_{13}O_4N_3$ calc.: 15,96.

È poco solubile in etere; solubile a freddo in acetone; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool ed in cloroformio; poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in benzene; quasi insolubile nella ligroina anche bollente.

Agitato con idrossido di sodio al 20 % raffreddato con ghiaccio si trasforma poco a poco nell'acetilderivato del fenilaminofurazano $C_6H_5.(C_2N_2O).NHCOCH_3$ che in parte si idrolizza poi in fenilaminofurazano $C_6H_5.(C_2N_2O).NH_2$ il quale

(1) " Rec. trav. chim. „, *11*, 263 (1892).
(2) " Id. „, *16*, 306, 338 (1897) e *29*, 277 (1910).
(3) *Ann. 375*, 297 (1910).

risulta invece esclusivamente facendo bollire il diacetilderivato coll'idrossido di sodio.

Dibenzoilderivato $C_6H_5.C(:NOCOC_6H_5).C(:NOCOC_6H_5).NH_2$. Si forma benzoilando con cloruro di benzoile la α-fenilaminogliossima sciolta nell'idrossido di sodio al 20 % e cristallizza dall'alcool in fini aghi fusibili a 189°-190° e decomponibili qualche grado più alto.

Sostanza gr. 0,1166: N cc. 11,3 a 24° e 727,060 mm.
Trovato %: N 10,70.
Per $C_{22}H_{17}O_4N_3$ calc.: 10,85.

È quasi insolubile in etere, benzene e ligroina anche a caldo; solubile a freddo in acetone; discretamente a caldo e poco a freddo in alcool ed in cloroformio.

Il punto di fusione da noi trovato per questo composto è notevolmente più elevato di quello (176°) dato da Wieland e Semper [1]; facciamo però notare che noi l'abbiamo preparato benzoilando la α-fenilaminogliossima pura, ed essi, invece, utilizzando le acque madri dell'azione dell'ammoniaca sul perossido della fenilgliossima (fenilfurossano).

Lentamente alla temperatura ordinaria, o rapidamente se riscaldato a 100° con idrossido di sodio al 20 % ed un po' di alcool, si trasforma in fenilaminofurazano e nell'ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo. Eliminando l'alcool, diluendo con acqua e lasciando raffreddare, il fenilaminofurazano $C_6H_5 . (C_2N_2O) . NH_2$ si separa cristallizzato; neutralizzando il liquido filtrato con una corrente di anidride carbonica precipita l'*ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo* $C_6H_5 . C(:NOH) . (C_2N_2O) . C_6H_5$ la quale cristallizzata dall'alcool acquoso si presenta in fini aghi fusibili a 148° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1378: N cc. 18,8 a 10° e 726,250 mm.
Trovato %: N 15,79.
Per $C_{15}H_{11}O_2N_3$ calc.: 15,84.

È solubile a freddo in etere, acetone, cloroformio; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool ed in benzene; quasi insolubile in ligroina bollente.

---

(1) *Ann.* *358*, 62 (1907).

Riscaldata con acido cloridrico al 20 $^0/_0$ si trasforma lentamente in fenilaminofurazano; è invece stabile verso l'idrossido di sodio.

XXVI. — **β-fenilaminogliossima** $C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).NH_2$ (p. f. 195°).

Diacetilderivato $C_6H_5.C(:NOCOCH_3).C(:NOCOCH_3).NH_2$. Si prepara acetilando a freddo la β-fenilaminogliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso e cristallizza dall'alcool in grossi prismi fusibili a 133°-134° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1101: N cc. 15°5 a 13° e 728,440 mm.
Trovato $^0/_0$: N 16,17.
Per $C_{12}H_{13}O_4N_3$ calc.: 15,96.

È discretamente solubile a caldo e meno a freddo in alcool ed in benzene; solubile a freddo in cloroformio ed in acetone; poco solubile in etere; pochissimo solubile nella ligroina bollente e quasi affatto a freddo.

Agitato alla temperatura ordinaria con idrossido di sodio al 20 $^0/_0$ vi si scioglie in breve tempo completamente, trasformandosi in parte nella gliossima da cui deriva ed in parte nell'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo. Diluendo la soluzione e neutralizzandola con anidride carbonica i due composti precipitano; sospendendo in acqua il precipitato e trattandolo con acido cloridrico diluito, la β-fenilaminogliossima si scioglie e può essere ricuperata aggiungendo al liquido filtrato un eccesso di acetato sodico cristallizzato.

L'*ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo* $C_6H_5.C(:NOH).(C_2N_2O).CH_3$ che rimane indisciolta si purifica per ripetute cristallizzazioni dall'alcool o dall'acetone, ed allora costituisce aghetti bianchi splendenti. Questi riscaldati fondono a 202°-203° con leggerissima decomposizione in un liquido il quale lasciato solidificare fonde poi a 182°-183°: come diremo più avanti, ha luogo in dette condizioni una isomerizzazione dell'ossima nell'acetilderivato del fenilaminofurazano $C_6H_5.(C_2N_2O).NHCOCH_3$.

Sostanza gr. 0,1145: N cc. 20 a 11° e 741,517 mm.
Trovato %: N 20,57.
Per $C_{10}H_9O_2N_3$ calc.: 20,68.

È poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in alcool ed in acetone; quasi insolubile in etere, benzene, cloroformio anche a caldo; insolubile in ligroina.

È solubile negli idrossidi dei metalli alcalini e riprecipita inalterata per aggiunta di acidi nei quali è insolubile.

Riscaldata all'ebollizione con acido cloridrico al 20 % si trasforma in fenilaminofurazano come il suo isomero acetilaminofenilfurazano $C_6H_5 . (C_2N_2O) . NHCOCH_3$; per contro, a differenza di quest'ultimo, resiste all'azione dell'idrossido di sodio ed è benzoilabile.

Trattata a freddo con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso dà *l'acetilderivato dell'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo* $C_6H_5 . C (: NOCOCH_3) . (C_2N_2O) . CH_3$ il quale cristallizza dalla ligroina in aghi fusibili a 101°-102° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,0799: N cc. 11,4 a 9° e 747,916 mm.
Trovato %: N 17,07.
Per $C_{12}H_{11}O_3N_3$ calc.: 17,14.

È insolubile in etere, solubile a freddo in benzene, acetone, cloroformio; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool; poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in ligroina.

L'idrossido di sodio anche diluitissimo lo idrolizza con rapidità alla temperatura ordinaria, ed è per questa ragione che, per quanto esso sia il prodotto diretto dell'azione dell'idrossido di sodio sul diacetilderivato della fenilaminogliossima, si ottiene in sua vece l'ossima corrispondente.

Sciogliendo l'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo in idrossido di sodio al 10 % [1] e trattandola con cloruro di benzoile se ne ha il *benzoilderivato* $C_6H_5 . C (: NOCOC_6H_5) . (C_2N_2O) . CH_3$ il quale cristallizzato dall'alcool si presenta in lunghi e fini aghi fusibili a 152°-153° senza decomposizione.

---

[1] L'idrossido di sodio più concentrato lo trasforma in un sale poco solubile.

Sostanza gr. 0,1080: N cc. 13 a 18° e 729,183 mm.
Trovato %: N 13,89.
Per $C_{17}H_{13}O_3N_3$ calc.: 13,68.

È solubile a freddo in cloroformio ed acetone; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool ed in benzene; pochissimo solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in ligroina ed in etere.

Dibenzoilderivato della β-fenilaminogliossima C_6H_5 . C (: $NOCOC_6H_5$) . C (: $NOCOC_6H_5$) . NH_2. Ottenuto benzoilando con cloruro di benzoile la β-fenilaminogliossima e cristallizzato dall'alcool costituisce prismetti appiattiti fusibili a 185°-186° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1825: N cc. 17,6 a 24° e 727,060 mm.
Trovato %: N 10,64.
Per $C_{22}H_{17}O_4N_3$ calc.: 10,85.

È poco solubile a freddo e pochissimo a caldo nell'alcool; quasi insolubile anche a caldo nei comuni solventi organici.

Lentamente alla temperatura ordinaria e rapidamente se riscaldato verso 100° con idrossido di sodio al 20 % ed un po' di alcool si trasforma in parte nella gliossima da cui deriva ed in parte nell'ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo, ambedue solubili nell'idrossido di sodio.

Facendo passare nel liquido, dopo diluizione, una corrente di anidride carbonica esse precipitano assieme; raccogliendole e trattando la loro miscela con acido cloridrico diluito la β-fenilaminogliossima C_6H_5 . C (: NOH) . C (: NOH) . NH_2 si scioglie e si può ricuperare aggiungendo al filtrato acetato sodico cristallizzato, mentre l'ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-(ab_1)-diazolo rimane indisciolta. Quest'ultima cristallizzata dall'alcool acquoso, si presenta in aghetti fusibili a 148° ed è identica in tutte le sue proprietà col composto ottenuto dal dibenzoilderivato della α-fenilaminogliossima.

Sostanza gr. 0,1152: N cc. 15,6 a 9° e 730,916 mm.
Trovato %: N 15,84.
Per $C_{15}H_{11}O_2N_3$ calc.: 15,84.

XXVII. — **Fenilaminofurazano** $C_6H_5 . C \text{———} C . NH_2 .$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ N & — O — & N \end{array}$$

Si forma: *a)* per riscaldamento con idrossido di sodio del diacetilderivato della α-fenilaminogliossima $C_6H_5 . C (: NOCOCH_3) . C (: NOH) . NHCOCH_3$ e del dibenzoilderivato della stessa $C_6H_5 . C (: NOCOC_6H_5) . C (: NOCOC_6H_5) . NH_2$; *b)* per riscaldamento con acido cloridrico diluito dell'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-$(a b_1)$-diazolo $C_6H_5 . C (: NOH) . (C_2N_2O) . CH_3$ e dell'ossima del 3-benzoil-5-fenil-furo-$(a b_1)$-diazolo $C_6H_5 . C(: NOH).(C_2N_2O).C_6H_5$. Conviene prepararlo facendo bollire per qualche minuto con idrossido di sodio il diacetilderivato della α-fenilaminogliossima ed allora lo si ottiene con rendimento quantitativo. Cristallizzato dall'alcool acquoso si presenta in prismetti bianchi; cristallizzato dall'acqua in lunghi aghi fusibili a 98°-99° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1926: CO_2 gr. 0,4217, H_2O gr. 0,0782.
Sostanza gr. 0,1076: N cc. 24,2 a 13° e 730,261 mm.

Trovato %:	C 59,72	H 4,51	N 26,01.
Per $C_8H_7ON_3$ calc.:	59,62	4,34	26,08.

È poco solubile nell'acqua bollente e quasi insolubile in quella fredda; solubile a freddo in alcool, acetone, cloroformio, benzene; poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in ligroina.

Gli idrossidi dei metalli alcalini, l'acido cloridrico concentrato, l'acido nitrico 4N, l'acido solforico concentrato non lo alterano neppure a caldo e può essere cristallizzato dalle soluzioni bollenti dei tre primi e precipitato dalla soluzione nell'ultimo per diluizione con acqua. Invece riscaldato con acido nitrico $d = 1{,}4$ reagisce dopo un po' di tempo con grande violenza dando acido p-nitrobenzoico.

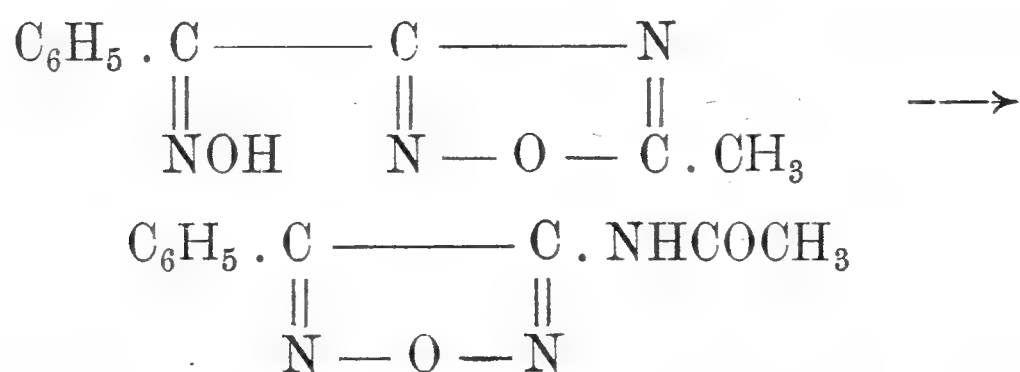
Monoacetilderivato $C_6H_5 . (C_2N_2O) . NHCOCH_3$. Risulta, come già fu detto, per azione a freddo dell'idrossido di sodio al 20 % sul diacetilderivato della α-fenilaminogliossima $C_6H_5 . C (: NOCOCH_3) . C (: NOH) . NHCOCH_3$ e rimane disciolto nel liquido dal quale lo si precipita con una corrente di anidride carbonica o con acido acetico diluito dopo aver separato colla

filtrazione un po' di fenilaminofurazano che contemporaneamente risulta nella sua successiva idrolisi.

Si ottiene anche riscaldando per breve tempo con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso il fenilaminofurazano, il che ne dimostra la struttura.

Infine si origina dall'ossima del 3-benzoil-5-metil-furo-(ab_1)-diazolo per una interessante trasposizione intramolecolare

$$\begin{array}{lcl} C_6H_5 . C \text{———} & C \text{———} & N \\ \quad \| & \| & \| \\ \quad NOH & N — O — & C . CH_3 \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} C_6H_5 . C \text{———} & C . NHCOCH_3 \\ \quad \| & \| \\ \quad N — O — & N \end{array}$$

la quale ha luogo istantaneamente riscaldando detta ossima alla sua temperatura di fusione (202°-203°) e non essendo quasi accompagnata da decomposizione dà un prodotto che dopo solidificazione fonde senz'altro a 181° (1).

In qualsiasi modo preparato il monoacetilderivato del fenilaminofurazano $C_6H_5 . (C_2N_2O) . NHCOCH_3$ cristallizza dall'alcool in aghi splendenti fusibili a 181°-182° senza decomposizione.

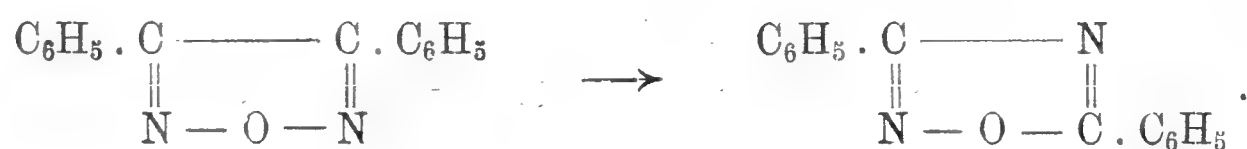
Sostanza gr. 0,2050: CO_2 gr. 0,4465, H_2O gr. 0,0867.
Sostanza gr. 0,1300: N cc. 23 a 11° e 727,508 mm.

Trovato %:	C 59,39	H 4,69	N 20,45.
Per $C_{10}H_9O_2N_3$ calc.:	59,11	4,43	20,68.

È discretamente solubile a caldo e pochissimo a freddo nell'alcool; poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in benzene, etere, cloroformio, acetone; quasi insolubile in ligroina bollente.

---

(1) L'isomerizzazione inversa, di un furazano in un'azossima, è stata osservata da Dodge (*Ann.* *264*, 178 (1891)), il quale per prolungato riscaldamento potè parzialmente trasformare il difenilfurazano in dibenzenilazossima (3,5-difenil-furo-(ab_1)-diazolo)

$$\begin{array}{lc} C_6H_5 . C \text{———} & C . C_6H_5 \\ \quad \| & \| \\ \quad N — O — & N \end{array} \longrightarrow \begin{array}{lc} C_6H_5 . C \text{———} & N \\ \quad \| & \| \\ \quad N — O — & C . C_6H_5 \end{array}.$$

Si scioglie nell'idrossido di sodio al 20 °/₀ e riprecipita inalterato per aggiunta di acidi. La soluzione trattata con cloruro di benzoile non dà benzoilderivato; riscaldata all'ebollizione si intorbida dopo qualche minuto in seguito alla separazione di fenilaminofurazano risultante per idrolisi del monoacetilderivato disciolto.

Dà pure facilmente origine a fenilaminofurazano per riscaldamento con acido cloridrico al 20 °/₀.

Diacetilderivato $C_6H_5 . (C_2N_2O) . N (COCH_3)_2$. Si forma facendo bollire a lungo con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso il fenilaminofurazano od il monoacetilderivato di questo. Nei due casi il prodotto della reazione contiene sempre un po' di monoacetilfenilaminofurazano, facilmente eliminabile perchè insolubile nell'etere di petrolio bollente, nel quale il diacetilfenilaminofurazano si scioglie invece alquanto. Purificato per ripetute cristallizzazioni dall'etere di petrolio si ottiene in grosse lamine lunghe talora parecchi centimetri e fusibili a 71° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,1097: N cc. 16 a 12° e 746,582 mm.
Trovato °/₀: N 17,18.
Per $C_{12}H_{11}O_3N_3$ calc.: 17,14.

È solubile a freddo in alcool, etere, cloroformio, acetone, benzene; discretamente solubile a caldo e poco a freddo in ligroina; poco a caldo e pochissimo a freddo in etere di petrolio.

Trattato alla temperatura ordinaria con idrossido di sodio al 20 °/₀ vi si scioglie lentamente trasformandosi in monoacetilaminofenilfurazano $C_6H_5 . (C_2N_2O) . NHCOCH_3$; riscaldato all'ebollizione dà direttamente il fenilaminofurazano, insolubile.

Azofenilfurazano $C_6H_5 . (C_2N_2O) . N : N . (C_2N_2O) . C_6H_5$. La deidrogenazione del fenilaminofurazano con permanganato potassico in presenza di acido solforico o di idrossido di potassio non dà buoni risultati, ed è necessario effettuarla coll'anidride cromica in soluzione acetica bollente. Però anche in questo caso assieme all'azofenilfurazano si forma una piccola quantità di una sostanza che non è possibile eliminare colla cristallizzazione. Conviene per conseguenza sciogliere in etere il prodotto della

reazione e trattare con fenilidrazina; in tal modo l'azo si riduce in idrazo, il quale purificato per cristallizzazione dal cloroformio si riossida nuovamente in azo riscaldandone la soluzione in acido acetico glaciale con anidride cromica. L'*azofenilfurazano* cristallizzato dall'alcool costituisce lunghi aghi aranciati fusibili a 134°-135° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,0756: N cc. 17,2 a 10° e 725,208 mm.
Trovato %: N 26,31.
Per $C_{16}H_{10}O_2N_6$ calc.: 26,41.

È poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in alcool ed in ligroina; molto solubile a caldo e meno a freddo in benzene; discretamente solubile nell'etere; solubile a freddo in acetone ed in cloroformio.

Idrazofenilfurazano $C_6H_5.(C_2N_2O).NH.NH.(C_2N_2O).C_6H_5$. Si ottiene trattando con fenilidrazina la soluzione eterea dell'azofenilfurazano, per il che, alla temperatura ordinaria, esso lentamente si idrogena con svolgimento di azoto. Cristallizzato dal cloroformio si presenta in laminette quasi bianche fusibili a 169° senza decomposizione.

Sostanza gr. 0,0726: N cc. 16,2 a 10° e 734,671 mm.
Trovato %: N 26,14.
Per $C_{16}H_{12}O_2N_6$ calc.: 26,25.

È discretamente solubile a caldo e poco a freddo in cloroformio ed in benzene; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool; poco solubile in etere; solubile a freddo in acetone; insolubile in ligroina anche bollente.

Deidrogenato ridà, come abbiamo detto, l'azofenilfurazano.

Torino - Istituto Chimico della R. Università.
Febbraio 1923.

Variazione diurna della distribuzione dell'energia sul disco solare

Nota del Socio corrisp. Prof. ALESSANDRO AMERIO

Ho intrapresa una serie di misure sull'assorbimento che subiscono, attraverso all'atmosfera solare, i raggi emessi dalla fotosfera, e riferisco su uno dei risultati ottenuti.

Nelle mie precedenti *Ricerche sullo spettro e sulla temperatura della fotosfera solare* (1) avevo determinata la distribuzione dell'energia sul disco solare, eseguendo le misure in quattro stazioni, situate a livelli compresi tra circa m. 60 e m. 4560 sul livello del mare.

Da esse risultava una debole influenza dell'altezza sulla distribuzione dell'energia sul disco solare, in modo che il rapporto dell'energia irradiata dal centro a quella che proviene da un altro punto qualsiasi, ad esempio dal bordo, cresce col crescere dell'altezza.

In conseguenza, se riferiamo le intensità della radiazione totale che è emessa dai vari punti del disco, a quella che proviene dal suo centro, presa come unità, ottieniamo lo specchietto seguente:

Località	Livello	Centro	15°	30°	45°	60°	75°
Roma	67 m.	1,000	0,986	0,946	0,877	0,772	0,609
Alagna.	1200 „	„	„	0,946	0,876	0,768	0,601
Col d'Olen	2900 „	„	„	0,945	0,874	0,767	0,597
Cap. Reg. Margh.	4560 „	„	„	0,945	0,872	0,764	0,594

(1) “ Memorie della R. Acc. dei Lincei „, 1914.

Sono questi risultati, frutto di ben 120 serie concordi, che palesano *la variazione con l'altezza della distribuzione dell'energia sul disco solare.*

La variazione è molto piccola, perchè ammonta solo a 15 su 600 circa, per la posizione di 75°, che è quella in cui, nelle esperienze fatte, si ha il massimo assorbimento; e se il suo piccolo valore (2,5 %) è attendibile, è perchè le serie di misure furono numerose e i loro errori molto piccoli.

Una conferma, sopratutto se ottenuta in condizioni molto diverse e che rendessero più cospicuo l'effetto svelato, era desiderabile.

L'occasione si è presentata durante le attuali ricerche sulla radiazione solare, che sto facendo con altri, sulle falde e sulla vetta dell'Aspromonte, per le quali riferirò in altre occasioni.

Nell'immediata prossimità della vetta di Montalto d'Aspromonte, a 1950 m. sul livello del mare, fu costruita una piccola baracca in legno, mediante un fondo straordinario fornito allo scopo dal Ministero della Pubblica Istruzione.

Da una sua finestra è possibile ricevere la radiazione solare, dal levar del sole fin quasi al tramonto, e qui furono fatte, tra le altre, le esperienze che confermano il risultato visto.

La causa dell'influenza dell'altezza, sulla distribuzione dell'energia sul disco solare, va ricercata nel diverso potere assorbente dell'atmosfera terrestre sui vari raggi, in relazione colla loro lunghezza d'onda, e nella diversa ripartizione dell'energia negli spettri dei singoli punti del disco.

Infatti l'assorbimento cresce notevolmente con la frequenza della radiazione che si considera, quindi i raggi più rifrangibili nell'attraversare l'atmosfera terrestre subiscono un assorbimento maggiore di quello dei raggi meno rifrangibili; e poichè lo spettro dei vari punti del disco solare è tanto più intenso e tanto più ricco dei primi, quanto più è prossimo al centro, la radiazione è assorbita in proporzione tanto maggiore quanto più il punto che la emette è prossimo al centro.

L'assorbimento cresce con lo spessore di aria attraversato, e col crescere di questo lo spettro del centro viene attenuato in proporzioni sempre maggiori, più che non lo spettro di ogni altro punto, e con ciò diminuisce il rapporto fra l'energia che viene dal centro e quella che viene da un altro punto qualsiasi del disco solare, o anche cresce il rapporto inverso.

Però le variazioni non possono essere molto grandi, perchè da Roma alla Capanna Regina Margherita, situata sulla punta Gnifetti del Monte Rosa, per quanto si abbia un dislivello di 4500 m., non si passa in media che da mm. 754 di pressione a mm. 440, con una variazione di soli 314 mm. su 754, cioè del 40 % appena, e se essa è notevole per gli effetti fisiologici, da costringere a sopportare grandi disagi, non può produrre effetti cospicui nelle differenze fra gli assorbimenti di spettri che non sono poi molto diversi tra di loro.

Ma se invece si ripetono le stesse misure in varie ore del giorno, si ottengono, per gli spessori attraversati, delle variazioni che possono essere molto superiori a quelle che si ottengono coi dislivelli, specialmente facendole nelle prime ore del giorno, a mezzodì, e vicino al tramonto; e quindi si devono ottenere degli effetti molto più cospicui di quello palesato nelle citate *Ricerche*.

La disposizione sperimentale era la stessa che si trova descritta nella detta Memoria, con piccole modificazioni dovute alla varietà degli strumenti.

Un eliostata di Fuess porta uno specchio piano di cm. 20 per 16; esso è posto su una mensola sporgente dalla finestra, e manda un fascio orizzontale di raggi solari su uno specchio concavo di un metro di distanza focale, nel quale l'apertura è ridotta a 5 cm. mediante un diaframma; questo specchio lo rinvia su un altro, pure concavo, di cm. 15 di distanza focale, che dà un'imagine reale del Sole su apposito schermo nero.

Tutti gli specchi sono di vetro inargentato anteriormente, e l'ultimo è fornito di viti micrometriche che permettono di regolare con molta cura la posizione dell'imagine del Sole sullo schermo.

Questo è in ottone, a doppia parete; nel suo centro si apre una finestra di circa cm. 2 per 0,25, e immediatamente dietro ad essa sta la finestrina del mio " Pireliometro integrale „ (1).

Sullo schermo sono tracciate, con una punta di compasso, in modo da scoprire e incidere leggermente l'ottone, 11 circonferenze del diametro di cm. 10, i cui centri sono sopra l'oriz-

---

(1) " Rend. R. Acc. Lincei „, 1918.

zontale che passa pel centro della finestra. Uno ha il centro nel centro di questa; due a cm. 1,29 rispettivamente a destra e a sinistra; due a cm. 2,5, due a 3,54, due a 4,33 e due a 4,83.

Quando l'imagine del Sole copre il cerchio centrale, nella finestra del pireliometro entra la radiazione che proviene dalla regione centrale del disco solare; se essa copre il primo cerchio a destra, o a sinistra, entra nel pireliometro la radiazione emessa da una regione che disti di 15° gradi dal centro a sinistra, o a destra. Gli altri cerchi servono per mandare nel pireliometro le radiazioni che provengono da punti situati a 30°, 45°, 60°, 75°, a destra o a sinistra (1).

Un buon galvanometro Siemens, a quadro mobile, di tipo leggero, molto adatto a queste esperienze, permette le misure delle correnti prodotte dalla pila termoelettrica del pireliometro.

Le misure vennero fatte in due modi: o si prendeva la posizione di riposo del galvanometro prima e dopo la lettura della deviazione prodotta dalla radiazione di una data regione del disco solare, e poi si passava a un'altra regione, oppure dopo presa la posizione di riposo del galvanometro, si faceva coincidere l'imagine del Sole col cerchio centrale e si leggeva la deviazione corrispondente, indi si portava l'imagine a coincidere successivamente coi vari cerchi prima a destra poi a sinistra per terminare colla posizione centrale, leggendo ogni volta la deviazione del galvanometro, e leggendo da ultimo la posizione di riposo di questo.

In questo secondo modo si guadagna tempo, e non si perde sensibilmente in esattezza, perchè gli spostamenti dello zero sono molto piccoli.

Dato poi lo scopo speciale di queste misure, nelle ultime serie, limitai l'esame al centro e ai punti situati a 60° e a 75°, a destra e a sinistra, per i quali le variazioni dell'assorbimento sono più grandi.

Ecco un esempio per ognuno dei modi:

---

(1) Cfr. a questo riguardo la citata memoria.

Montalto d'Aspromonte, 2 agosto 1922. Pressione 608.5.

Ora	Posizione esaminata a destra	Zero galvan.	Posizione galvan.	Deviazione	Posizione esaminata a sinistra	Zero galvan.	Posizione galvan.	Deviazione	Ora	*Osservazioni*
$15^h 23^m$	0°	153.2	215.4	62.2	0°	152.4	214.5	61.9		
	30°	153.1	211.8	58.7	30°	152.8	211.8	58.9		
	45°	153.1	207.2	54.1	45°	152.9	207.2	54.6		
	60°	153.0	201.2	48.3	60°	152.2	201.2	49.0		
	75°	152.8	192.5	39.9	75°	152.1	192.2	40.1		
	75°	152.3	193.0	40.8	75°	152.1	191.5	39.4		
	60°	152.1	200.5	48.4	60°	152.0	200.2	48.1		
	45°	152.0	206.5	54.4	45°	152.1	207.0	54.9		
	30°	152.1	211.1	58.9	30°	152.1	210.5	58.4		
	0°	152.3	214.9	62.5	0°	152.1	213.7	61.5		
		152.4				152.2			$15^h 34^m$	

Valori riferibili alla radiazione del centro presa come unità:

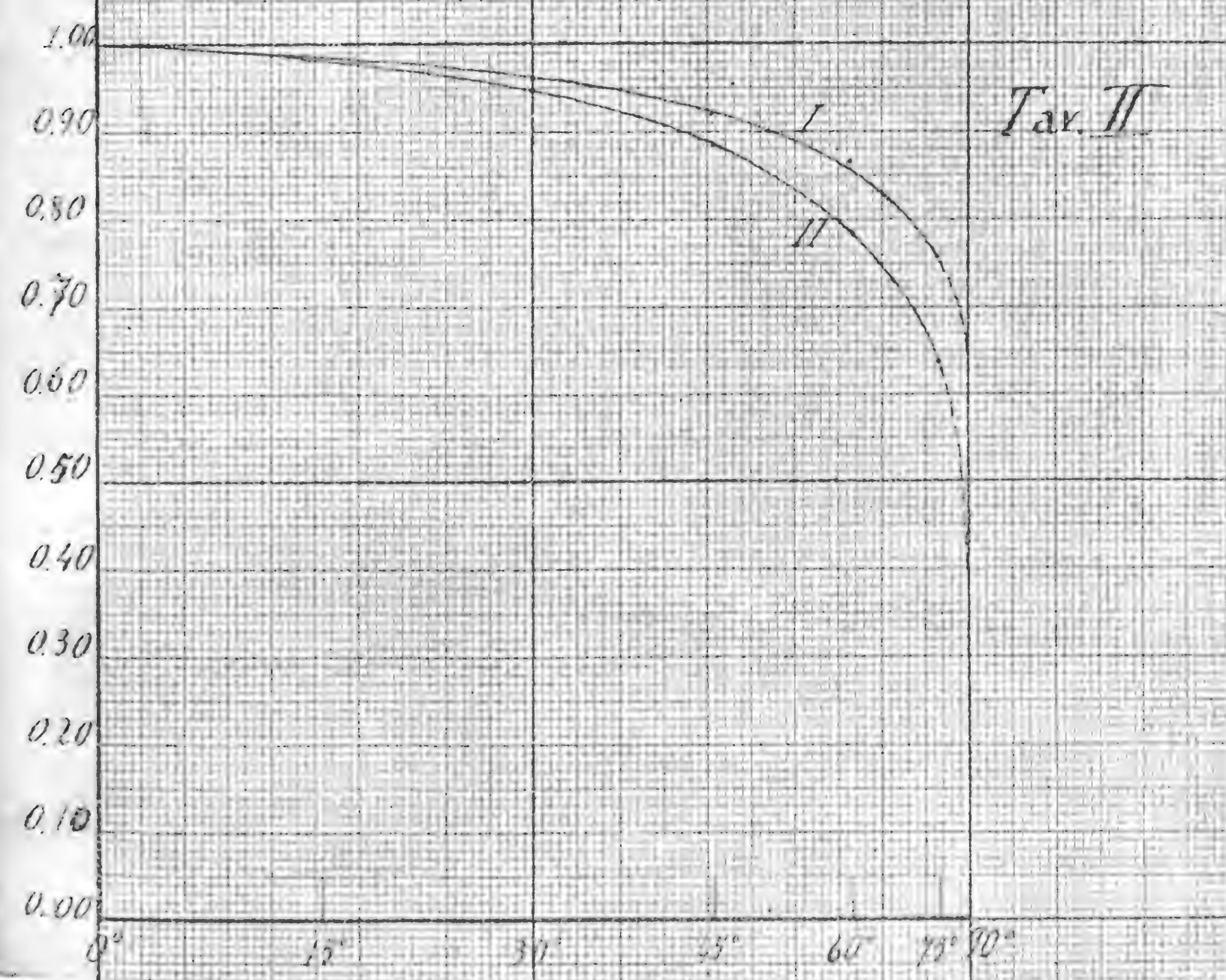
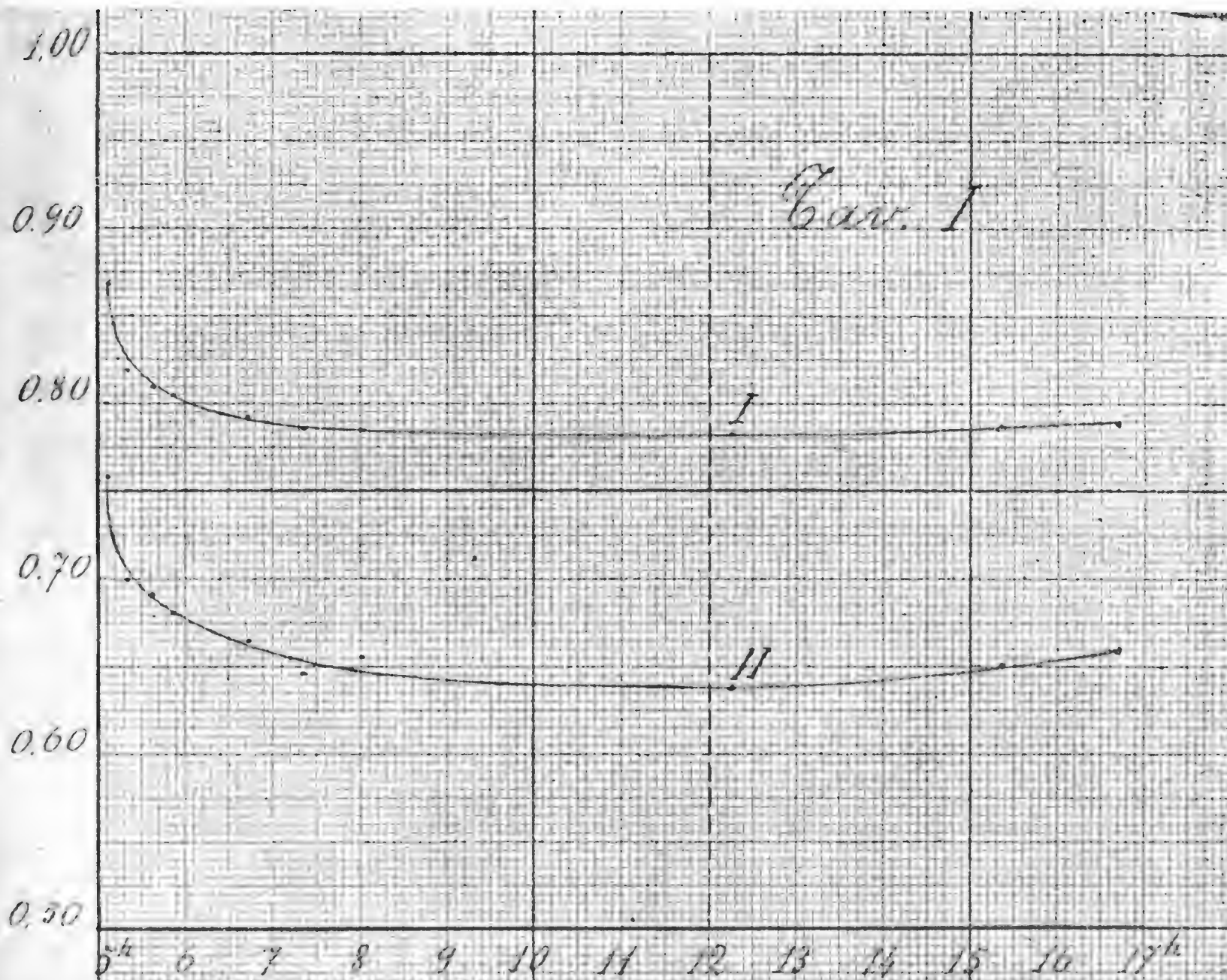
30°	45°	60°	75°
0,951	0,883	0,785	0,649

Montalto d'Aspromonte, 2 agosto 1922. Pressione 608.5.

Ora	Posizione esaminata a destra	Zero galvan.	Posizione galvan.	Deviazione	Posizione esaminata a sinistra	Zero galvan.	Posizione galvan.	Deviazione	Ora	*Osservazioni*
$5^h 48^m$	0°	174.1	210.5	36.4	0°		212.4	37.6		Il graduale aumento che si osserva nella radiazione è dovuto alla rapida diminuzione dell'assorbimento dell'atmosfera terrestre.
	15°		210.2	36.0	15°		212.2	37.4		
	30°		209.1	34.9	30°		211.3	36.4		
	45°		207.0	32.7	45°		209.1	34.2		
	60°		204.1	29.8	60°		205.7	30.7		
	75°		200.2	25.8	75°		200.9	25.8		
	75°		200.2	25.8	75°		201.5	26.4		
	60°		204.5	30.0	60°		206.0	30.8		
	45°		207.9	33.3	45°		209.7	34.4		
	30°		210.2	35.6	30°		212.0	36.7		
	15°		211.7	37.0	15°		213.8	38.4		
	0°		212.4	37.7	0°	175.4	214.2	38.7	$5^h 56^m$	

Valori riferibili alla radiazione del centro presa come unità:

15°	30°	45°	60°	75°
0,989	0,954	0,895	0,807	0,690

Tav. I
I
II
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
5h 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17h
Tav. II
I
II
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
0° 15° 30° 45° 60° 75° 90°

Le misure venivano cominciate verso le 5^h e se ne facevano varie serie di seguito, quindi venivano proseguite negl'intervalli concessi dalle altre ricerche intraprese.

Dall'insieme di 34 serie che furono fatte tra i giorni 31 luglio e 4 agosto, durante i quali il tempo si mantenne sereno, ho dedotta la seguente tabella, nella quale sono segnati i valori dell'energia totale irradiata da punti che distino di 60° o di 75° dal centro, riferita alla radiazione di questo presa come unità:

Ora	0°	60°	75°
5^h 7^m	1,000	0,868	0,758
5 20	"	0,819	0,700
5 37	"	0,810	0,692
5 52	"	0,805	0,676
6 43	"	0,793	0,665
7 22	"	0,786	0,646
8 1	"	0,785	0,656
12 16	"	0,783	0,638
15 21	"	0,787	0,651
16 31	"	0,789	0,659

Se portiamo come ascisse dei segmenti proporzionali ai tempi, e come ordinate i numeri della quarta e della quinta colonna rispettivamente, otteniamo i diagrammi I e II della prima tavola. Essi rappresentano come variino, durante il giorno, i rapporti tra le energie irradiate dai punti considerati e quelle irradiate dal centro.

Se invece le ascisse sono proporzionali alle distanze dei punti esaminati dal centro del disco solare, le ordinate sono i valori della 4ª, della 5ª colonna, e gli analoghi ottenuti per gli altri punti del disco solare, si ottengono dalle curve che rappresentano la distribuzione dell'energia sul disco medesimo alle varie ore del giorno. Le curve I e II della seconda tavola sono state tracciate per le $5^h 7^m$ e per mezzogiorno. Esse non sono nulla di assoluto, perchè dipendono dalla località e dalla stagione, ma dànno più chiaramente, che non le due precedenti, un'idea dell'entità della variazione diurna cercata, che per la posizione di 75° giunge al 18 %.

Come si vede, il risultato conferma pienamente la previsione e quindi anche quello trovato con la ricerca precedente.

La variazione diurna si manifesta fortemente colle grandi inclinazioni, ed è trascurabile nelle ore meridiane, e perciò non poteva risultare dalle misure fatte al M. Rosa.

In queste esperienze fui aiutato dal Dott. Vincenzo Ricca, allora laureando, che divise con me i disagi del soggiorno, e lo ringrazio di cuore.

Mi è pure gradito compiere il dovere di ringraziare vivamente Mons. Mittiga e il Rev. Don Nasso, del Convento di Polsi, che col loro appoggio resero possibile la costruzione della baracca e il soggiorno lassù, provvedendo a tutto il necessario servizio.

Esprimo infine la mia gratitudine al Ministero della Pubblica Istruzione, pel fondo straordinario col quale rese possibile questa ricerca e l'inizio di altre sull'Aspromonte.

Messina, febbraio 1923.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LVIII, Disp. 9ª, 1922-1923

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1923

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Marzo 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Foà, Guidi, Parona, Somigliana, Panetti, Sacco, Herlitzka, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, il quale risulta approvato, dopo osservazioni del Socio Segre, relative alla facoltà dei Soci corrispondenti a presentare direttamente Note per gli *Atti*.

Il Presidente comunica all'Accademia che il Socio nazionale non residente, Levi Civita, ha fatto omaggio alla nostra Biblioteca del 1° volume delle *Lezioni di meccanica razionale* da lui pubblicato in unione al sig. Ugo Amaldi. A proposito di tale dono parla il Socio Somigliana, facendo notare i meriti di un lavoro che costituisce, specialmente per l'indirizzo scientifico col quale è redatto, il più notevole manuale di meccanica razionale apparso in questi ultimi tempi.

Il Socio Levi-Civita sarà convenientemente ringraziato.

Il Socio Pochettino presenta per gli *Atti* una Nota del Prof. Felice Garelli dal titolo: *Formazione di solfuri, seleniuri,*

tellururi di alcuni metalli. Composti del rame, Nota 1ª, la quale viene accolta per la pubblicazione.

Il Socio GUIDI presenta quindi una Nota dell'Ing. Ottorino SESINI, *Sul calcolo approssimato dell'influenza dello sforzo di taglio sulla deformazione dei prismi inflessi.*

La Nota dell'Ing. SESINI viene accolta per gli *Atti.*

Dopo alcune osservazioni del Socio GUIDI sui caratteri tipografici greci usati nella stampa di argomenti matematici, l'adunanza è dichiarata sciolta.

LETTURE

Formazione di solfuri, seleniuri, tellururi di alcuni metalli.

I. — *Composti del rame.*

Nota preliminare di FELICE GARELLI
Presentata dal Socio nazionale residente A. Pochettino

Da molto tempo era noto che si possono ottenere piccole quantità di solfuri metallici facendo agire direttamente lo zolfo su talune soluzioni saline. L'osservazione più antica in proposito è quella fatta da W. Wicke (L. Ann., 1852, vol. 82, pag. 145).

Questi, mettendo in una soluzione satura di $CuSO_4$, a temperatura ordinaria, un pezzo di zolfo avviluppato da un filo di rame ben terso, vide, dopo qualche tempo, lo zolfo ricoperto, nei punti di contatto col rame, di un rivestimento cristallino costituito da un solfuro di rame di color indaco. Pochi anni dopo, nel 1860, il Parkmann (J. B., 1861, pag. 126) otteneva rapidamente a caldo la formazione di solfuri di rame per azione dello zolfo sulla soluzione di sali rameici, in presenza di un riducente (SO^2 o SO^4Fe). Risulta quindi una differenza caratteristica di comportamento fra i sali rameosi ed i rameici. Ciò venne confermato da successive esperienze di Vortmann e Padberg (Ber. 22 (1889), pag. 2642) ed altri.

Sembra invece che soluzioni acquose di altri sali metallici (Mn, Fe, Ni, Co, Zn, Cd) non siano alterate per ebollizione con zolfo (Senderens e Filhol, " Bull. Soc. Chim. de Paris „ [2] 6, 1891). Però il comportamento di queste stesse soluzioni con lo zolfo, in presenza dei rispettivi metalli, non fu ancora sperimentato.

Dopo i vecchi lavori testè citati, null'altro si trova nella letteratura scientifica intorno a questo argomento che meriti

di venir ulteriormente studiato. Anche per quanto riguarda la reazione tra i sali rameici e lo zolfo in presenza di rame non ho trovato descritta nessun'altra esperienza oltre a quella fatta da più di settant'anni da Wicke, e tanto meno alcuno, che io sappia, ha pensato di assoggettarla ad uno studio quantitativo.

Le ricerche che comunico in questa Nota preliminare furono istituite appunto nell'intento di meglio studiare le reazioni fra lo zolfo e soluzioni di sali metallici *in presenza dei rispettivi metalli* e di estenderle altresì al selenio ed al tellurio. Per ora comunico le esperienze fatte con le soluzioni rameiche.

Ho anzitutto ripetuto l'esperienza di Wicke e posso confermarla pienamente. Mettendo un bastoncello di zolfo, avvolto con filo o lastrina di rame ben tersi, in una soluzione piuttosto concentrata di solfato o nitrato di rame e lasciando il tutto in riposo a temperatura ordinaria si osserva, dopo poche ore, la deposizione sullo zolfo di un rivestimento nero bluastro. Il sedimento che si forma e che, dopo alcune settimane, acquista un certo spessore, aderisce assai energicamente al bastoncello di zolfo, onde riesce difficile staccarlo.

Ho trovato poi che la trasformazione del rame in solfuro viene accelerata se si impiega zolfo in polvere e tornitura di rame, agitandoli fortemente entro soluzione concentrata di solfato o di nitrato di rame. Così, mettendo in bottiglia chiusa 50 cm³ di soluzione di solfato di rame cristallizzato al 10 %, un grammo di tornitura di rame, un grammo di zolfo in polvere e scuotendo energicamente in apparecchio d'agitazione, si osserva, dopo circa 10 ore, che tutto il rame si è trasformato in polvere amorfa, nero-azzurrognola, frammista a polvere di zolfo. Estraendo, con solfuro di carbonio, lo zolfo in eccesso rimangono esattamente un grammo e mezzo di un composto che ha tutti i caratteri del CuS amorfo e che all'analisi effettivamente risultò contenere un atomo di rame per uno di zolfo.

Ma, volendo preparare rapidamente notevoli quantità dei solfuri di rame, è d'uopo operare a caldo. Io ho proceduto nel modo seguente: In un dato volume di soluzione acquosa titolata neutra di solfato rameico ho introdotto rame metallico e zolfo polverizzato (è bene impiegare zolfo romboedrico polverizzato, tutto solubile in CS_2, in luogo di fiori di zolfo, appunto per

poter poscia facilmente asportare l'eccesso di zolfo) e feci bollire in apparecchio a ricadere. Il metallo si discioglie rapidamente, il liquido annerisce, si intorbida e si depone un precipitato nero.

Con 5 grammi di rame (ritagli di sottile lamina) e 2,62 di zolfo cristallino polverizzato, in 100 cm³ di soluzione titolata di solfato di rame (quella stessa del liquido di Fehling), si ottiene la soluzione completa del rame in tre a quattro ore di vivace ebollizione. Filtrando si separa un precipitato che, lavato ed essiccato, risultò avere una composizione prossima a CuS.

		calcolato per CuS
1 gr. conteneva	gr. 0,6364 di Cu e	Cu 0,6646
	gr. 0,3590 di S	S 0,3354.

La soluzione di solfato di rame in seno alla quale si fece avvenire la reazione, *non cambia invece la sua composizione.* Infatti,

25 cm³ di soluzione di $CuSO^4$ contenevano:

prima dell'esperienza	gr. 0,2260	di Cu
dopo l'esperienza	„ 0,2238	„

Se vuolsi ottenere rapidamente il solfuro CuS è bene operare con un leggero eccesso di zolfo. Per es., avendo fatto bollire per due ore, a ricadere, 5 grammi di tornitura di rame con 3 grammi di zolfo (il teorico per CuS è gr. 2,622) ottenni un precipitato del peso di 8 grammi dal quale il solfuro di carbonio asportò esattamente gr. 0,48 di zolfo lasciando gr. 7,52 di residuo della seguente composizione:

	trovato	calcolato
Cu %	65,82	66,46
S „	33,10	33,54.

Anche in questa seconda prova l'analisi della soluzione di solfato di rame, prima e dopo l'ebollizione, dimostra che essa *non subisce alcuna sensibile variazione.* Impiegando la soluzione di nitrato rameico invece di quella del solfato, la trasformazione completa del rame metallico in solfuro avviene anche più rapidamente.

Per preparare il solfuro rameico CuS basta adunque far bollire una soluzione acquosa neutra di solfato o nitrato rameico e introdurre in essa del rame metallico e zolfo nei rapporti dei loro pesi atomici: meglio eccedere alquanto nella proporzione di zolfo, che, ultimata la reazione, si può togliere agevolmente a mezzo del CS_2. Continuando ad aggiungere, ad intervalli, al liquido bollente del rame man mano che esso si trasforma, nonchè lo zolfo nel rapporto stechiometrico, si possono preparare quantità notevoli di CuS. Per evitare i sussulti, dovuti al pesante precipitato che si accumula al fondo, è preferibile fare il riscaldamento in corrente di vapor acqueo. Ho così, in poco tempo, ottenuto un centinaio di grammi di solfuro rameico, di notevole purezza, in forma di finissima polvere nera con riflessi color indaco.

Siccome il solfuro rameico serve come materia colorante, ed impastato con olio di lino cotto fornisce vernici nero-grigio, azzurrognole, di forte potere ricoprente, così il semplice metodo di preparazione del CuS che io propongo, potrà forse ricevere applicazione nella tecnica.

Preparazione del Cu_2S. — Con lo stesso metodo si ottiene il solfuro rameoso: basta introdurre nella soluzione del sale rameico i due elementi nei rapporti stechiometrici. 5 gr. di tornitura di rame con 1,36 di zolfo in 100 cm^3 di soluzione di solfato di rame si sciolgono completamente dopo circa tre ore di ebollizione continua in apparecchio a ricadere. Il precipitato, dopo essiccamento, pesava gr. 6,3, e fornì all'analisi i seguenti risultati:

	trovato $^0/_0$	calcolato per Cu_2S
Cu	79,42	79,87
S	20,32	20,13.

Il solfuro rameoso ottenuto è amorfo, in polvere nera, grigio-scura.

Aggiungo che la trasformazione per lo meno parziale del rame in composti solforati si compie già, molto lentamente, anche per ebollizione del metallo con zolfo cristallino, in presenza di acqua distillata e, meglio, di acqua acidulata con H_2SO_4.

Rame e selenio. — I seleniuri di alcuni elementi (Ni, Co, Fe, Cd, Hg, As) vennero preparati dal Berzelius e dal Little (L. Ann., vol. 112, pag. 213, anno 1859) scaldando il selenio col metallo a temperatura più o meno elevata, o facendo passare il vapore di selenio sul metallo caldo (CuSe). Altri vennero ottenuti per via umida: ad es., facendo gorgogliare corrente di SeH_2 in soluzioni di $SnCl_4$ o di $BiCl_3$ o di SO^4Cu, si hanno rispettivamente precipitati amorfi probabilmente della formola $SnSe_2$, Bi_2Se_3, CuSe, ecc.

Parkmann (l. c.) trovò che il selenio rosso non reagisce con soluzione di solfato nè di acetato rameico, mentre si ottiene un precipitato nero se la soluzione di solfato è contemporaneamente trattata con SO_2. Era quindi probabile che, rispetto alla soluzione di sale rameico in presenza del metallo, il selenio si comportasse in modo analogo allo zolfo, e tale previsione risultò confermata dalle mie esperienze. Esse dimostrano che è assai facile preparare specialmente il Cu_2Se allo stato puro, amorfo o cristallino e che è altresì possibile, variando le condizioni, di ottenere del Cu_3Se_2 e del CuSe.

I. — Mettendo in bevuta contenente soluzione di solfato di rame cristallizzato al 10 % delle sottili laminette di rame e su di esse adagiando della polvere di selenio, sia rosso, amorfo, come nero metallico, nei rapporti stechiometrici di 2 atomi di Cu per 1 di Se, lasciando il tutto a temperatura ordinaria per alcuni giorni si vede la lamina di rame assottigliarsi, sgretolarsi e sparire per ultimo, completamente, lasciando cristallini assai minuti, nero-verdastri, con lucentezza metallica. A temperatura ordinaria la reazione è ultimata dopo 7-8 giorni: vien alquanto accelerata a 40°-50° C. Gli aggregati cristallini separati meccanicamente dalle minuscole pagliette di rame ancora presenti e da traccie di polvere amorfa, si sciolgono facilmente nell'acido nitrico caldo, e la determinazione del rame e del selenio fornì i seguenti risultati:

	trovato %	calcolato per Cu_2Se %
Cu	61,90	61,61
Se	37,90	38,39.

All'esame microscopico il prodotto appare costituito da aggregati monometrici con faccie ottaedriche, ma non completamente sviluppate. La composizione chimica corrisponde, come si vede, a quella della Berzelianite, il minerale di selenio e rame che si trova raramente in natura. L'analisi dei seleniuri di rame riesce difficile perchè la separazione del rame dal selenio, con i consueti metodi, è ben lungi dall'esser netta (Vedi anche Tradwell, *Analisi chimica quant.*, II^a ediz., pag. 245). Il dottor Angeletti, che ha studiato in questo laboratorio per mio incarico la questione, ha trovato che la separazione riesce abbastanza bene precipitando il rame con il Cupferron.

Anche in questo caso l'analisi della soluzione di solfato di rame prima e dopo l'esperienza dimostra che la concentrazione della soluzione che serve da liquido elettrolita, rimane inalterata.

II. — Avvolgendo in sottile lastrina di rame un grosso frammento di selenio metallico cristallizzato, in modo che il metalloide sia in grande eccesso rispetto al rame, immergendolo poi in soluzione di solfato rameico e lasciandovelo per qualche giorno alla temperatura di 40° C., si vede il frammento di selenio disgregarsi rapidamente ed originarsi concrezioni nerastre, con lucentezza metallica e riflessi rossi violacei, mentre il rame sparisce completamente. Al microscopio non si osservano cristalli completamente sviluppati. L'analisi del prodotto separato, per quanto è possibile meccanicamente, dall'eccesso di selenio, fornì i seguenti risultati:

	trovato	calcolato per Cu_2Se	calcolato per Cu_3Se_2	calcolato per $CuSe$
Cu %	51,2	61,61	54,63	44,49
Se %	48,3	38,39	45,37	55,51.

Si direbbe quindi che il prodotto ottenuto in questa esperienza sia prevalentemente costituito da sesquiseleniuro Cu_3Se_2, o seleniuro rameoso rameico $Cu_2Se.CuSe$. In natura trovasi, assai raramente, un minerale, detto *Umangite*, di questa composizione.

Con altre esperienze spero di riuscire a stabilire le condizioni necessarie per ottenere questo seleniuro in luogo del Cu_2Se.

III. — Operando all'ebollizione si ottengono invece i seleniuri amorfi Cu_2Se e $CuSe$ quasi altrettanto facilmente come i solfuri di rame.

Facendo bollire in apparecchio a ricadere 1 gr. di rame (2Cu) e 0,65 di selenio (Se) in soluzione di solfato rameico al 10 %, si ha dopo qualche ora la trasformazione quasi completa delle lastrine di rame in un precipitato pulverolento, nero verdastro, in gran maggioranza costituito da Cu_2Se. Rimangon tuttavia minuscole particelle di rame mescolate con la polvere di seleniuro ed è difficile toglierle tutte con le pinze. Ciò spiega l'eccesso di rame trovato nell'analisi dei prodotti forniti in due esperienze:

	trovato		
	Iª prova	IIª prova	calcolato per Cu_2Se
Cu %	64,71	62,95	61,61
Se „	35,29	36,50	38,39.

IV. — Se invece si ripete l'esperienza con un grammo di rame (Cu) e 1,30 di selenio (Se), si ottiene una polvere nera, molto simile alla precedente nell'aspetto esterno, che all'analisi fornì i seguenti risultati:

	trovato	calcolato per CuSe
Cu %	42,65	44,49
Se „	56,30	55,51.

Fin'ora non sono riuscito ad ottenere a freddo, in aggregati cristallini, il composto CuSe.

Rame e Tellurio. — Un tellururo di rame, probabilmente della formola Cu_2Te, fu ottenuto da Berzelius ed in seguito da Margottet per unione diretta degli elementi a caldo.

Puskin (C. B., 1907, I, 1726) ha dimostrato l'esistenza dei composti Cu_2Te e CuTe studiando il potenziale elettrolitico della pila Cu | SO^4Cu | CuTe. Il Chikasigé ha descritto il completo diagramma di stato del Cu e Te, e da esso appare probabile la formazione dei due composti Cu_2Te e Cu_4Te. Parkmann (l. c.) ha trovato che il Te non precipita le soluzioni di SO^4Cu anche dopo lunga ebollizione, mentre precipita quelle di acetato rameico. Se invece, nella soluzione di solfato di rame, all'ebollizione, si fa gorgogliare dell'SO_2, il tellurio vi forma un precipitato che ha, probabilmente, la composizione CuTe.

Dalle mie esperienze risulta che anche il tellurio precipita a freddo dalla soluzione di solfato di rame dei tellururi di varia composizione se vi è in presenza del rame metallico.

In una provetta contenente soluzione di solfato rameico al 10 % introdussi un bastoncello di tellurio metallico, avviluppato con sottile lastra di rame. Lasciando la provetta a temperatura ordinaria, e meglio a 40°-45° C., si nota un rapido disgregarsi del metalloide. La bacchetta si frantuma in frammenti grossolani, mentre il rame metallico scompare e lascia il posto ad una polvere nera. Il bastoncello di tellurio pesava gr. 4,835, il rame che l'avvolgeva gr. 0,82. Dopo 5 giorni il rame era completamente scomparso ed il tellurio ridotto in frammenti grossolani. Separando questi con pinza e filtrando e lavando, rimane una polvere nera di minuti cristallini con riflessi metallici neri violacei, del peso di gr. 1,28. La soluzione di solfato di rame in seno alla quale è avvenuta la reazione non cambia la sua concentrazione. L'analisi della polvere fornì i seguenti risultati:

	trovato	calcolato per Cu_4Te
Cu	64,06	66,66
Te	35,34	33,34.

In altra prova, mettendo in presenza una maggior quantità di rame (e precisamente gr. 1 di Cu e gr. 2 di Te), ottenni dopo 6 giorni a temperatura ordinaria una polvere minuta, nera, apparentemente amorfa, che, liberata dai frammenti di tellurio e da qualche pagliuzza di rame inalterati, sembra abbastanza omogenea, ma che, probabilmente, è una miscela di diversi tellururi. Infatti l'analisi fornì i numeri seguenti Cu = 39,3 %, Te = 60,2 %, mentre per il composto CuTe si calcolerebbe Cu = 33,16 % e Te = 66,84 %.

Ulteriori esperienze diranno se è possibile ottenere, per questa via, allo stato puro, composti binari ben definiti di rame e tellurio e trovare il metodo per isolarli.

Torino, Istituto di chimica tecnologica del R. Politecnico.

Sul calcolo approssimato dell'influenza dello sforzo di taglio sulla deformazione dei prismi inflessi

Nota dell'Ing. OTTORINO SESINI

Presentata dal Socio nazionale residente Guidi

I punti dell'asse geometrico di un solido prismatico elastico ed isotropo, sollecitato a flessione e taglio secondo un piano di sollecitazione che supponiamo sia piano di simmetria del solido, subiscono degli spostamenti che possiamo idealmente scomporre in una parte dovuta alla flessione, ed in una che attribuiamo allo sforzo di taglio.

Di quest'ultima si tiene conto nei trattati di " Scienza delle Costruzioni „ per mezzo di formule approssimate, che si deducono uguagliando il lavoro delle forze esterne, supposte applicate in punti dell'asse geometrico, al lavoro di deformazione del sistema, ed ammettendo che nelle sezioni normali le tensioni tangenziali siano dirette parallelamente all'asse di sollecitazione ed uniformemente distribuite su ciascuna corda parallela all'asse neutro. Chi ponesse a confronto i risultati che così si ottengono, con quelli che, per alcuni casi particolari, vengono comunemente dati nei trattati di " Teoria dell'Elasticità „ come risultati della risoluzione rigorosa del problema di Saint-Venant, sarebbe indotto ad attribuire al primo metodo un grado di approssimazione molto basso, assai minore di quello che, colle stesse ipotesi, si ha nella determinazione delle tensioni tangenziali.

Ad esempio, per un cilindro circolare di sezione A e lunghezza l, vincolato ad una base e sollecitato sull'altra da una forza T, normale all'asse, se G è il modulo d'elasticità tangen-

ziale e supponiamo che il coefficiente $\frac{1}{m}$ di Poisson sia uguale ad $\frac{1}{4}$, le freccie f_t dovute al taglio, risultano:

colla Teoria dell'Elasticità : $f_t' = \frac{7}{5} \frac{Tl}{GA}$,

col metodo della Meccanica Tecnica: $f_t^* = \frac{10}{9} \frac{Tl}{GA}$;

rapporto: $\frac{f_t'}{f_t^*} = 1{,}26$; mentre le tensioni tangenziali massime sono rispettivamente:

$$\tau'_{max} = \frac{7}{5} \frac{T}{A}; \qquad \tau^*_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{A}; \qquad \text{rapporto: } \frac{\tau'_{max}}{\tau^*_{max}} = 1{,}05.$$

Scopo del presente studio è quello di provare che per la determinazione delle freccie, il metodo della Meccanica Tecnica dà, nei casi comuni, risultati assai più attendibili di quanto il confronto ora fatto lascerebbe supporre.

A tal uopo bisogna osservare che per procedere ad un confronto fra le freccie ottenute coi due procedimenti di calcolo, è necessario anzitutto esaminare le ipotesi di vincolamento del solido agli assi cartesiani di riferimento, che i calcoli stessi presuppongono.

La freccia data comunemente nei trattati di Teoria della Elasticità è lo spostamento del baricentro della base libera, quando il solido sia vincolato in modo che la base vincolata si mantenga tangente nel suo baricentro agli assi x ed y, e l'asse y rimanga pure tangente ad una linea segnata sulla base stessa.

In tal modo, dato che l'asse y, verticale e positivo verso il basso, giaccia nel piano di sollecitazione, l'asse del solido inflesso viene a formare all'origine coll'asse z un angolo uguale al valore che lo scorrimento γ_{yz} [1] assume in tale punto; questa inclinazione è anzi la causa di quella parte di freccia che si attribuisce allo sforzo di taglio.

Con questo riferimento, che indicheremo con *a*), le forze che dobbiamo supporre applicate alla base vincolata del prisma eseguiscono, durante la deformazione, un lavoro che general-

---

[1] I simboli sono quelli usati dal prof. G. Colonnetti nei *Principî di Statica dei Solidi Elastici*.

mente non è nullo. Tale vincolamento non coincide quindi con quello ammesso nel metodo della Meccanica Tecnica, il quale, uguagliando il lavoro di deformazione a quello eseguito dalle forze applicate alla base libera del prisma, suppone implicitamente un vincolo così fatto da annullare il lavoro complessivo eseguito dalle forze applicate all'altra base.

Le differenze che si riscontrano non sono perciò da attribuirsi soltanto all'inesattezza del metodo della Meccanica Tecnica, ma anche a diversità di ipotesi riguardanti il vincolo. Il confronto deve essere fatto fra i risultati del metodo della Meccanica Tecnica e quelli che si ottengono calcolando per via rigorosa il lavoro di deformazione del solido di Saint-Venant, ed uguagliandolo al semiprodotto della freccia per la forza T. Indicheremo con b) questo metodo di calcolo.

Come sappiamo, col procedimento a) la freccia dovuta allo sforzo di taglio è:

$$f_t' = \frac{Tl}{EJ}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0, \tag{1}$$

ove E è il modulo di Young, J il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro, $\psi(xy)$ una delle funzioni armoniche a cui si riduce il problema del prisma inflesso (v. G. Colonnetti, op. cit.), $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0$ il valore che assume $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ per $x=0$ $y=0$.

Col metodo b) la freccia totale f'' è data da:

$$\frac{Tf''}{2} = \int_V \frac{\sigma_z^2}{2E} dV + \int_V \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G} dV,$$

dove gli integrali si intendono estesi a tutto il volume V del solido. Siccome $\frac{1}{T}\int_V \frac{\sigma_z^2}{E} dV$ è la freccia dovuta alla flessione, otteniamo, come freccia dovuta al taglio:

$$f_t'' = \frac{1}{T}\int_V \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{G} dV. \tag{2}$$

Confrontiamo fra loro i vari metodi, applicandoli ad un prisma a sezione ellittica, di assi $2a$, disposto secondo l'asse x, e $2b$ disposto secondo y. Per tale sezione è:

$$\psi(xy) = \frac{[12(m+1)b^2+6ma^2]b^2y-[(4m+1)b^2+(2m-1)a^2](y^3-3yx^2)}{6m(3b^2+a^2)}.$$

Sostituita questa espressione a $\psi(xy)$ nella (1) e nella (2) (nella quale τ_{yz} e τ_{zx} sono esprimibili mediante note relazioni in funzione di x, y, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y}$); detti α il rapporto $\frac{a}{b}$, ed A l'area della sezione, si ottengono le seguenti freccie dovute al taglio:

$$f_t' = \frac{4(m+1)+2m\alpha^2}{(m+1)(3+\alpha^2)} \frac{Tl}{GA},$$

$$f_t'' = \left(\frac{10+4\alpha^2}{9+3\alpha^2} + \frac{2\alpha^4}{3(m+1)^2(3+\alpha^2)}\right) \frac{Tl}{GA}.$$

Posto $m = 4$, per α uguale rispettivamente ad 1 (cerchio), ad $\frac{1}{2}$ e a 0 (caso limite), si hanno i seguenti valori dei coefficienti di $\frac{Tl}{GA}$:

$\alpha =$	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{GA}{Tl} f_t' =$	1,400	1,354	1,333
$\frac{GA}{Tl} f_t'' =$	1,173	1,129	1,111.

Col metodo della Meccanica Tecnica si ottiene per qualsiasi valore di α:

$$\frac{GA}{Tl} f_t^* = \frac{10}{9} = 1{,}111.$$

Questo valore differisce notevolmente solo da quelli ottenuti col procedimento *a*), mentre è in buon accordo, specialmente per le sezioni molto allungate secondo l'asse di sollecitazione, che interessano in pratica, coi risultati del procedimento *b*); ciò prova che l'influenza dell'inesattezza del metodo è molto piccola.

Le medesime conclusioni si traggono dall'esame di un prisma a sezione rettangolare di mediane $2b$, secondo y, e $2a$ secondo x, molto allungata nel senso dell'asse y. Considerando questa sezione come caso limite per $\frac{a}{b} = 0$, di quella limitata da due lati paralleli ad y e distanti a da tale asse, e da due rami d'iperbole di equazione: $(1+m)y^2 - x^2 = (1+m)b^2$, per la quale sezione è:

$$\psi(xy) = \frac{m+1}{m} b^2 y + \frac{2m+1}{2m}\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right);$$

si ottiene facilmente, trascurando $\frac{a}{b}$:

$$\tau_{zx} = 0 \qquad \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \frac{b^2 - y^2}{b^2};$$

$$f_t' = \frac{3}{2} \frac{Tl}{GA} \qquad f_t'' = f_t^* = \frac{6}{5} \frac{Tl}{GA}.$$

Osserviamo che, se nella trattazione teorica del problema di Saint-Venant, le varie ipotesi che si possono fare riguardo al vincolo, le quali differiscono fra di loro di un semplice spostamento rigido, sono ugualmente accettabili, nell'applicazione a casi concreti può interessare invece vedere qual'è l'ipotesi che meglio corrisponde ai vincoli effettivi.

Come è noto, i solidi reali, sia pel modo d'applicazione delle forze, sia per l'impedita o contrastata deformazione delle basi, non si trovano mai nelle condizioni previste nella teoria del Saint-Venant, la quale si applica perciò solo in via di approssimazione.

Ad ogni modo non sembra si possa ritenere che nei casi reali la freccia dovuta allo sforzo di taglio, dipenda unicamente dal valore dello scorrimento nella fibra baricentrica, come viene ad ammettere il metodo *a*), il quale inoltre implica un lavoro (che generalmente è negativo, ma può in qualche caso essere positivo) eseguito sulla base vincolata.

Più attendibili sembrano i risultati ottenuti col metodo *b*) la cui applicazione a casi reali è lecita purchè si ammetta:

1°) Che il lavoro di deformazione effettivo sia uguale a quello del prisma teorico;

2°) Che il lavoro eseguito sulla base vincolata sia nullo;

3°) Che i punti della base libera, alla quale è applicata la forza T, subiscano tutti lo stesso abbassamento (come avviene nel caso teorico).

Queste ipotesi sono accettabili, e con esse è accettabile il procedimento *b*) al quale il metodo della Meccanica Tecnica si avvicina notevolmente.

Si può osservare che, se una base del prisma è perfettamente incastrata, l'impedimento alle deformazioni di detta base fa diminuire il lavoro di deformazione, e perciò è prevedibile una freccia minore di quella calcolata.

Si può anche determinare la freccia supponendo che la base vincolata, anzichè conservare fissa la giacitura di un suo particolare elemento, come avviene coll'ipotesi *a*), assuma durante la deformazione una posizione tale da rendere nullo il lavoro delle tensioni normali ad essa applicate; cioè che rimanga fisso un certo piano di compenso della superficie in cui si trasforma la base vincolata.

Con questo metodo, che indichiamo con *c*), dobbiamo supporre che al sistema vincolato secondo l'ipotesi *a*) venga impressa intorno all'asse x una rotazione rigida ϑ da y verso z, tale da annullare il lavoro delle tensioni normali $(\sigma_z) = -\frac{Tl}{J}\, y$ applicate alla base vincolata. Le componenti di spostamento (w) dei punti di detta base secondo l'asse z sono, sempre nell'ipotesi *a*):

$$(w) = \frac{T}{EJ}\left(\psi\,(xy) - yx^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 y\right).$$

La rotazione ϑ deve soddisfare alla condizione:

$$\int_A (\sigma_z)\,[(w) + \vartheta y]\, dA = 0,$$

dove l'integrale si intende esteso a tutta la base A. È perciò:

$$\frac{T^2 l}{EJ^2}\int_A \left[y\psi\,(xy) - y^2x^2 - y^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0\right] dA + \frac{Tl}{J}\,\vartheta \int_A y^2\, dA = 0;$$

osservato che $\int_A y^2 dA = J$ si ottiene:

$$\vartheta = -\frac{T}{EJ^2}\int_A [y\psi\,(xy) - y^2x^2]\, dA + \frac{T}{EJ}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0.$$

La freccia f_t''' risulterà diminuita di ϑl rispetto a quella f_t' calcolata col primo metodo, cioè:

$$f_t''' = \frac{T}{EJ}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 l - \frac{T}{EJ}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 l + \frac{Tl}{EJ^2}\int_A [y\psi\,(xy) - y^2x^2]\, dA.$$

$$f_t''' = \frac{Tl}{EJ^2}\int_A [y\psi\,(xy) - y^2x^2]\, dA. \qquad (3)$$

Applicando questo risultato al cilindro ellittico già visto si ottiene:

$$f_t''' = \frac{20m + 23 + (8m + 2)\alpha^2 - \alpha^4}{6(m+1)(3+\alpha^2)} \frac{Tl}{GA}$$

che per $m = 4$ e per

$$\alpha = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{2} \qquad \alpha = 0,$$

dà rispettivamente i valori:

$$1{,}133 \qquad 1{,}143 \qquad 1{,}144$$

del coefficiente di $\frac{Tl}{GA}$. Per la sezione rettangolare sopra detta si ha:

$$f_t''' = \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{20(m+1)}\right) \frac{Tl}{GA},$$

cioè, per $m = 4$:

$$f_t''' = 1{,}23 \frac{Tl}{Gf}$$

con buon accordo sia col metodo della Meccanica Tecnica, sia col *b*) dal quale quest'ultimo *c*) differisce solo in quanto non ammette che il lavoro di deformazione del solido sia eseguito soltanto dalle forze applicate alla base libera, ma tien conto del lavoro eseguito, in conseguenza delle deformazioni della base vincolata, dalle forze tangenziali a quest'ultima applicate.

Questo modo di valutare la freccia dovuta al taglio o l'inclinazione dell'asse deformato all'origine, può essere giustificato, per esempio, in una trave appoggiata agli estremi e caricata in mezzeria da un carico T, quando si supponga che il carico e le reazioni degli appoggi siano distribuiti sulle relative sezioni normali come le tensioni tangenziali applicate alle basi del prisma di Saint-Venant. In tal caso ciascuna mezza trave può considerarsi come sollecitata ad un estremo da una forza $-\frac{T}{2}$ (reazione d'appoggio) e vincolata all'altro estremo (mezzeria). Essendo nella sezione di mezzo esclusi, per ragioni di simmetria, gli spostamenti fuori del piano primitivo, ma permesse le dilatazioni o le contrazioni, possiamo dire che le tensioni normali

applicate alla base vincolata eseguiscono lavoro nullo durante la deformazione, mentre possono eseguire lavoro le tensioni tangenziali.

Prescindendo dall'effetto dell'impedito ingobbamento di tale base noi possiamo accettare in questo caso il metodo *c*) di calcolo, e ritenere perciò che in corrispondenza del carico T gli assi delle due mezze travi deformate formino tra di loro un angolo:

$$\Delta\varphi = \frac{T}{EJ^2}\int_A [x\psi(xy) - y^2x^2]\, dA.$$

Lo stesso angolo si può ammettere che formino le tangenti all'asse deformato della trave immediatamente a destra e a sinistra di un carico T, insistente, nel modo sopra detto, su di una sezione qualunque.

Immaginando tanti carichi uguali a $p\Delta z$, posti a distanza Δz fra di loro, e passando al limite per $\Delta z = 0$ (mantenendo p costante), si giunge alla conclusione che per un carico uniformemente distribuito d'intensità p l'asse della trave assume, per effetto dello sforzo di taglio, una curvatura:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_t = -\frac{p}{EJ^2}\int_A [y\psi(xy) - y^2x^2]\, dA,$$

cioè, essendo $-\frac{M_z}{EJ}$ la curvatura dovuta al momento flettente M_z, si ottiene, come equazione della curva elastica:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_z}{EJ} - \frac{p}{EJ^2}\int_A [y\psi(xy) - y^2x^2]\, dA.$$

Nel caso già visto della sezione rettangolare allungata, si avrebbe:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_z}{EJ} - \frac{p}{GA}\left[\frac{6}{5} + \frac{3}{20(m+1)}\right]. \tag{4}$$

Il problema del prisma uniformemente caricato per tutta la sua lunghezza è stato risolto per via rigorosa dal Prof. E. Almansi (1),

(1) E. Almansi, *Sulla flessione dei cilindri.* "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo", vol. XXI, 1906.

il quale in una interessante ricerca su tale argomento giunge alla conclusione che l'equazione della curva elastica del prisma è:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_z}{EJ} - \frac{\lambda q - \mu p}{EJ},$$

che per noi, avendo supposto l'asse y positivo verso il basso, cioè nella direzione di p, e sostituendo $\frac{1}{m}$ al coefficiente di contrazione λ, diviene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_z}{EJ} - \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{m} + \mu p\right).$$

Il coefficiente μ è indipendente dai carichi; per la sezione rettangolare allungata sopra detta l'Almansi trova:

$$\mu = \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{m}\right) b^2;$$

q è dato dall'espressione:

$$q = -\frac{1}{2}\int_s [2xy\tau_1 + (y^2 - x^2)\tau_2]\, ds,$$

nella quale l'integrale va esteso a tutto il contorno s della sezione; τ_1 e τ_2 sono le componenti secondo gli assi x ed y delle tensioni esterne applicate alla superficie laterale del prisma (uniformemente lungo ciascuna generatrice).

Per fare un'ipotesi equivalente a quella posta per dedurre la (4) dovremo ammettere $\tau_1 = 0$ su tutto il contorno, e per la tensione esterna verticale potremo, per la supposta piccolezza di a, ritenere equivalente alla distribuzione prima ammessa della p su tutto il volume del solido colla stessa legge delle τ_{yz}, una ripartizione della τ_2 sulle sole due faccie verticali, di altezza $2b$, colla legge:

$$\tau_2 = \frac{3p}{8b}\,\frac{b^2 - y^2}{b^2} \qquad \left(\text{che verifica la } \int_s \tau_2\, ds = p\right).$$

Con questo valore di τ_2 si ottiene:

$$q = -\frac{3p}{16b^3}\int_s (b^2 - y^2)(y^2 - x^2)\, ds = -\frac{3p}{8b^3}\int_{-b}^{+b} (b^2 - y^2)(y^2 - a^2)\, dy$$

e trascurando i termini contenenti a^2:

$$q = -\frac{1}{10} p b^2.$$

Se ne deduce:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_z}{EJ} - \frac{1}{EJ}\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{m} - \frac{1}{10\,m}\right) p b^2 =$$

$$= -\frac{M_z}{EJ} - \frac{1}{EJ}\left(\frac{4}{5} + \frac{9}{10\,m}\right) p b^2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_z}{EJ} - \frac{p}{GA}\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{20\,(m+1)}\right)$$

espressione identica alla (4). Le considerazioni che ci hanno condotto alla (4), pur non essendo rigorose, risultano dunque ben fondate, e ciò viene a comprovare l'attendibilità del metodo della Meccanica Tecnica, che poco differisce nei risultati dal procedimento indicato con c). Notiamo che l'applicazione del carico alla faccia superiore del prisma (come avviene in pratica) dà, secondo le formule esatte dell'Almansi, una freccia notevolmente minore di quella ora calcolata, ed anche minore di quella deducibile col metodo della Meccanica Tecnica, il quale riuscirebbe in questo caso approssimato per eccesso, e non per difetto come dal primo confronto fatto potrebbe sembrare.

Pisa, 27 gennaio 1923.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona – Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LVIII, Disp. 10a, 1922-1923

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1923

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Marzo 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Guidi, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino, Zambonini e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza il Presidente Ruffini e il Socio Foà.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una Circolare Ministeriale relativa alla fornitura di libri tedeschi in *conto riparazioni*, ed una lettera del Ministero dell'Istruzione che accompagna un esemplare dell'opera *La Villa di Venosa in Albano Laziale*, che la Principessa Teresa Boncompagni Ludovisi ha destinato in dono all'Accademia.

Dell'opera insigne, sia per la eleganza della edizione, sia per la nitidezza delle tavole, sia per il testo dovuto a scrittori eminenti, quali Ferdinando Martini, Giovanni Cuboni, Emilio Chiovenda, parla il Socio Mattirolo, facendone rilevare l'importanza scientifica e la pratica utilità.

L'opera pubblicata dalla nobile Signora, fa onore, non solo alla famiglia dei Principi di Venosa, ma è di lustro alla scienza e al paese.

La donatrice sarà convenientemente ringraziata.

Il Socio Panetti presenta e fa omaggio all'Accademia della Parte prima del suo *Manuale di Meccanica applicata alle macchine* e di due lavori eseguiti nel suo Laboratorio: il primo dell'Ing. Pasqualini, *Determinazione del regime delle pressioni sopra una piastra piana, sottile, rotante con piccolo raggio,* il secondo dell'Ing. Carlo Luigi Ricci dal titolo: *Bilancia aerodinamica di torsione presso il Laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino.*

Il Vice Presidente presenta quindi in dono all'Accademia la Commemorazione di Torquato Taramelli che egli ha pubblicato nel " Bollettino del R. Comitato geologico d'Italia ", facendo rilevare che la Commemorazione dell'insigne scienziato è accompagnata da una completa rivista bibliografica delle opere pubblicate dal Taramelli a partire dal 1863.

Infine dal Vice Presidente viene presentato in dono a nome del P. Boccardi il vol. 2° delle *Pubblicazioni del R. Osservatorio Astronomico di Pino Torinese.*

Dopo la presentazione dei doni, il Vice Presidente rivolge parole di saluto e di felicitazione al Socio Zambonini, chiamato a coprire l'importantissimo ufficio di Direttore dell'Istituto di Chimica generale alla Università di Napoli, alle quali risponde commosso il Socio Zambonini, ringraziando.

Il Socio Panetti presenta quindi per l'inserzione negli *Atti* una Nota dell'Ing. Enrico Pistolesi dal titolo: *Una estensione del Metodo di Wittenbauer per il calcolo del grado di irregolarità di una motrice,* che viene accolta per la pubblicazione.

Dopo di che l'adunanza è dichiarata sciolta cogli auguri che il Vice Presidente rivolge ai colleghi di buona Pasqua.

LETTURE

Una estensione del metodo di Wittenbauer per il calcolo del grado di irregolarità di una motrice

Nota dell'Ing. Dr. ENRICO PISTOLESI

Presentata dal Socio nazionale residente Modesto Panetti

Il metodo del WITTENBAUER per la ricerca del grado di irregolarità di una motrice permette un'approssimazione maggiore di quella consentita dai metodi comunemente adoperati, giacchè con l'uso di una *forza ridotta* e di una *massa ridotta*, funzioni dello spazio percorso da un conveniente *punto di riduzione,* elimina l'errore che nasce dal fare uso, come in altri metodi, di grandezze funzioni della velocità, considerata come costante, laddove si tratta appunto di determinarne l'andamento, ignoto *a priori*. Il metodo del WITTENBAUER è quindi utilissimo tutte le volte che le forze agenti nella motrice sono funzioni del solo parametro dal quale dipende la *configurazione* della macchina. In una mia precedente Nota sull'argomento [1] mostrai precisamente l'applicazione del metodo al caso di motrici DIESEL, svolgendo il calcolo approssimato della massa ridotta al perno di manovella per una motrice con parecchi cilindri.

Peraltro il metodo del WITTENBAUER cade in difetto quando alcune delle forze in gioco siano funzioni, non più della posizione del punto di riduzione, ma della velocità angolare della motrice. Ciò accade sovente per le coppie resistenti applicate

---

[1] *Studio sull'uniformità di movimento dei motori a combustione a 6 e 8 cilindri* ("Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino", 19 novembre 1916, vol. LII).

all'albero, come nel caso in cui esse procedano da un'elica di propulsione, da un ventilatore (caso particolare dell'elica), ovvero da un freno elettrico o idraulico, ecc.

La presente Nota è diretta a mostrare quali modificazioni occorra apportare al metodo originario del WITTENBAUER per adattarlo a questi casi.

*
* *

Il metodo del WITTENBAUER si fonda sulla relazione

$$\int_{s_0}^{s} F\,ds = \frac{1}{2}\,Mv^2 - \frac{1}{2}\,M_0 v_0^2 \tag{1}$$

dove F è la forza ridotta, s lo spazio percorso dal punto di riduzione, M la massa ridotta, v la velocità del punto di riduzione. Nella (1) è manifestamente supposto che la forza ridotta F sia funzione unicamente di s.

La (1) può essere scritta sotto forma differenziale nel modo seguente:

$$F\,ds = d\left(\frac{1}{2}\,Mv^2\right). \tag{1$_a$}$$

Ora supponiamo che F si componga di due parti: F_1 funzione della sola s (forza motrice) e $-F_2$ funzione di v (forza resistente). Sarà allora:

$$F_1(s)\,ds - F_2(v)\,ds = d\left(\frac{1}{2}\,Mv^2\right). \tag{2}$$

La risoluzione del problema consiste nella risoluzione dell'equazione differenziale (2). Posto $v^2 = y$ può scriversi:

$$F_1(s)\,ds - F_2(y)\,ds = \frac{1}{2}\,d\,(My). \tag{3}$$

La risoluzione della (3) non è possibile, in generale, con metodi semplici di calcolo numerico o grafico; ma se si pone mente al fatto che la variazione della velocità, e quindi della y, è piccola, si potrà sempre porre con sufficiente approssimazione

$$F_2(y) = a + by.$$

Sostituendo nella (3) si ottiene:

$$(F_1 - a) - \frac{b}{M} \cdot My = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (My)$$

e posto $\frac{1}{2} My = z$ (z non è altro che la forza viva), si ha:

$$\frac{dz}{ds} + 2 \frac{b}{M} z - (F_1 - a) = 0 \tag{4}$$

cioè un'equazione del primo ordine, facilmente integrabile per via numerica o grafica.

Se indichiamo con z' e z'' due soluzioni della (4) si ha:

$$\frac{d(z'' - z')}{ds} = 2 \frac{b}{M} (z'' - z')$$

da cui facilmente

$$z'' = z' + Ce^{\int_0^s \frac{2b}{M} ds}$$

ossia, per $s = 0$,

$$z_0'' = z_0' + C \tag{5}$$

e per $s = l$ (spazio percorso dal punto di riduzione in un periodo della motrice)

$$z_l'' = z_l' + Ce^k, \qquad \text{posto} \qquad k = \int_0^l 2 \frac{b}{M} ds. \tag{6}$$

Le relazioni (5) e (6) possono servire a correggere il risultato ottenuto, assumendo un valore iniziale di z inesatto, dal che risulterebbe un moto non periodico. Sia z_0' il valore assunto per falsa posizione. Trattasi di trovare il valore vero z_0'', che deve risultare uguale a z_l''. Sarà:

$$\Delta = z_l' - z_0' = C(1 - e^k)$$

da cui

$$C = \frac{\Delta}{1 - e^k}$$

e quindi

$$z_0'' = z_0' + \frac{\Delta}{1 - e^k}.$$

In generale per il calcolo di k sarà sufficiente prendere un valor medio di $\frac{b}{M}$ che indicheremo ponendolo entro parentesi, scrivendo

$$k = 2l\left(\frac{b}{M}\right).$$

Allora la differenza fra il valore corrente di z'' e il valore iniziale z_0'' sarà espressa da

$$z'' - z_0'' = z' - z_0' + C\left(e^{\frac{k}{l}s} - 1\right),$$

ed essendo $\frac{k}{l}$ generalmente molto piccolo, si potrà scrivere:

$$z'' - z_0'' = z' - z_0' + C\frac{k}{l}s. \tag{7}$$

La (7) è lineare in s ed esprime perciò che le variazioni di z'' rispetto al valore iniziale z_0'' sono uguali alle differenze fra i valori di z' e le corrispondenti ordinate di una retta congiungente i valori estremi di z', cioè z_0' e z_l'.

Quando adunque si tratti di ricercare la variazione percentuale di z, per giudicare da questa il grado di irregolarità della motrice, sarà superfluo passare dal diagramma probabile z' a quello corretto z'', a meno che l'errore non sia grave. Basterà in generale congiungere con una retta i punti iniziale e finale del diagramma z e contare le variazioni di z a partire da questa retta.

Per l'integrazione grafica della (4) si scriva l'equazione sotto la forma seguente:

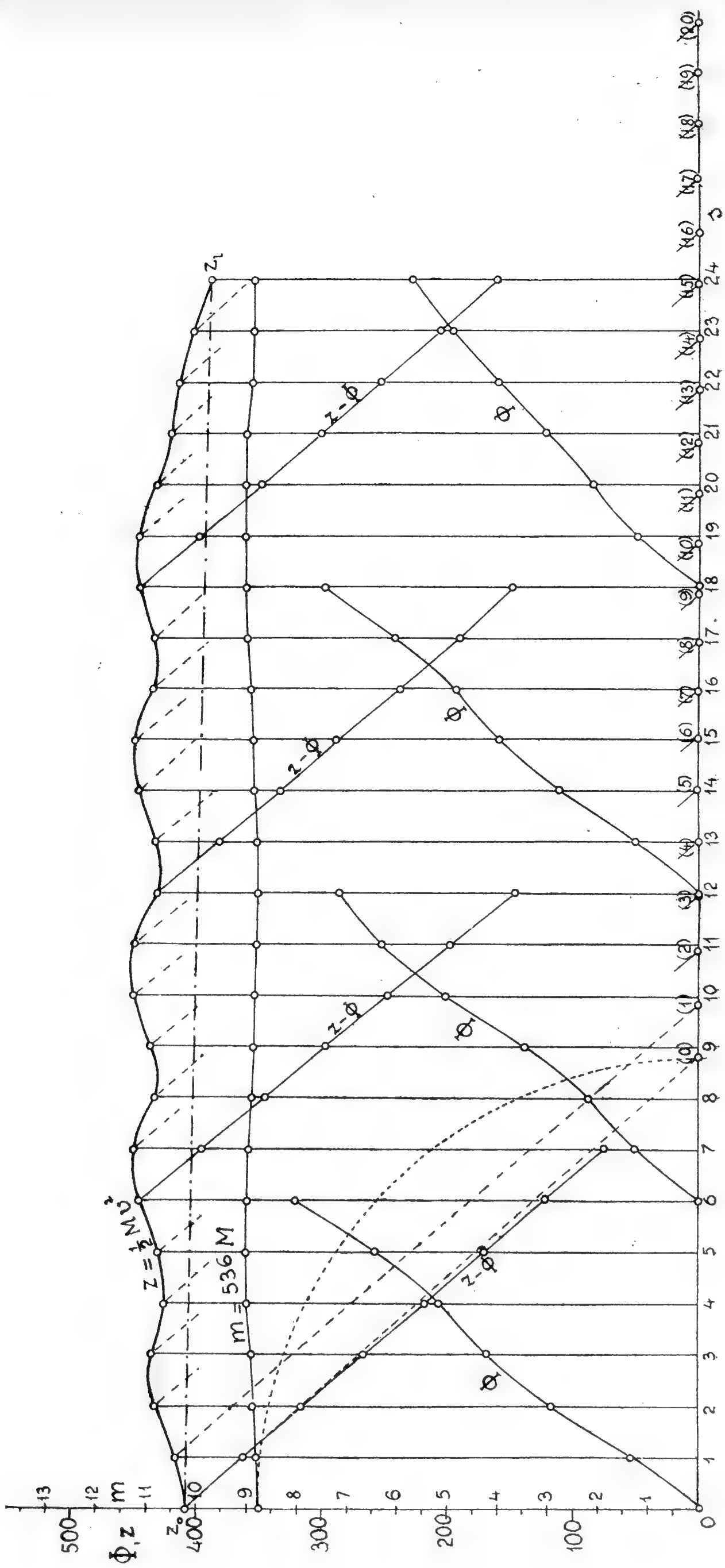
$$dz = (F_1 - a)\, ds - 2\frac{b}{M}z\, ds. \tag{4$_a$}$$

Posto

$$\int_0^s (F_1 - a)\, ds = \Phi(s) \tag{8}$$

sarà

$$d(z - \Phi) = -2\frac{b}{M}z\, ds = -\frac{z}{M/2b}\cdot ds. \tag{4$_b$}$$

Ciò premesso, la tavola annessa mostra come possa procedere l'integrazione grafica.

Sull'asse delle ascisse sono distesi i valori di s, e il segmento corrispondente all'intero periodo è diviso in parti uguali (24 nella tavola). Uno dei diagrammi (spezzato in quattro nella tavola per ragioni di spazio) rappresenta Φ.

Un secondo diagramma rappresenta $\frac{M}{2b}$.

Si parte da un valore probabile iniziale z_0; si ribalta sull'asse delle ascisse $\frac{M}{2b}$, ottenendo così il punto (0) e si conduce la retta $z_0\,(0)$. Il punto in cui essa incontra l'ordinata del punto 1 rappresenta manifestamente $(z-\Phi)_1$. Per avere z_1 basterà addizionare all'ordinata del punto in discorso l'ordinata Φ_1. Si eseguisca il ribaltamento sull'asse delle ascisse di $\left(\frac{M}{2b}\right)_1$, in guisa da ottenere il punto (1). Congiungasi z_1 con (1) e si conduca la parallela dal punto $(z-\Phi)_1$. Nell'insezione con l'ordinata 2 si avrà il punto $(z-\Phi)_2$, a cui aggiunta l'ordinata $(\Phi)_2$ si avrà z_2. E così di seguito.

Il punto finale del diagramma z avrà generalmente una ordinata leggermente diversa da quella del punto iniziale.

Congiunti i due punti con una retta, si leggeranno a partire da questa le variazioni di z, che si aggiungeranno al valore iniziale z_0. La correzione del valore iniziale può trascurarsi quando la differenza fra le due ordinate sia piccola.

Infine, se M è poco variabile, com'è il caso della figura, e anche z risulta poco variabile, il grado di irregolarità della motrice risulterà con tutta semplicità espresso dalla formula:

$$i = \frac{z_{\text{max.}} - z_{\text{min.}}}{2\, z_{\text{medio}}}. \tag{9}$$

Esempio.

Si è scelto come esempio il II della nostra precedente Nota: *Motore* Diesel *per sottomarini, a 6 cilindri, a due tempi, con un compressore a 2 fasi* (costruzione F.I.A.T.-S. Giorgio). Nella citata Nota si assumeva una coppia resistente costante e ne risultava, come grado di irregolarità, $i=\frac{1}{12}$.

Si è fatta ora invece l'ipotesi che la coppia resistente sia semplicemente proporzionale al quadrato della velocità angolare, e quindi anche al quadrato della velocità v del punto di riduzione (perno di manovella).

Si ha cioè

$$a = 0$$

e perciò Φ non è altro che il lavoro compiuto dalle forze motrici, dedotto il lavoro assorbito dal compressore.

Tale lavoro, alla fine di un giro, è uguale a 1190-70 = 1120 Kg.cm. essendo 1190 Kg.cm. il lavoro motore, 70 Kg.cm. il lavoro consumato dal compressore.

La motrice compie mediamente 500 giri al minuto, pari ad una velocità angolare media $\Omega = 52.4$. Il raggio di manovella è cm. 13.5 e perciò la velocità v del punto di riduzione risulta di 707 cm./sec. e lo spazio l percorso in un giro dal punto di riduzione risulta di 84.8 cm.

Se ne deduce la seguente relazione approssimata:

$$1120 = b \times 707^2 \times 84.8$$

$$b = \frac{2.64}{10.000} \qquad \frac{1}{2b} = 18950.$$

Perciò il diagramma $\frac{M}{2b}$ dovrebbe avere come ordinate 18950 M. Ma poichè sull'asse delle ascisse ogni centimetro rappresenta cm. 3.53, per usare la costruzione precedentemente indicata converrà moltiplicare i valori di $\frac{M}{2b}$ per $\frac{1}{2.53} = 0.283$.

Così il diagramma m ha per ordinate

$$0.283 \times 18950\, M = 536\, M.$$

Applicando la formula semplice (9), che in questo caso è applicabile, si ottiene:

$$i = \frac{1}{15}.$$

Si rammenta che nel caso della coppia resistente costante si aveva $\frac{1}{12}$. Vi ha dunque, com'è naturale, un vantaggio, ma forse meno grande di quanto potrebbe a prima vista aspettarsi.

Superfluo dire che al procedimento grafico può essere, senza alcuna difficoltà, sostituito un ovvio calcolo numerico.

Marzo 1923.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LVIII, Disp. **11ª, 12ª** e **13ª, 1922-1923**

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1923

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Aprile 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Segre, Peano, Foà, Somigliana, Ponzio, Sacco, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza il Presidente Senatore Ruffini e il Socio D'Ovidio.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio Sacco fa omaggio all'Accademia di un suo recente lavoro, *Una gigantesca collana di gemme glaciali*. Il Socio Mattirolo, rilevando l'importanza di questo studio, fa osservare come esso illustri l'imponente serie di ghiacciai che rivestono i versanti del massiccio del Gran Paradiso diventato Parco Nazionale per la conservazione della Fauna e della Flora alpina; egli prende da ciò occasione per comunicare all'Accademia quanto la Commissione Reale per il Parco sta concretando in questi giorni.

Il Vice Presidente presenta e fa dono all'Accademia dell'Opera del compianto suo fratello Prof. Corrado, che illustra la *Elmintologia italiana dai suoi primi tempi all'anno 1910*. La Bibliografia del vastissimo argomento è compresa nel 1° volume,

mentre il 2° è dedicato alla Sistematica, alla Corologia e alla Storia dell'importante argomento.

L'Accademia ringrazia il donatore, lieta di possedere l'opera insigne che è complemento necessario della classica collezione elmintologica messa insieme dal PARONA con ricerche che durarono per tutta la vita sua, e da lui donata all'Università di Napoli.

Il Socio PONZIO comunica quindi alla Classe la sua XI Nota sulle *Diossime*, la quale è accolta per la pubblicazione negli *Atti*.

Il Socio SACCO presenta una sua Nota, che si riferisce allo studio di un ciottolo curioso, stato trovato nell'Appennino parmense nel greto di un torrente. Detto ciottolo, che il Socio SACCO presenta all'adunanza, è notato da segni speciali, da striscie e da incavi, paragonabili a altri che caratterizzano bronzi e pietre ritenuti talismani. Sul significato di tale interessante formazione interloquiscono alcuni Soci.

La Nota del Socio SACCO, dal titolo *Talismani (?) preistorici*, è accolta per la pubblicazione negli *Atti*.

LETTURE

Talismani (?) preistorici

Nota del Socio nazionale residente Prof. FEDERICO SACCO

Nella scorsa estate percorrendo l'Appennino parmense per studi geologici ebbi dal mio vecchio amico l'Ing. Cav. C. Ponci di S. Andrea delle Fonti un curioso ciottolo raccolto in Val Dordone (affluente del Taro) tra la Borgata di Rocca Lanzona ed il ruiniforme affioramento serpentinesco di Roccia Corva, zona desolata di Argille scagliose su cui stanno sparsi lembi di marne arenacee dell'Oligocene e di Calcari marnosi dell'Eocene; regione interessante, sia geologicamente, sia perchè già vi si raccolsero cuspidi di selce che indicano l'antica presenza dell'uomo neolitico in tali colline.

Il ciottolo in questione, di cui parmi opportuno dare un cenno, è un frammento allungato, subtriangolare, di un'arenaria calcarifera, fine, grigiastra, straterellata ma compattissima, che evidentemente subì un trasporto alluviale abbastanza lungo, come indica l'arrotondamento di tutti i suoi spigoli e delle estremità, ma non tanto prolungato da obliterarne la primitiva forma di frammento di roccia stratificata. Le sue dimensioni sono di circa 14 centim. di lunghezza per 5 di larghezza, con uno spessore (nel senso ortogonale alla stratificazione) di circa 32 millim. (Vedi fig. 1).

L'aspetto generale della superficie lisciata indica che il ciottolo, dopo l'arrotondamento naturale per opera torrenziale, dovette subire un maneggiamento prolungato.

La sua superficie maggiore presenta tre profondi solchi longitudinali, fra loro subparalleli, intersecati obliquamente da cinque analoghi solchi trasversali, in modo da costituire una specie di irregolare fenestratura a losanga, con qualche mag-

giore incavatura nei punti di incrocio delle solcature (fig. 1); mentre invece sopra una superficie laterale pianeggiante osservansi solo solcature incomplete. La solcatura fenestrata appare chiaramente lavoro intenzionale, arcaico, ma problematico è il suo scopo e significato.

Fig. 1.

Dopo inutile consultazione di opere, musei (1) e studiosi di Paleoetnologia (fra cui l'illustre Senatore Pigorini, a cui portai in esame il misterioso ciottolo a Roma), parvemi dover escludere varie ipotesi dapprima affacciantisi, cioè di timbri-matrice o di speciali matrici per fondita (2), di

(1) Nel grande Museo preistorico di Roma esistono, tratte da Terramare del Cremonese, del Mantovano, del Piacentino, ecc., della età del bronzo specialmente, varii oggetti fittili ricordanti il ciottolo in questione, sia in arenaria fine (come quella, con foro per appenderla, di Pieve S. Giacomo nel Cremonese), sia in Pietre verdi varie, ma trattasi evidentemente di pietre da cote, come mostra la loro lisciatura speciale.

(2) Nella Terramare di Maranello (Modenese) si trovò una supposta matrice per fondita (Museo preistorico di Roma), costituita di due profondi solchi paralleli incrociati ortogonalmente, a distanza, con due altri solchi pure tra loro paralleli, ricordando un po' la lastra sottoindicata della Collezione Chierici, ma lo scopo di matrice pare in tal caso ammissibile, data la netta delimitazione e forma dei solchi.

pintaderas (1), di cote (2), di politoi di selci, di ascie-mazze, di marche di caccia e simili.

Frattanto nel visitare l'importante Collezione Chierici, del Museo di Reggio, potei rintracciare nella vetrina 29, sopra una tavoletta, fra due lastrine (N° 68 e 70), una lastra maggiore (N° 69) irregolarmente parallelepipeda (diametro di circa centimetri 9 $^1/_2 \times 5\ ^1/_2$) di arenaria grigiastra (fig. 2 disegnata ad occhio davanti all'originale) che porta 5 solcature incrociate un po' analogamente a quelle del ciottolo in questione, ma con fenestratura più regolare; però con lavoro un po' analogo e quindi probabilmente con intenzione consimile a quella che diresse le solcature sul ciottolo parmense. La lastra della Collezione Chierici è compresa nella indicazione " Sopra una Terramare dell'Età del Bronzo a Ca-

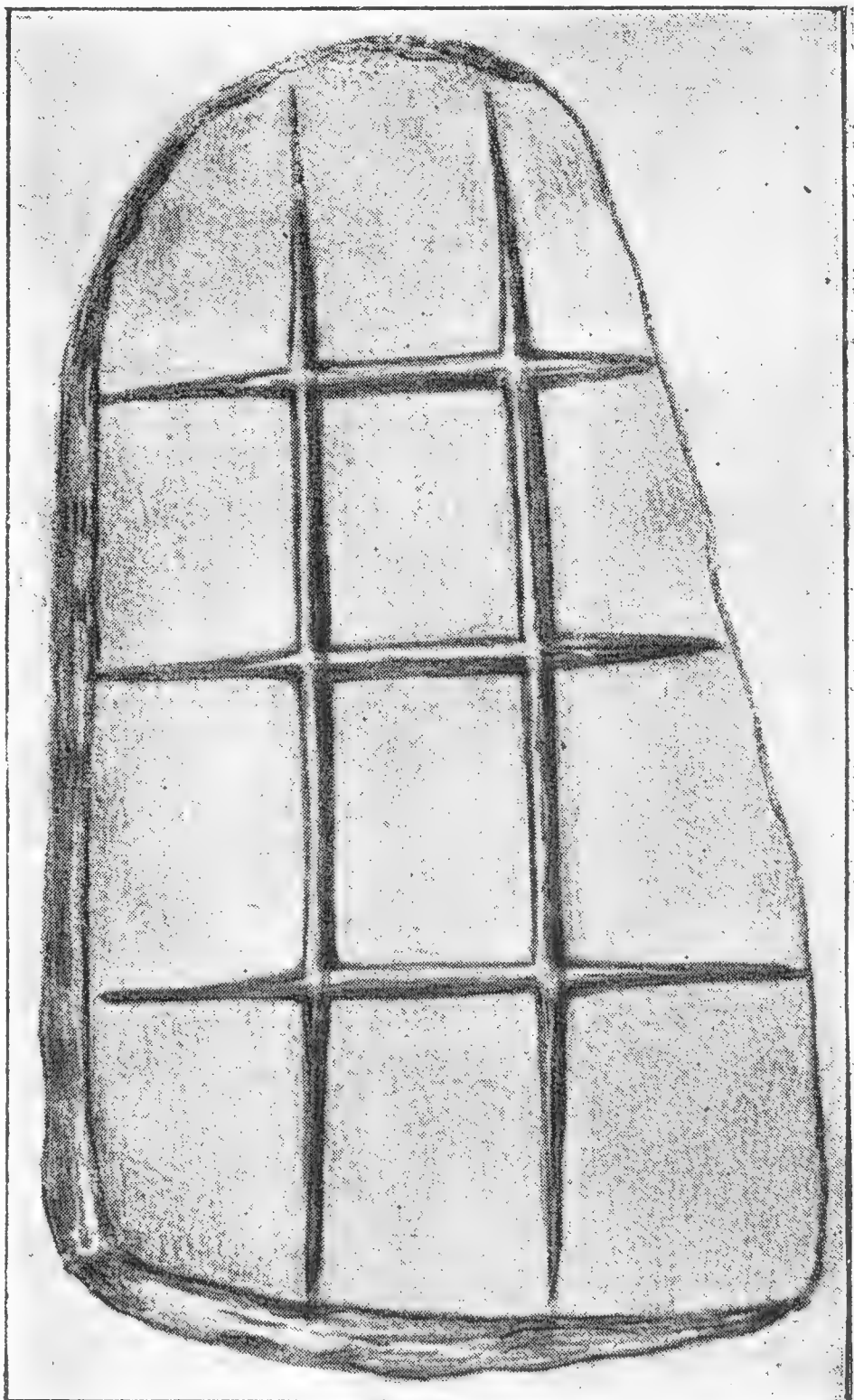



Fig. 2.

(1) Nel Museo preistorico di Roma sono conservati varii ciottoli allungati o arnesi fittili brunastri, a forma di biscottino, dell'epoca del bronzo, trovati, uno nella Terramare di Ceresara nel Mantovano e parecchi nella palafitta della Torbiera di Polada presso Lonato, i quali presentano sopra una faccia, trasversalmente, numerose solcature punteggiate che fanno dubitare trattisi di grossolane *pintaderas*.

(2) Recentemente la pietra in esame fu usata, dal lato non solcato, come cote dal suo ultimo possessore.

stellarano „, ma nel catalogo ms. Clerici gli oggetti 68, 69, 70, assegnati alla Età del Ferro, 1° e 2° periodo, sono precisamente indicati come provenienti da " Cella Cassoli „ frazione di Reggio, ed interpretati come " Peso usato a cote „. Tale interpretazione però non mi pare soddisfacente, per quanto si possa pensare che dette solcature corrispondano a segni di peso o di quantità o di misura, giacchè ancor oggi intagli analoghi si fanno dai selvaggi e dai nostri stessi contadini su ossa, su legno, ecc. per segnali diversi.

Intanto è da notarsi che esaminando minutamente il ciottolo parmense si può constatare che le sue solcature non furono eseguite (1) secondo un allineamento qualsiasi, ma seguendo perfettamente speciali lineette bianche di calcite che intersecano appunto ortogonalmente in due sensi la stratificazione originaria della roccia e rappresentano il comune fenomeno di litoclasi intersecanti strati rocciosi, riempite e cementate poi da calcite deposta nelle fratture dalle filtranti acque calcarifere; tutto ciò naturalmente molto prima che la roccia venisse a giorno, poi si frantumasse, cosicchè i suoi frammenti trascinati e rotolati dai torrenti prendessero finalmente la forma di ciottolo sulla cui superficie vennero a spiccare le lineette bianche intersecantisi variamente e spiccanti per la tinta chiara sul fondo bruno generale, tanto da costituire talora ciottoli curiosissimi.

Ricordo in proposito che non riuscii a convincere della semplicità fondamentale del fenomeno un mio egregio Collega, non geologo, che anni fa mi diede in esame un ciottolo di tale tipo, tanto strana e straordinaria gli sembrava la sua disegnatura bizzarramente intrecciata.

Ciò posto, per un complesso di considerazioni, senza naturalmente poter escludere in via assoluta ogni altra interpretazione, sembrami probabile che chi raccolse questo ciottolo (forse bagnato in un alveo di torrente, apparendo meglio in tal caso le lineette bianche sul fondo grigio-bruno) fu colpito forse dalla sua forma un po' strana, a martello od a fallo, e dalla sua cu-

(1) Non è possibile che si tratti di semplice alterazione o carie naturale prodotta dagli agenti esterni, data la forma delle solcature, l'essere limitate ad una faccia principale, ecc.

riosa filettatura incrociata, per cui lo ritenne e poi lo lavorò, sopra una faccia principale, a solcature intrecciate seguendo le lineette bianche, formandone così un oggetto speciale di superstizione, analogo a quelli che, costituiti pure di varie pietre (selce, pietre verdi, granito, arenaria, ecc.), troviamo tanto frequenti presso i selvaggi attuali nonchè fra i resti paleoetnologici dal Neolitico in poi, e che si sogliono indicare col nome di amuleti, talismani e simili.

Ricordo per esempio che nel libro di CH. ABBOT, *Primitive Industry* (1881) riguardante le razze indigene, i cosidetti Indiani, dell'America settentrionale, sono indicate e figurate (fig. 359, 360, 367, ecc.) molte pietre allungate, di New Jersey, aventi varii solchi incrociati, ma, avendo esse uno o due fori, il loro significato di Pietra-pendaglio come amuleti o feticci risulta abbastanza chiaro.

Nello stesso libro dell'Abbot, fra le *Inscribed stones* di tipo cerimoniale o con carattere di pietra commemorativa o di ricordo qualsiasi, è indicato (fig. 334) come proveniente da New Jersey un frammento di lastra di Micaschisto con solchi incrociati ricordanti quelli in questione (Vedi fig. 3).

Del resto, per quanto lunga e complessa sia la Bibliografia riguardante tali argomenti, la distinzione fra questi gruppi di oggetti non è sempre facile (1). Per lo più si indica come talismano un pezzo di pietra o di metallo segnato con geroglifici o solchi o caratteri simbolici, cabalistici, fantastici, mistici e simili, al quale sono attribuite virtù miracolose, conferendo un potere superiore, una speciale protezione a chi lo possiede; mentre invece amuleto è per lo più un oggetto svariato, quasi sempre portato indosso (e quindi relativamente piccolo e con un foro per appenderlo con una cordicella), che preserva da pericoli, malattie, iettature, ecc.

L'uso degli amuleti (colle forme e coi materiali più svariati) fu ed è tuttora estesissimo, tanto che se ne conoscono

---

(1) DE LISLE, *Des Talismans* (Paris, 1636); BELIN I. A., *Traité des Talismans* (Paris, 1658); PLACET FR., *Superstition du temps récognue aux Talismans* (Paris, 1668); ARPE P. F., *De Prodigiis Naturae et Artibus Operibus Talismanes et Amuleta dictis* (Hamburg, 1717), ecc., ecc.

resti numerosi (in pietra, conchiglie, ossa, denti, bronzo, ecc.) dal Neolitico in poi; ricordo per esempio quello di Cloritoschisto a cerchietti incisi trovato a Ponzone e figurato dall'Issel nella sua *Liguria preistorica*, ecc., senza parlare degli amuleti attuali, alcuni analoghi agli antichi, portati dai selvaggi ed anche da donne e ragazzi in paesi civili, come, per l'Italia, ha special-

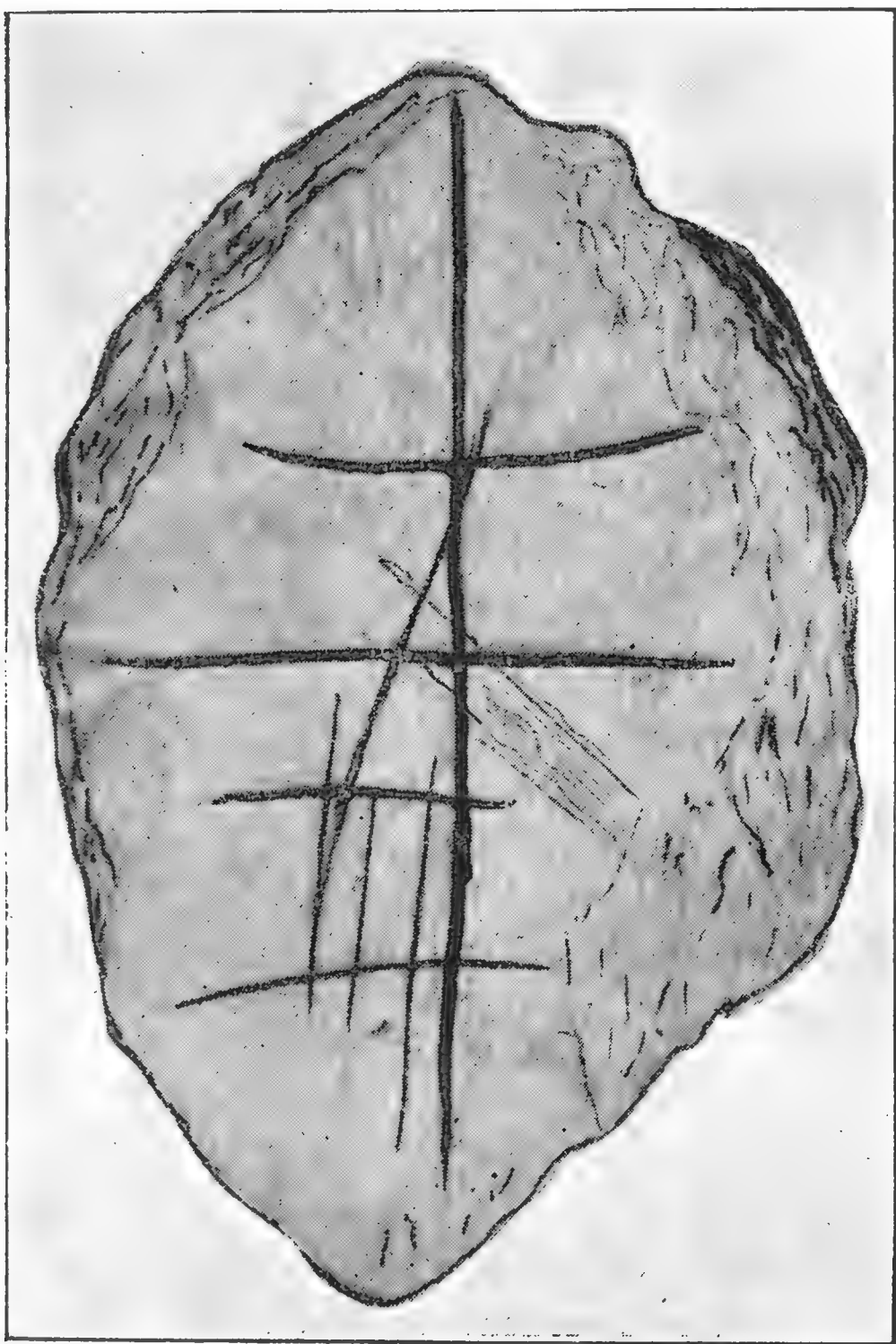



Fig. 3.

mente segnalato il Bellucci (famoso illustratore di tali oggetti), sinchè si giunge ai noti scapolari e simili.

Tra gli amuleti a pendaglio alcuni sono anche un po' grandi e con segni ricordanti alquanto quelli del ciottolo parmense in esame; così in una sepoltura presso Vranna (Portogallo), attribuita al periodo Robenhausiano (Neolitico superiore), si trovò una lastra parallelepipeda, di roccia schistosa un po'

tenera (con relativo foro per appenderla), avente sopra una faccia solcature varie; così pure un pendaglio di calcare (già figurato dall'Issel) con solcature radiali fu raccolto nella grotta ligure delle Arene Candide.

Del resto la Litolatria, o culto della pietra, sotto diversi aspetti, è una delle forme della Idolatria, tanto preistorica che attuale. Diverse pietre sacre, venerate, variamente scolpite (talune ricordanti certi *Mehnirs*, pure talora con incisioni varie), vennero scoperte nell'Appennino settentrionale, come segnalò anche recentemente l'illustre Dott. U. Mazzini descrivendo alcuni

Fig. 4 *a*.

Fig. 4 *b*.

Monumenti megalitici e le Stele e Statue-mehnirs di Val di Magra, accennandomi anche ultimamente la scoperta di segni a solchi incrociati sui calcari mesozoici del M. Bermego, alta montagna sita a N.O. della Spezia. Anzi, avendogli comunicato la fotografia del ciottolo parmense in questione, egli ebbe la cortesia di esprimermi la sua ipotesi trattarsi di un oggetto di culto che poteva servire come uno scongiuro contro malattie, pericoli o cattivi influssi di ogni genere. Di più egli volle gentilmente inviarmi le fotografie di un blocchetto di bronzo trovato nell'agro brugnatese (cioè nel territorio di Brugneto nella media Val di Vara), di forma trapezoidale (fig. 4 *a, b*), che pre-

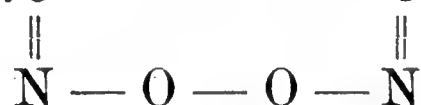
senta, sulle sue due faccie maggiori, speciali geroglifici fatti a punzone, che paiono di carattere magico, traversati, in una faccia, da forti solchi un po' analoghi a quelli della lastra reggiana, mentre che su di un'altra faccia minore laterale esiste un altro solco foggiato quasi ad irregolare Z allungato ed obliquato; probabilmente il lavoro dei geroglifici e dei solchi fu fatto in due tempi successivi, fors'anche lontani fra loro.

Considerando quest' ultimo interessante ritrovato parmi che pure esso venga in conforto all'idea che anche i due pezzi litoidi sovraccennati si possano interpretare come oggetti di superstizione, forse specie di talismani. Quanto alla loro età, mentre la grossolanità della lavorazione del ciottolo parmense gli darebbe carattere neolitico, tanto più che nella regione del suo ritrovato si raccolsero già scheggie e cuspidi di selce di tipo neolitico, i due altri oggetti un po' analoghi sovraccennati sono piuttosto riferibili all'età dei metalli, giacchè il blocchetto brugnatese è di bronzo e la lastra reggiana è riferita dal Chierici al periodo del ferro; ma trattandosi di ritrovati senza giacitura regolare, la loro età rimane alquanto incerta.

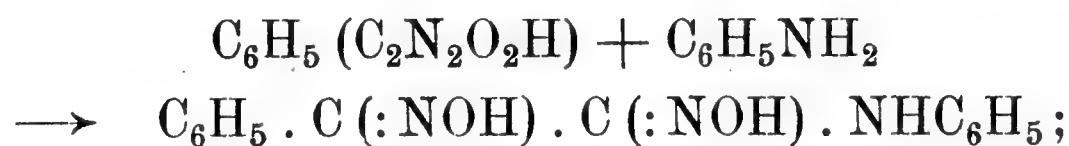
Ricerche sulle diossime

Nota XI del Socio nazionale residente GIACOMO PONZIO

Come ho dimostrato nella Nota VI [1], è soltanto dalla forma α (p. f. 168°), e non dalla forma β (p. f. 180°), della fenilgliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$, che per azione del tetrossido di azoto risulta il composto $C_6H_5(C_2N_2O_2H)$ al quale Scholl [2] attribuì la struttura

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5.C & \text{———} & C.H \\ \| & & \| \\ N - O & - & O - N \end{array}$$

di *perossido della fenilgliossima*, ammettendo che derivasse da quest'ultima per eliminazione dei due atomi di idrogeno ossimico.

Detto composto differisce notevolmente, nel suo comportamento chimico, dalle sostanze le quali, in modo analogo, si ottengono per deidrogenazione delle gliossime $R . C(:NOH) . C(:NOH) . R_1$ in cui R ed R_1 sono alchili, arili od acili. Infatti, p. es., mentre il *perossido della fenilgliossima* può addizionare una molecola di anilina dando l'α-fenilaminofenilgliossima [3]

$$C_6H_5(C_2N_2O_2H) + C_6H_5NH_2$$
$$\longrightarrow C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5 ;$$

i *perossidi* della dimetilgliossima $CH_3(C_2N_2O_2)CH_3$, della difenilgliossima $C_6H_5(C_2N_2O_2)C_6H_5$ e della β-metilbenzoilgliossima

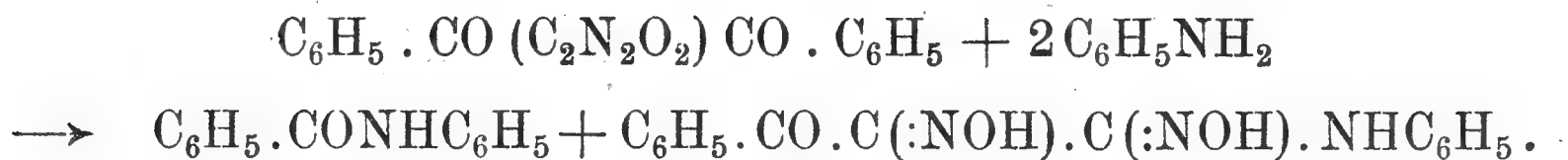
---

(1) " Gazz. Chim. Ital. „, *53*, I, 25 (1923).

(2) *Ber.* *23*, 3504 (1896).

(3) Nota VIII, " Gazz. Chim. Ital. „, *53*, I (1923).

$CH_3 (C_2N_2O_2) CO . C_6H_5$ (4) non reagiscono; ed il *perossido* della dibenzoilgliossima $C_6H_5 . CO (C_2N_2O_2) CO . C_6H_5$ dà origine a benzanilide ed a benzoilaminofenilgliossima (benzoil-isonitroso-acetanilid-ossima) (5)

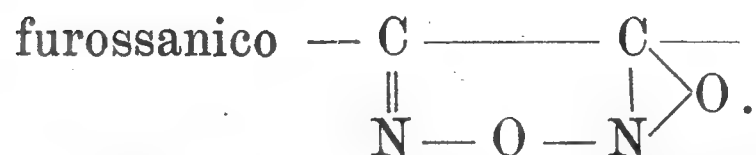
$$C_6H_5 . CO (C_2N_2O_2) CO . C_6H_5 + 2 C_6H_5NH_2$$
$$\longrightarrow C_6H_5.CONHC_6H_5 + C_6H_5.CO.C(:NOH).C(:NOH).NHC_6H_5 .$$

Però, malgrado che questi fatti potessero, a mio avviso, far pensare che il *perossido della fenilgliossima, il quale fra i perossidi citati è l'unico avente proprietà additive*, dovesse possedere struttura differente da quella degli altri quattro, Wieland e Semper riprendendo lo studio del primo (6), dopo avergli assegnato la costituzione seguente

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C \text{———} C \text{—} H \\ \quad\;\; \| \qquad\quad\; | \!>\! O \\ \quad\;\; N - O - N \end{array}$$

ed il nome di *fenilfurossano*, credettero di poter concludere che *tutti* i composti fino allora considerati come *perossidi di gliossime* non contengono il ciclo esaatomico

$$\begin{array}{l} - C \text{————} C - \\ \;\;\, \| \qquad\qquad \| \\ \;\;\, N - O - O - N \end{array}$$

bensì il ciclo furossanico

$$\begin{array}{l} - C \text{———} C \text{—} \\ \;\;\, \| \qquad\quad | \!>\! O . \\ \;\;\, N - O - N \end{array}$$

E per accordare la formola *furossanica* coi risultati delle esperienze di Forster e Fierz (7), di Green e Rowe (8) e di Angeli (9), secondo il quale, ammettendo nei *perossidi delle gliossime* un ciclo non simmetrico, i perossidi $R (C_2N_2O_2) R_1$, in cui R_1 è diverso da R, dovrebbero, analogamente agli azossicomposti $R (N_2O) R_1$, esistere in due isomeri, Wieland asserisce,

---

(4) Mie esperienze inedite.

(5) Böeseken, " Rec. trav. chim. ", *29*, 275 (1910); Böeseken e van Lennep, " Id. ", *31*, 196 (1912).

(6) *Ann.* 358, 36 (1906).

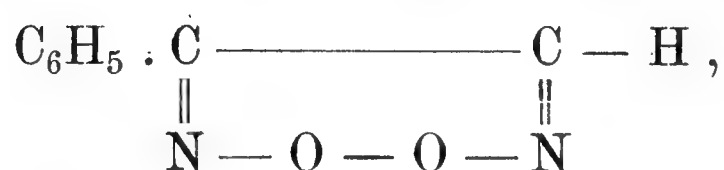
(7) " J. chem. Soc. ", *101*, 2452 (1912).

(8) " Id. ", *103*, 897, 2023 (1914).

(9) " Gazz. Chim. Ital. ", *46*, II, 300 (1916).

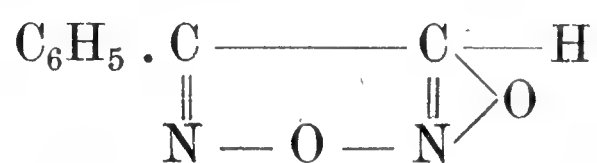
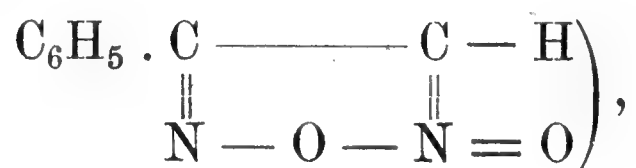
in una Nota successiva (10), di essere riuscito ad ottenere una seconda forma (*labile*) del *fenilfurossano*, fusibile a 106°-108°, cioè più alto della forma (*stabile*), fusibile a 95° od a 96°-97° preparata da Scholl e da Wieland e Semper (loc. cit.), soggiungendo che dalla forma stabile non si può più riavere la forma labile.

I fatti che più avanti riferisco mi autorizzano invece a concludere che esiste un unico composto della formola $C_6H_5\,(C_2N_2O_2H)$ fusibile a 95°, a 96°-97°, od a 108° a seconda del suo grado di purezza, e che il suo comportamento verso l'acido cloridrico, verso l'anidride acetica e verso l'idrogeno nascente non si accordano nè colla struttura di *perossido della fenilgliossima*

$$\begin{array}{lcccl} C_6H_5 . & C & \text{———————} & C & - H , \\ & \| & & \| & \\ & N & - O - O - & N & \end{array}$$

nè con quella di *fenilfurossano*

$$\begin{array}{lcccl} C_6H_5 . & C & \text{—————} & C & - H \\ & \| & & \| & >O \\ & N & - O - & N & \end{array}$$

(cambiata più tardi in

$$\left.\begin{array}{lcccl} C_6H_5 . & C & \text{—————} & C & - H \\ & \| & & \| & \\ & N & - O - & N & = O \end{array}\right),$$

bensì con quella di *ossido dell'ossima del cianuro di benzoile* (ossido dell'ossiminobenzilcianuro) $\begin{array}{lcccl} C_6H_5 . & C & \text{————} & C & \\ & \| & & \| & >O. \\ & NOH & & N & \end{array}$ Ed in realtà, come ossima, per idrolisi, esso fornisce idrossilamina e trattato a freddo con anidride acetica dà l' acetilderivato $\begin{array}{lcccl} C_6H_5 . & C & \text{—————} & C & \\ & \| & & \| & >O \\ & NOCOCH_3 & & N & \end{array}$; e, come ossido di nitrile, ridotto con polvere di zinco ed acido acetico si trasforma nell'ossima del cianuro di benzoile (ossiminobenzilcianuro) $C_6H_5 . C\,(:NOH) . CN$.

---

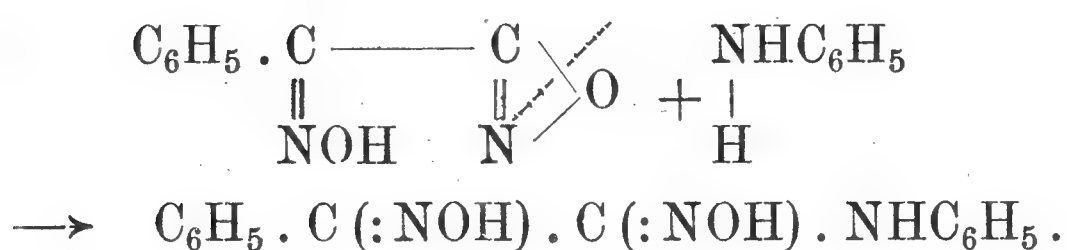
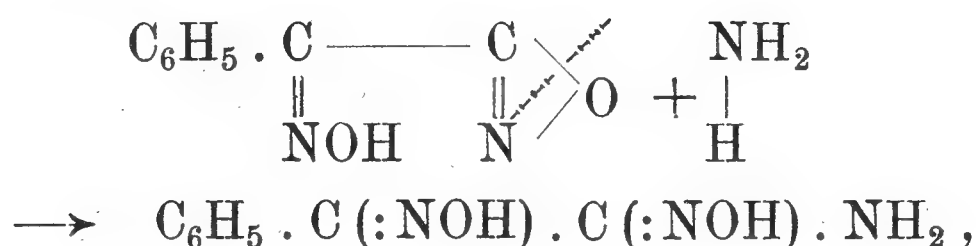
(10) *Ann.*, *424*, 108 (1921).

Colla formola che io propongo si possono inoltre interpretare senza difficoltà le reazioni per le quali il composto $C_6H_5(C_2N_2O_2H)$ trattato con soluzioni acquose di ammoniaca ([11]) o di anilina ([12]) addiziona una molecola di queste ultime dando rispettivamente origine ad α-fenilaminogliossima e ad α-fenilaminofenilgliossima

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C \text{———} C \diagdown\!\!\diagup \quad NH_2 \\ \quad\ \| \qquad\quad\ \|\!\diagup\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\rangle O + | \\ \ NOH \quad\ \ N \qquad\quad H \end{array}$$

$$\longrightarrow C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NH_2 ,$$

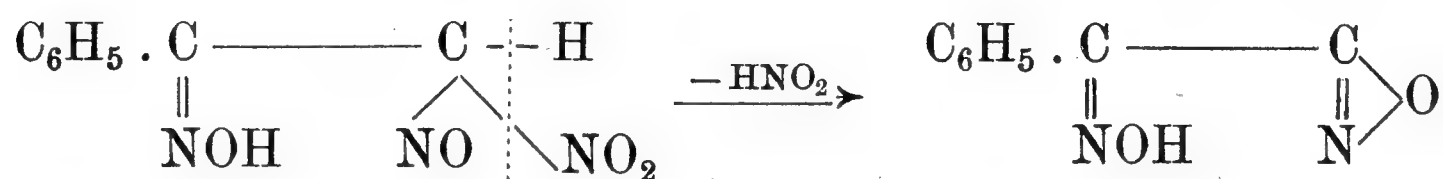
$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C \text{———} C \diagdown\!\!\diagup \quad NHC_6H_5 \\ \quad\ \| \qquad\quad\ \|\!\rangle O + | \\ \ NOH \quad\ \ N \qquad\quad H \end{array}$$

$$\longrightarrow C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5 .$$

In quanto al modo col quale l'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile prende origine, avendo già dimostrato colle mie precedenti ricerche che *nelle forme α delle gliossime i due ossiminogruppi non sono equivalenti*, ammetterò che la α-fenilgliossima (p. f. 168°) si comporti verso il tetrossido di azoto come la metilacetilgliossima $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . CO . CH_3$ e l'α-metilbenzoilgliossima $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . CO . C_6H_5$ ([13]). Ora, poichè queste ultime reagendo nella loro forma tautomera di α-ossimino-β-nitroso-γ-chetopentano $CH_3 . C(:NOH) . CH(NO) . CO . CH_3$ e di α-ossimino-β-nitroso-γ-chetofenilbutano $CH_3 . C(:NOH) . CH(NO) . CO . C_6H_5$ dànno rispettivamente origine ad α-ossimino-β-pseudonitrol-γ-chetopentano $CH_3 . C(:NOH) . C(:N_2O_3) . CO . CH_3$ e ad α-ossimino-β-pseudonitrol-γ-chetofenilbutano $CH_3 . C(:NOH) . C(:N_2O_3) . CO . C_6H_5$, mi sembra logico concludere che la α-fenilgliossima reagendo nella sua forma tautomera di α-ossimino-β-nitroso-feniletano $\begin{array}{l} C_6H_5 . C \text{————} C - H \\ \qquad\ \ \| \qquad\qquad \diagup\diagdown \\ \quad\ \ NOH \qquad NO\ \ H \end{array}$

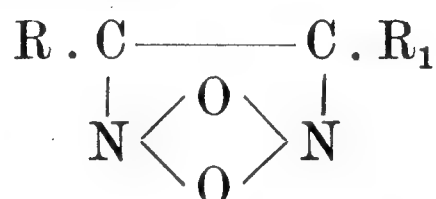
si trasformi, in modo analogo, in α-ossimino-β-pseudonitrol-

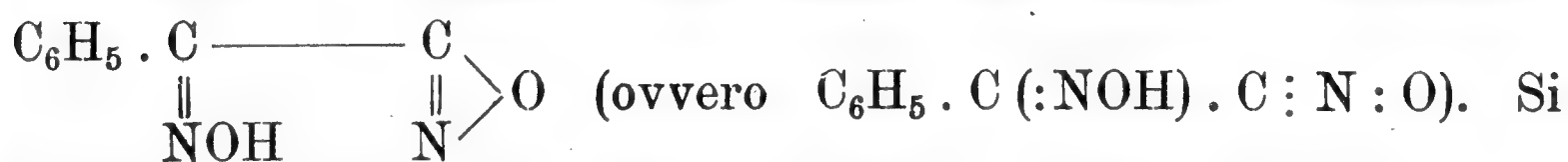
([11]) *Ann. 358*, 61 (1907) e Nota VI, " Gazz. Chim. Ital. „, *53*, I, 28 (1923).
([12]) Nota VIII, " Gazz. Chim. Ital. „, *23*, I (1923).
([13]) Note II e III, " Gazz. Chim. Ital. „, *52*, I, 289 e II, 145 (1922).

feniletano $C_6H_5 . C(:NOH) — C(NO)(NO_2) — H$. Però, mentre le due pseudonitrolossime suaccennate sono stabili e si possono facilmente isolare, quest'ultimo composto perde spontaneamente una molecola di acido nitroso dando origine all'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile

$$C_6H_5 . C(=NOH) — C(NO)(NO_2) — H \xrightarrow{-HNO_2} C_6H_5 . C(=NOH) — C{=}N{>}O$$

il quale è il prodotto finale dell'azione del tetrossido di azoto sulla α-fenilgliossima (14).

Per conseguenza, pur riservandomi di proseguire lo studio di questo argomento e di estenderlo ad altre gliossime R.C(:NOH). C(:NOH). H, ritengo fin d'ora che sarebbe conveniente abbandonare il nome di *furossani* pei composti $R(C_2N_2O_2)H$, conservando il nome di *perossidi* per quelli risultanti dalla deidrogenazione delle gliossime R. C(:NOH). C(:NOH). R_1, ai quali, in accordo coi fatti che essi non posseggono proprietà additive e che, a differenza dei primi, sono riducibili col metodo di Angeli, in α-diossime, si può assegnare la formola

$$R . C — C . R_1 \quad (\text{N} < {}^{O}_{O} > \text{N})$$

proposta da Green e Rowe (loc. cit.) ed accettata anche da Angeli.

XXVIII. — **Ossido dell'ossima del cianuro di benzoile** $C_6H_5 . C(=NOH) — C{=}N{>}O$ (ovvero C_6H_5. C(:NOH). C : N : O). Si ottiene senz'altro allo stato di perfetta purezza trattando con

---

(14) Invece, come già ho dimostrato (loc. cit.), i due gruppi > NOH della β-fenilgliossima hanno il medesimo comportamento; ed in realtà, per azione del tetrossido di azoto essa fornisce il fenilnitroperossido $C_6H_5(C_2N_2O_2)NO_2$.

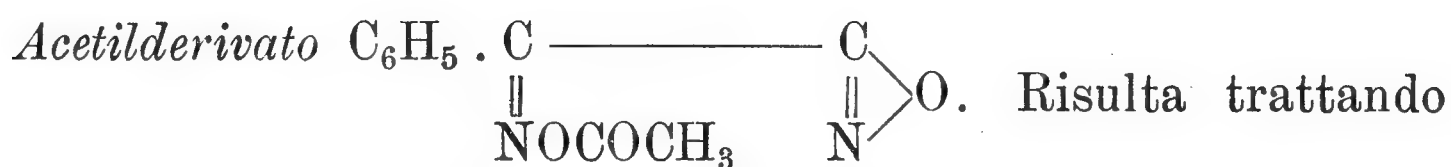
tetrossido di azoto la α-fenilgliossima (p. f. 168°) col procedimento che ho già descritto nella Nota VI (loc. cit.), e si separa dopo breve tempo dalla soluzione in cristalli bianchissimi i quali cominciano rammollire alquanto verso 105° e fondono a 108° senza decomposizione, risolidificando immediatamente col raffreddamento in una massa cristallina bianca che conserva lo stesso punto di fusione. Ricristallizzato dai solventi organici (benzene, etere più etere di petrolio, cloroformio più ligroina, ecc.) il suo punto di fusione si abbassa fino a 102° ([15]); ma se si sciolgono nuovamente i cristalli in etere addizionato di una traccia di tetrossido di azoto e si concentra la soluzione; o più semplicemente se si agitano con etere reso *acido* con detto reattivo, il punto di fusione risale esattamente a quello iniziale (108°). Poichè il composto si conserva inalterato in recipienti di platino, mentre in quelli di vetro i cristalli a contatto delle pareti ingialliscono dopo qualche tempo e gli altri rimangono per molto tempo bianchi, io attribuisco i fatti suaccennati alla straordinaria sensibilità dell'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile verso le basi. D'altra parte un campione che avevo preparato due anni fa e che, conservato in boccetta di vetro non perfettamente chiusa, si era alterato nel modo ora detto con un notevole abbassamento nel punto di fusione, fu facilmente riportato al punto di fusione primitivo (108°) col procedimento di cui sopra; il che dimostra come Wieland (loc. cit.), nell'ammettere l'esistenza di due forme del composto, delle quali quella stabile non si potrebbe più ritrasformare in quella labile, sia incorso in un errore.

Inoltre, contrariamente a quanto asseriscono Wieland e Semper (loc. cit.) l'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile si altera se fatto bollire con acido cloridrico concentrato, e mentre è vero che cristallizza per la maggior parte inalterato raffreddando subito la soluzione, io posso dire che prolungando il riscaldamento esso finisce per trasformarsi completamente in

---

([15]) Il punto di fusione 95° dato da Scholl e da Wieland e Semper (loc. cit.) era evidentemente quello di un prodotto molto impuro perchè ottenuto da una miscela delle due fenilgliossime α e β semplicemente lavata con cloroformio.

benzonitrile, acido benzoico ed idrossilamina, del cui cloridrato da 1 gr. di ossido se ne ottiene quasi la quantità teorica.

Il peso molecolare del composto purissimo (p. f. 108°) in acido acetico è normale (trovato 165-153; per $C_8H_6O_2N_2$ calcolato 162).

Acetilderivato $\begin{array}{l} C_6H_5 . C \text{———} C \\ \quad\quad\;\; \| \quad\quad\quad \| \rangle O \\ \quad\;\; NOCOCH_3 \;\; N \end{array}$. Risulta trattando l'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile con anidride acetica a freddo e si separa spontaneamente dalla soluzione dopo breve riposo alla temperatura ordinaria. Lavato con acqua e cristallizzato dall'alcool si presenta in aghetti bianchi fusibili a 115°-116° senza decomposizione.

Trovato %: N 13,63.
Per $C_{10}H_8O_3N_2$ calcolato: N 13,72.

È solubile a freddo in benzene, acetone e cloroformio; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool; poco solubile nell'etere e nella ligroina.

Riduzione. Ad una soluzione di gr. 2 di ossido dell'ossima del cianuro di benzoile in 70-80 cc. di alcool si aggiungono gr. 4 di polvere di zinco e quindi poco a poco, e raffreddando con acqua, 2 cc. di acido acetico glaciale. Dopo alcune ore si filtra, si elimina l'alcool e si cristallizza il residuo dell'acqua bollente: si ottiene così l'ossima del cianuro di benzoile $C_6H_5 . C(:NOH) . CN$ in laminette bianche fusibili a 129°.

Trovato %: N 18,78.
Per $C_8H_6ON_2$ calcolato: N 19,17.

Per conferma l'ho sciolta in idrossido di sodio e trattata con cloruro di benzoile trasformandola nel benzoilderivato $C_6H_5 . C(:NOCOC_6H_5) . CN$ il quale cristallizza dall'acetone in prismetti bianchi fusibili a 139° conforme ai dati di Zimmermann [16].

---

[16] " J. prakt. Chem. „ (2) *66*, 363 (1902).

Sull'isomerizzazione dell'ossido dell'ossima del cianuro di di benzoile e sul suo comportamento verso gli alchilioduri di magnesio e verso altri reattivi riferirò prossimamente.

Torino – Istituto Chimico della R. Università.
Aprile 1923.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Aprile 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Naccari, Segre, Foà, Guidi, Grassi, Somigliana, Panetti e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza il Presidente Senatore Ruffini e il Socio Sacco.

Il Segretario dà lettura del verbale della adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente, a nome di tutti i Colleghi, rivolge al Socio Naccari i più cordiali auguri per la salute ricuperata e comunicando all'Adunanza che l'assenza del Socio Senatore Ruffini è motivata da fausta circostanza; saluta nel nome dell'Accademia con cordiali felicitazioni l'evento che allieta la famiglia del nostro Presidente, e l'Accademia delibera che gli sieno trasmesse.

Il Presidente dà quindi comunicazione di una lettera della *Société de Biologie* di Parigi che celebra il 75° anniversario della sua fondazione, e che per la circostanza invita l'Accademia delle Scienze di Torino alla solenne funzione che avrà luogo il 26 maggio p. v.

Il Presidente provvederà a che l'Accademia sia rappresentata in quella occasione.

Il Socio Foà comunica quindi e fa omaggio all'Accademia dei Capitoli VI e VII del suo *Trattato di Anatomia Patologica*. Colla consueta dovizia di illustrazioni i Dott.[i] Ottolenghi e Belfanti trattano rispettivamente nel Capitolo VI dei *Microparassiti vegetali* e nel Capitolo VII *Della immunità*. Il Presidente ringrazia per il cospicuo dono.

Il Socio Guidi presenta quindi una Nota dell'Ing. Giulio Supino di Bologna dal titolo: *Sulla struttura delle travature reticolari*. La Nota è accolta per gli *Atti*.

LETTURE

Sulla struttura delle travature reticolari

Nota dell'Ing. GIULIO SUPINO
presentata dal Socio nazionale residente C. Guidi

Scopo di questo studio è di ricavare l'identità tra le condizioni di determinazione statica e geometrica di una travatura reticolare (mostrata successivamente dal Föppl (1) e dal Frank (2) con determinanti funzionali) per mezzo di un determinante numerico e di introdurre, nello studio di esse, un terzo determinante col quale riconduco la ricerca degli sforzi in travature determinate, ma con vincoli esterni in numero maggiore dell'ordinario, alla determinazione di quelli di una travatura strettamente vincolata. Considero solo travature piane: è ovvia l'estensione allo spazio.

I.

Poichè per un punto $P(x, y)$, vincolato ad una determinata linea, sta l'equazione:

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = p \tag{1}$$

(α è l'angolo della normale al vincolo in P con l'asse x) e per due punti A e B congiunti dall'asta di lunghezza l (il cui angolo con l'asse x sia β), si ha:

$$(x_A - x_B) \cos \beta + (y_A - y_B) \operatorname{sen} \beta = l ; \tag{2}$$

(1) Föppl A., *Theorie des Fachwerks*, Lipsia, 1880.

(2) Frank Ph., *Ueber allgemeine unbestimmte Systeme.* " Monatschrift für Mathematik und Physik ", 1912, pag. 225.

così, se abbiamo nel piano n punti, collegati da h aste e sottoposti a k vincoli semplici [1], e supponiamo di conoscere la loro posizione in un dato istante, possiamo, considerando in questo istante le tangenti al moto dei punti, scrivere per essi m equazioni lineari (k del tipo (1) e h del tipo (2)); la matrice dei loro coefficenti dà, con la sua caratteristica, il grado di indeterminazione del sistema. Può essere $r \leq 2n$ e $m \gtreqless 2n$; considerando questi casi si hanno i vari tipi di travature [2].

La caratteristica della matrice è invariante per qualsiasi trasformazione di coordinate: però essa conserva la proprietà invariantiva rispetto al moto dei punti solo quando si riduce ad un determinante ($m = 2n$) [3]. In questa ipotesi si distinguono due casi: o il determinante così ottenuto è identicamente nullo, o si annulla solo per speciali valori dei coefficenti: nel primo caso si tratta di nullità strutturale che si mantiene comunque si spostino gli n punti nel piano [4]; nel secondo caso, se, per essere $2n - 1$ la caratteristica del determinante, il sistema conserva un grado di libertà che permette il moto di due suoi punti A e B, ciò accade perchè l'asta $A - B$ non si oppone al moto (che non tende nè ad avvicinare nè ad allontanare i due punti) e il centro istantaneo di rotazione si trova sulla retta che contiene i punti stessi. La stessa osservazione si può fare per un vincolo, se il grado di libertà concesso al sistema lascia mobile il punto da esso vincolato, onde “ *se una travatura reticolare piana con* n *nodi e* 2n *condizioni* — distribuite in modo da soddisfare a questa relazione anche in ogni parte di essa — *è labile, allora o esiste un'asta (almeno) che contiene il centro istantaneo*

---

[1] Se il vincolo è doppio diremo che il punto P deve trovarsi su due rette del fascio che ha P per sostegno. Il vincolo semplice rappresenta una linea di moto; sarà quindi una linea continua con derivata dappertutto finita.

[2] Per $r = 2n$, $m = 2n$ si hanno le travature determinate. Se è $k = 3$ la travatura è strettamente vincolata. Se $r = 2n - p$ con $r < m = 2n$ la travatura è labile; se $r = 2n - p = m$ la travatura è ad aste mancanti, mentre è ad aste sovrabbondanti se $r = 2n$, $m > 2n$.

[3] Considerando il determinante sotto la forma funzionale si vede che è un “ covariante simultaneo ”.

[4] In questo caso una parte della travatura è ad aste mancanti mentre l'altra parte è ad aste sovrabbondanti.

di rotazione nel moto relativo dei due nodi da essa congiunti, o esiste un vincolo (almeno) la cui normale al punto vincolato contiene il centro istantaneo di rotazione del punto stesso „ (1).

Anche in questo secondo caso è impossibile che il determinante divenga — nel moto dei punti — diverso da 0: basta osservare che se ciò accadesse il centro istantaneo di rotazione dovrebbe esser fuori dell'asta o della normale al vincolo, mentre esso non può uscirne; però se un nodo si trova in una posizione in cui il suo vincolo abbia tangente destra diversa dalla tangente sinistra, può essere che uno dei due determinanti ottenuti considerando separatamente le due tangenti sia diverso da 0 mentre l'altro sia nullo; basta la nullità di uno di essi per concludere che la travatura è labile.

Riferiamo ancora la travatura ad assi ortogonali: indicando con X_0^i, Y_0^i le componenti delle forze esterne nel nodo i, con R_v la reazione del vincolo v pure agente su i e con S_g lo sforzo esercitato dall'asta g facente capo ad i, si hanno per ogni nodo le equazioni:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma R_v \cos \widehat{R_v x} + \Sigma S_g \cos \widehat{S_g x} = X_0^i \\ \Sigma R_v \operatorname{sen} \widehat{R_v x} + \Sigma S_g \operatorname{sen} \widehat{S_g x} = Y_0^i . \end{array} \right.$$

Consideriamo la matrice dei coefficenti di questo sistema di $2n$ equazione ed m incognite (può essere $m \gtreqless 2n$): essa confrontata con quella relativa alle equazioni geometriche ha le linee eguali alle colonne di quella (2). Nel caso che la matrice si riduca ad un determinante è con ciò mostrata la identità fra le condizioni di determinazione statica e geometrica. Molte proprietà si deducono ora facilmente dalla teoria dei determinanti; altre si ricavano da considerazioni geometriche. Così, volendo conoscere i sistemi di forze di equilibrio per tra-

(1) Cfr. Mohr, *Abhandlungen der Technischen Mechanik*, pag. 391 e seg. e Frank, op. cit.

(2) Nel caso del vincolo doppio le rette del fascio che ha per sostegno il punto fisso nelle equazioni geometriche saranno scelte normali alle linee d'azione delle reazioni agenti su di esso.

vature ad aste mancanti, basta osservare che essi si oppongono allo spostamento di tutti i nodi: allora, se manca l'asta $A-B$, si determinino col metodo cinematico del Müller-Breslau le tangenti (con il loro senso relativo) alle linee percorse dai nodi A e B; intese queste linee come forze (a meno dell'intensità) esse rappresentano il sistema occorrente per provocare uno spostamento dei nodi: qualunque sistema che non sia riducibile (in tutto o in parte) a quello, sarà un sistema di equilibrio. Un'altra osservazione di carattere cinematico è suggerita dalle travature labili. In queste dalla relazione $S=\frac{m}{0}$ [1], che si ricava per l'asta che è causa della labilità, si dovrebbe dedurre che lo sforzo in essa è (in generale) infinito; ma se è $m \neq 0$ agisce una forza esterna normale al moto dell'asta, forza che fa spostare i nodi finchè il centro istantaneo di rotazione del loro moto relativo non si trova più sull'asta; allora se esso descrive una curva continua (cioè il moto dei punti ammette anche derivata *continua*) gli sforzi per posizioni vicine al limite sono enormemente grandi; diversamente, dato il sistema di forze esterne, gli sforzi nella travatura sono determinati e finiti.

II.

Data una travatura piana, determinata, le (3) permettono per ogni condizione di carico la determinazione degli sforzi in tutti gli elementi di essa; se consideriamo le $2n$ condizioni di carico indipendenti:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{llll} X_1=1 & Y_1=0 & X_2=0 & Y_2=0\ldots Y_n=0 \\ X_1=0 & Y_1=1 & X_2=0 & Y_2=0\ldots Y_n=0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1=0 & Y_1=0 & X_2=0 & Y_2=0\ldots Y_n=1 \end{array}\right.$$

si avrà, per ognuna di esse e per ciascun elemento, un certo sforzo; indicato con S_{hk} lo sforzo prodotto nell'elemento h dalla

---

[1] Cfr. Mohr, loc. cit. L'equazione si può ricavare applicando la regola Cdi ramer al sistema (3).

forza unitaria k del sistema (4), potremo rappresentare lo sforzo totale prodotto da un sistema di forze (che possiamo ridurre a due per ogni nodo agenti secondo due assi) colle $2n$ relazioni:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} S_{1,1}\, X_1 + S_{1,2}\, Y_1 + \ldots\ldots S_{1,2n}\, Y_n = R_1 \\ S_{2,1}\, X_1 + S_{2,2}\, Y_1 + \ldots\ldots S_{2,2n}\, Y_n = R_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_{2n,1}\, X_1 + S_{2n,2}\, Y_1 + \ldots\ldots S_{2n,2n}\, Y_n = R_{2n} \end{array}\right.$$

in cui le incognite sono le R mentre le X e Y sono date. Se invece si suppongono date le R e incognite le X e Y, si ha un sistema normale di equazioni i cui coefficenti sono determinati e finiti perchè la travatura è determinata e il cui determinante

$$\left|\begin{array}{llll} S_{1,1} & S_{1,2} & \ldots\ldots & S_{1,2n} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \ldots\ldots & S_{2,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ S_{2n,1} & S_{2n,2} & \ldots\ldots & S_{2n,2n} \end{array}\right|$$

è sempre diverso da 0 perchè la sua nullità significherebbe che è possibile la soluzione del sistema omogeneo: ossia esisterebbero delle forze applicate a nodi diversi capaci di farsi equilibrio senza provocare sforzi in nessun elemento della travatura, ciò che è assurdo. Dal sistema (5) si deduce che *dati gli sforzi nei* 2n *elementi di una travatura piana, determinata, esiste sempre una (ed una sola) condizione di carico che li produce,* proposizione reciproca a quella che si deduce dal sistema (3).

Un sistema analogo a quello (5) si trova quando si cercano gli sforzi di elementi che si vogliono sostituire a un egual numero di elementi dati: gli sforzi dei primi si possono considerare come forze esterne *incognite* che debbono render nulli gli sforzi dei secondi. Indicando con S_r lo sforzo dell'elemento r^{mo} dato e con $S_{r,1}$, $S_{r,2}$ ..., $S_{r,m}$ gli sforzi provocati in esso dalle sollecitazioni:

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 = 1 & X_2 = 0 \ldots\ldots & X_m = 0 \\ X_1 = 0 & X_2 = 1 \ldots\ldots & X_m = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_1 = 0 & X_2 = 0 \ldots\ldots & X_m = 1 \end{array}\right.$$

dove le X sono prese nella direzione degli elementi da introdurre, si ha il sistema:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} S_{1,1}\,X_1 + S_{1,2}\,X_2 + \ldots\ldots S_{1,m}\,X_m = -\,S_1 \\ S_{2,1}\,X_1 + S_{2,2}\,X_2 + \ldots\ldots S_{2,m}\,X_m = -\,S_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{m.1}\,X_1 + S_{m,2}\,X_2 + \ldots\ldots S_{m,m}\,X_m = -\,S_m \end{array}\right.$$

e se è:

$$(7)\quad \left|\begin{array}{lll} S_{1,1} & S_{1,2} \ldots\ldots & S_{1,m} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \ldots\ldots & S_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{m,1} & S_{m,2} \ldots\ldots & S_{m,m} \end{array}\right| \neq 0$$

la trasformazione determina le $X_1\,X_2 \ldots X_m$ univocamente ([1]), e sta il seguente teorema: " *Se per una condizione di carico gli sforzi in un determinato sistema di* m *elementi di una travatura sono tutti nulli, essi sono nulli anche in qualsiasi altro sistema che si ricavi dal primo mediante una trasformazione non degenere* ". Infatti in tale ipotesi le (6) divengono omogenee e, per essere il determinante (7) diverso da 0, l'unica soluzione è $X_1 = X_2 = \ldots X_m = 0$. Questa osservazione è fondamentale per il nostro scopo di ricondurre la ricerca degli sforzi di una qualunque travatura determinata a quelli di una travatura strettamente vincolata. Infatti, supposto che nella travatura vi siano k vincoli, occorre sostituirne $k - 3$ con altrettante aste e, determinati in queste gli sforzi con uno dei soliti metodi, trovare quelli dei vincoli per mezzo delle (6). Il teorema precedente rende la ricerca indipendente dal sistema di aste intermediarie e dalla travatura strettamente vincolata scelta per base.

([1]) Il determinante (7) è stato introdotto per la prima volta dal Müller-Breslau (Cfr. *Die Graphische Statik der Bauconstructionen*, vol. I, pag. 443, Stuttgart, 1905) nel suo metodo delle " Ersatzstäbe ".

Se l'equazione di grado m in k:

$$\begin{vmatrix} S_{1,1}-k & S_{1,2} & \ldots\ldots & S_{1,m} \\ S_{2,1} & S_{2,2}-k & \ldots\ldots & S_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m,1} & S_{m,2} & \ldots\ldots & S_{m,m}-k \end{vmatrix} = 0$$

ammette come radice m^{ma} il numero h, gli sforzi negli elementi sostituiti sono sempre ordinatamente proporzionali (con $-k$ fattore di proporzionalità) a quelli degli elementi dati.

Bologna. – Ottobre 1922.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Maggio 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Herlitzka, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Scusano la loro assenza i Soci Naccari e Sacco.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente, dichiarandosi cordialmente commosso per la dimostrazione della quale è stato fatto segno dall'Accademia, ringrazia i colleghi. Egli comunica all'Adunanza che il nostro Socio corrispondente Charles Richet è stato pregato di rappresentare l'Accademia alla solenne funzione che celebrerà il 26 maggio l'anno 75° della fondazione della " Société de Biologie ".

Il Socio Prof. Ponzio presenta all'adunanza la sua XII Nota sulle *Diossime*, che viene accolta per gli *Atti*.

LETTURE

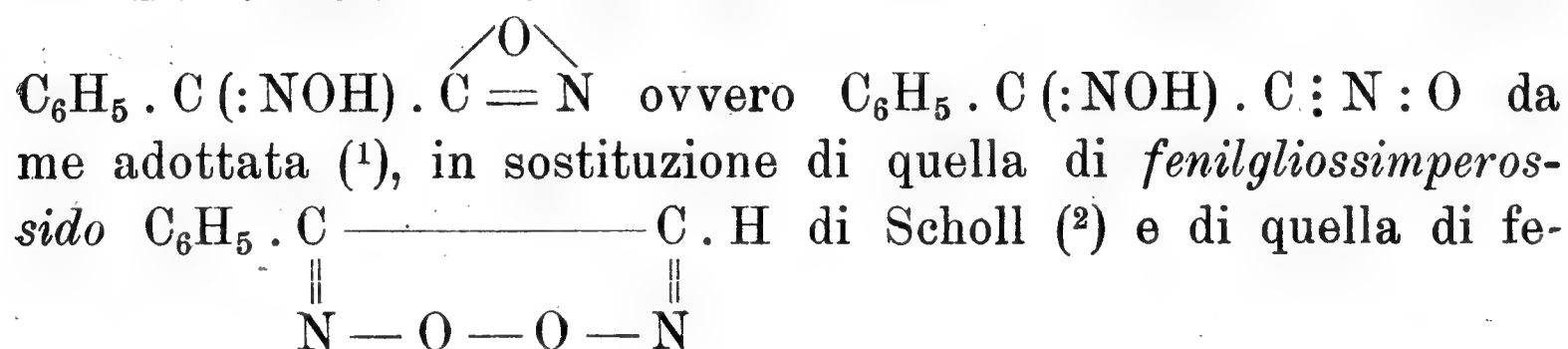
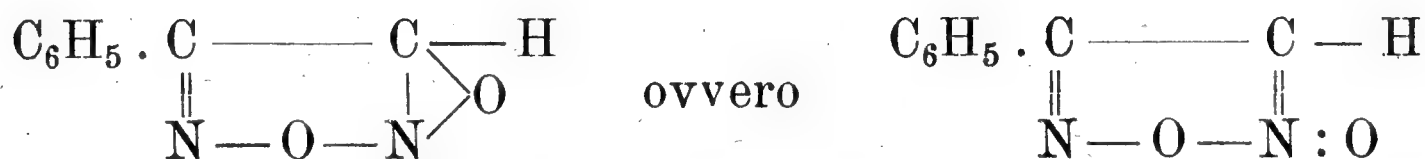
Ricerche sulle diossime

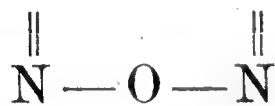
Nota XII del Socio nazionale residente prof. GIACOMO PONZIO

La formola di *ossido dell'ossima del cianuro di benzoile* $C_6H_5 . C(:NOH) . \overset{\frown O \frown}{C = N}$ ovvero $C_6H_5 . C(:NOH) . C \vdots N : O$ da me adottata (1), in sostituzione di quella di *fenilgliossimperossido* $C_6H_5 . C$ ——— $C . H$ di Scholl (2) e di quella di fe-

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 . C & \text{———} & C . H \\ \| & & \| \\ N — O & — & O — N \end{array}$$

nilfurossano

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 . C & \text{———} & C — H \\ \| & & | \rangle O \\ N — & O & — N \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ccc} C_6H_5 . C & \text{———} & C — H \\ \| & & \| \\ N — & O & — N : O \end{array}$$

di Wieland e Semper (3), pel composto $C_6H_5(C_2N_2O_2H)$ il quale risulta trattando la α-fenilgliossima (p. f. 168°) con tetrossido di azoto (4), non si accorda coll'asserita isomerizzazione di detto composto in fenilidrossifurazano $C_6H_5 . C$ ——— $C . OH$, isome-

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 . C & \text{———} & C . OH \\ \| & & \| \\ N — & O & — N \end{array}$$

rizzazione la quale, secondo Wieland e Semper (loc. cit.), sarebbe provocata dagli idrossidi e dai carbonati dei metalli alcalini. Ma, come dimostrerò più avanti, malgrado che l'esistenza di tale isomero sia stata ulteriormente confermata da Wieland (5),

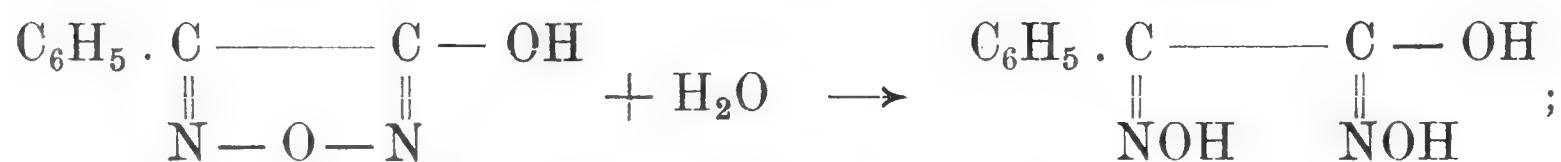
(1) Nota XI. — "Gazz. Chim. Ital.", *53*, II (1923).
(2) *Ber. 32*, 3504 (1896).
(3) *Ann. 358*, 36 (1906).
(4) Nota VI. — "Gazz. Chim. Ital.", *53*, I, 25 (1923).
(5) *Ann. 424*, 107 (1921).

la sostanza ritenuta da detti Autori, e descritta nei trattati di chimica organica, *come fenilidrossifurazano, non è altro che l'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile*, un po' meno impuro di quello da essi impiegato nelle loro prime esperienze.

Ciò si poteva d'altronde prevedere dalla semplice lettura dei lavori di Wieland e Semper e di Wieland: infatti i punti di fusione successivamente attribuiti al supposto *fenilidrossifurazano* (106°, 110°-111°, 106°-107°, 109°-110°) sono vicinissimi al punto di fusione dell'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile, il quale puro fonde a 108°, ma può anche fondere a 111° e perfino a 112° se riscaldato rapidamente. Questo nitrilossido, come già ho fatto osservare nelle Note VI e XI, se purissimo è stabile e non si altera neppure fondendo, ma bastano tracce di impurezze (non riscontrabili all'analisi) per diminuirne la stabilità anche alla temperatura ordinaria, per aumentarne alquanto la solubilità nei solventi organici e per renderlo più facilmente solubile negli idrossidi dei metalli alcalini, cioè per fargli assumere le proprietà attribuite da Wieland e Semper al loro pseudo isomero. Era inoltre da ritenersi molto improbabile che il fenilidrossifurazano $C_6H_5(C_2N_2O)OH$ potesse avere un comportamento analogo a quello del fenilfurazano $C_6H_5(C_2N_2O)H$, e che mentre quest'ultimo è isomerizzato dalle basi nell'ossima del cianuro di benzoile

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 . C \text{———} C - H & & C_6H_5 . C \text{———} C \\ \| \qquad\qquad \| & \longrightarrow & \| \qquad\qquad ||| \\ N - O - N & & NOH \qquad N \end{array}$$

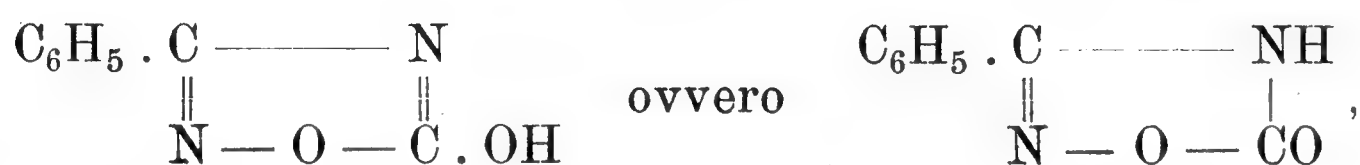
il primo si dovesse trasformare, nelle identiche condizioni, in fenilidrossigliossima (acido ossiminobenzoilformidrossamico)

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 . C \text{———} C - OH & & C_6H_5 . C \text{———} C - OH \\ \| \qquad\qquad \| & + H_2O \longrightarrow & \| \qquad\qquad \| \\ N - O - N & & NOH \qquad NOH \end{array} ;$$

non esistendo ragione alcuna perchè il ciclo furazanico debba aprirsi colla stessa facilità tanto se unito all'idrogeno (elettropositivo) quanto se unito all'ossidrile (elettronegativo). Infine, la formazione della fenilidrossigliossima non era stata provata da Wieland e Semper, ma dedotta unicamente dalla colorazione

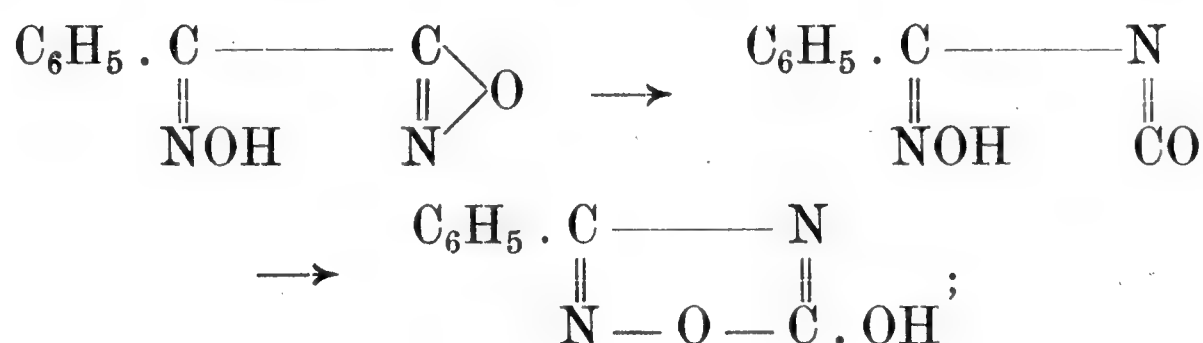
che la soluzione basica della sostanza da essi ottenuta assumeva se trattata con cloruro ferrico, cioè col reattivo degli acidi idrossamici [6].

Ciò premesso, è evidente che non esistendo il fenilidrossifurazano (od esattamente, non formandosi esso nel modo creduto da Wieland e Semper), viene a mancare un'altra delle ragioni addotte da questi Autori in favore della formola *furossanica* pel composto $C_6H_5(C_2N_2O_2H)$ risultante per azione del tetrossido di azoto sulla α-fenilgliossima. Per contro, la formola di nitrilossido che io ho proposto nella Nota XI si accorda perfettamente non soltanto colle proprietà già conosciute del composto stesso, ma anche col suo vero modo di isomerizzarsi e col suo comportamento verso il reattivo di Grignard, sui quali riferisco ora.

Infatti per ebollizione con xilene esso subisce una trasposizione intramolecolare in 3-fenil-5-idrossi-furo-(a b_1)-diazolo

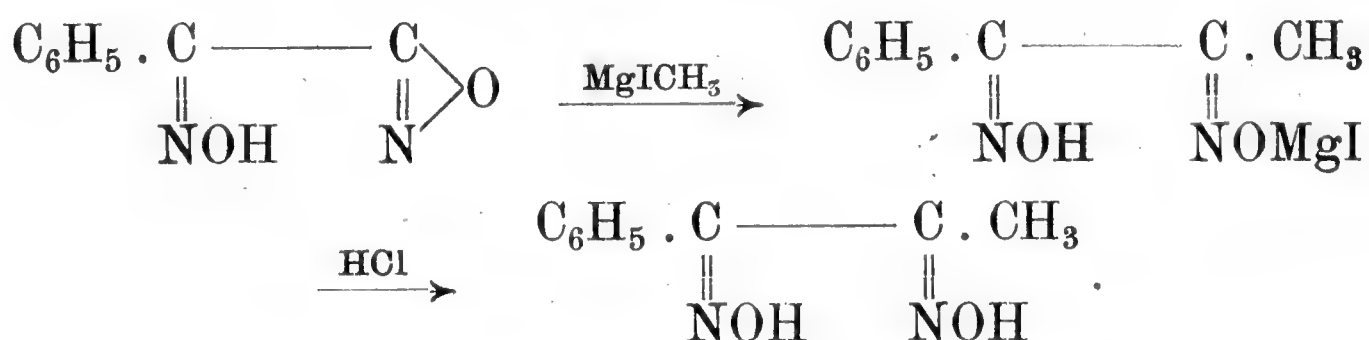
```
C6H5 . C ——— N                 C6H5 . C ——— NH
       ||     ||      ovvero           ||      |   ,
       N — O — C . OH                  N — O — CO
```

risultando probabilmente come prodotto intermedio il corrispondente cianato

```
C6H5 . C ——— C\               C6H5 . C ——— N
       ||     || >O    ——>            ||      ||
       NOH    N/                      NOH     CO

        C6H5 . C ——— N
  ——>          ||     ||   ;
               N — O — C . OH
```

e reagendo col metilioduro di magnesio dà origine a fenilmetilgliossima

```
C6H5 . C ——— C\      MgICH3      C6H5 . C ——— C . CH3
       ||     || >O  ———————>           ||      ||
       NOH    N/                        NOH     NOMgI

         C6H5 . C ——— C . CH3
  HCl           ||      ||
  ———>          NOH     NOH    .
```

---

[6] Fondandosi *soltanto* su questa reazione cromatica, Wieland e Semper (*Ann.* *358*, 62 (1907)) asseriscono altresì che per lungo riscaldamento del-

Adottando la struttura di *ossido dell'ossima del cianuro di benzoile* la formazione di una idrossiazossima e di una α-diossima colle suddette reazioni, e la riducibilità, colla reazione da me descritta nella Nota XI, in ossima del cianuro di benzoile $C_6H_5 . C(:NOH) . CN$, si possono interpretare, ed anche prevedere, senza nessuna di quelle difficoltà che si incontrerebbero colle antiche formole di *fenilfurossano* o di *fenilgliossimperossido*; apparendo inoltre una evidente analogia col benzonitrilossido $C_6H_5 . \overset{\diagup O \diagdown}{C = N}$ ovvero $C_6H_5 . C \vdots N : O$, il quale, secondo Wieland [7], si isomerizza per azione del calore in fenilcianato $C_6H_5 . N : C : O$ [8], è trasformato dal metilioduro di magnesio in acetofenonossima $C_6H_5 . C(:NOH) . CH_3$, ed è ridotto da zinco ed acido acetico in benzonitrile $C_6H_5 . CN$.

XXIX. — Ossido dell'ossima del cianuro di benzoile

$$C_6H_5 . C(:NOH) . \overset{\diagup O \diagdown}{C = N} \quad \text{ovvero} \quad C_6H_5 . C(:NOH) . C \vdots N : O.$$

Isomerizzazione. Se si scalda per un'ora all'ebollizione il nitrilossido con poco xilene, o se si tratta, alla temperatura ordinaria, la soluzione benzenica diluita del nitrilossido con fenilidrazina, si separa, nel primo caso col raffreddamento e nel secondo col riposo, una sostanza cristallina, la quale risulta pure, assieme ad α-fenilaminofenilgliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5$, addizionando anilina al nitrilossido sciolto in benzene [9]. Il rendimento della reazione, quasi quantitativo impiegando lo xilene o la fenilidrazina, è scarsissimo coll'anilina se si opera a freddo, ma può aumentare fino al 30 %

---

l'ossima del cianuro di benzoile con idrossilamina risulta la fenilaminogliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . CN + NH_2OH \rightarrow C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NH_2$, mentre secondo le mie esperienze non se ne forma traccia.

(7) *Ber. 40*, 1667 (1907).

(8) Il fenilcianato si polimerizza poi spontaneamente nel perossido della difenilgliossima $2C_6H_5N:C:O \rightarrow C_6H_5(C_2N_2O_2)C_6H_5$; mentre il dimero dell'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile, cioè la diossima del perossido della dibenzoilgliossima $C_6H_5 . C(:NOH)(C_2N_2O_2) . C(:NOH) . C_6H_5$, si ottiene soltanto per via indiretta. Di esso mi occuperò in una Nota di prossima pubblicazione.

(9) Pesi uguali di nitrilossido e di fenilidrazina o di anilina.

facendo bollire per alcune ore la soluzione in apparecchio a ricadere [10].

Cristallizzata dall'alcool, la sostanza di cui sopra si presenta in grossi prismi; cristallizzata dall'acqua, in fini aghi bianchi, fusibili a 202°-203° senza decomposizione.

Trovato %:	C 59,05	H 3,98	N 17,19.
Per $C_8H_6O_2N_2$ calc.:	59,25	3,70	17,28.

Essa ha tutte le proprietà del *3-fenil-5-idrossi-furo*-(a b_1)-*diazolo* $C_6H_5(C_2N_2O)OH$ ottenuto da Tiemann e Falck [11] per riscaldamento della benzenilamidossima con clorocarbonato di etile $C_6H_5.C(:NOH)(NH_2) + ClCOOC_2H_5 \longrightarrow HCl + C_2H_5OH + C_6H_5(C_2N_2O)OH$, salvo il punto di fusione un po' più elevato (202°-203° invece di 199°), il quale però è identico con quello del prodotto da me preparato secondo le indicazioni di detti Autori e convenientemente purificato.

A complemento di quanto trovasi riferito nella letteratura soggiungerò che il 3-fenil-5-idrossi-furo-(a b_1)-diazolo ha funzione di acido monobasico più forte dell'acido carbonico; che in soluzione acquosa richiede per la neutralizzazione un equivalente di idrossido di sodio; che il suo peso molecolare determinato colla criometria in acido acetico è normale (trovato 162; per $C_8H_6O_2N_2$ calcolato 162); che non reagisce nè col bromo, nè col cianato di fenile, nè coi cloruri di fosforo; che non è nè acetilabile nè benzoilabile; che si scioglie a freddo nell'acido solforico concentrato e riprecipita inalterato per diluizione con acqua; che è solubile a caldo negli acidi cloridrico e nitrico concentrati e cristallizza col raffreddamento. Ne descrivo inoltre il sale sodico e l'etere metilico, non ancora conosciuti.

Il *sale sodico* $C_6H_5(C_2N_2O)ONa$ si ottiene trattando il 3-fenil-5-idrossi-furo-(a b_1)-diazolo colla quantità teorica di carbonato sodico sciolto in poca acqua e tirando a secco la solu-

---

[10] Il procedimento col quale dalla miscela si può isolare la α-fenilaminofenilgliossima l'ho già indicato nella Nota VIII (" Gazz. Chim. Ital. ", *53*, II (1923)), ove ho anche detto che se sull'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile si fa agire l'anilina in soluzione acquosa si forma esclusivamente la gliossima.

[11] *Ber.* *18*, 2456. 2468 (1885) e *19*, 1475, 1482 (1886).

zione (per il che il carbonato è decomposto con svolgimento di anidride carbonica). Costituisce una polvere bianca cristallina, solubile in acqua, insolubile nei comuni solventi organici, eccetto l'alcool etilico e metilico.

Trovato %: Na 12,68.
Per $C_8H_5O_2N_2Na$ calc.: 12,51.

L'*etere metilico* $C_6H_5(C_2N_2O)OCH_3$ si forma per azione del solfato dimetilico sulla soluzione del 3-fenil-5-idrossi-furo-(a b_1)-diazolo in idrossido di sodio al 20 %; ovvero per azione del ioduro di metile sulla soluzione del suo sale sodico in alcool metilico, e cristallizzato dall'alcool si presenta in lunghi aghi bianchi fusibili a 116° senza decomposizione.

Trovato %: N 15,79.
Per $C_9H_8O_2N_2$ calc.: 15,90.

È insolubile nell'acqua; solubile a freddo in acetone ed in cloroformio; poco solubile in etere; discretamente solubile a caldo e meno a freddo nell'alcool e nel benzene; poco a caldo e pochissimo a freddo in ligroina.

Riscaldato con idrossido di sodio diluito subisce con facilità l'idrolisi.

Azione del ioduro di metilmagnesio. Wieland e Semper ([12]) dicono che i *perossidi delle gliossime* (da essi erroneamente considerati come *furossani*) non reagiscono col reattivo di Grignard; per contro l'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile (cioè il *fenilgliossimperossido* di Scholl o *fenilfurossano* di Wieland e Semper) è colla massima facilità trasformato in *metilfenilgliossima* $CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . C_6H_5$ dal metilioduro di magnesio. Infatti, se a quest'ultimo si aggiunge poco a poco la soluzione eterea del nitrilossido ha luogo una reazione molto viva e tosto si separa un composto di addizione, il quale trattato con acido cloridrico diluito cede all'etere una discreta quantità di gliossima che si isola trasformandola, mediante l'acetato di nichel, nel caratteristico *sale complesso* $(C_9H_9O_2N_2)_2Ni$

([12]) *Ann. 358*, 67 (1907).

già da me descritto nella Nota I ([13]) e cristallizzabile dall'alcool in aghetti di colore rosso-scarlatto fusibili a 239°-240°.

Trovato $^0/_0$: N 14,49.
Per $C_{18}H_{18}O_4N_4Ni$ calc.: 14,20.

Azione del carbonato sodico. Wieland e Semper (loc. cit.) agitando per un'ora con carbonato sodico al 5 $^0/_0$ la soluzione eterea dell'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile (impuro, fusibile a 95°, e da essi ritenuto *fenilfurossano*); ovvero trattando allo stesso modo il nitrilossido quasi puro (fusibile a 106°-108° e da Wieland considerato come la *forma labile del fenilfurossano*) ottennero una sostanza la quale, cristallizzata dal benzene, fondeva a 106° od a 110°-111° e che ritennero *fenilidrossifurazano* $C_6H_5(C_2N_2O)OH$. Ripetendo queste esperienze coll'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile purissimo (e da me preparato per azione del tetrossido di azoto sulla α-fenilgliossima pura), ed anche agitandolo a freddo per un'ora con soluzione diluita, o per qualche minuto con soluzione bollente di carbonato sodico al 5 $^0/_0$, ho anch'io ottenuto una sostanza la quale cristallizzata dal benzene o dall'alcool acquoso fondeva, decomponendosi, a 104°-105°, ma che purificata mediante lavatura con etere addizionato di una traccia di tetrossido di azoto fondeva poi a 108° senza decomposizione.

Trovato $^0/_0$: N 17,02.
Per $C_8H_6O_2N_3$ calc.: 17,28.

Detta sostanza *non è fenilidrossifurazano, ma è identica in tutte le sue proprietà coll'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile* primitivo; infatti, come quest'ultimo:

a) sciolta in etere ed agitata con soluzione acquosa 6N di ammoniaca si trasforma in α-fenilaminogliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NH_2$, p. f. 154°-155°;

b) agitata con soluzione acquosa di anilina si trasforma in α-fenilaminofenilgliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . NHC_6H_5$, p. f. 188°;

([13]) "Gazz. Chim. Ital.", *51*, II, 224 (1921).

c) fatta bollire con xilene o trattata in soluzione benzenica con fenilidrazina a freddo si trasforma in 3-fenil-5-idrossi-furo-(a b_1)-diazolo C_6H_5 (C_2N_2O) OH, p. f. 202°-203°;

Trovato %: N 17,45
Per $C_8H_6O_2N_2$ calc.: 17,28;

d) trattata a freddo con anidride acetica si trasforma nell'acetilderivato dell'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile

$C_6H_5 . C(:NOCOCH_3).C \overset{O}{=} N$ ovvero $C_6H_5.C(:NOCOCH_3).C:N:O$, p. f. 115°-116°.

Trovato %: N 13,81.
Per $C_{10}H_8O_3N_2$ calc.: 13,72.

Il vero fenilidrossifurazano $C_6H_5 . C$ —— $C . OH$ dovrebbe
($C=N—O—N=C$, anello)

invece avere un comportamento analogo a quello del perossido della fenilidrossigliossima $C_6H_5 . C$ —— $C . OH$ di
($C=N—O—O—N=C$)

Wieland ([14]), e del 3-fenil-5-idrossi-furo-(a b_1)-diazolo $C_6H_5 . C$ —— N ; il che ritengo di poter dimostrare con
($C=N—O—C(OH)=N$)

ulteriori ricerche.

Torino – Istituto Chimico della R. Università.
Maggio 1923.

([14]) *Ann. 328*, 255 (1903).

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LVIII, Disp. **14ª**, **1922-1923**

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1923

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Maggio 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. C. F. PARONA
VICEPRESDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci NACCARI, PEANO, GUIDI, GRASSI, SOMIGLIANA, PONZIO, SACCO, HERLITZKA, POCHETTINO e il Segretario MATTIROLO.

Scusano la loro l'assenza il Presidente RUFFINI e i Soci D'OVIDIO e MAJORANA.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che è approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una lettera del Socio corrispondente CHARLES RICHET che, ringraziando, dichiara di accettare l'onorevole incarico di rappresentare l'Accademia alle feste del 75° anniversario della *Société de Biologie* di Parigi.

Il Socio HERLITZKA fa omaggio di due volumi che contengono le ricerche eseguite nel Laboratorio dell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino, da lui diretto. — Il primo volume raccoglie i lavori eseguiti dall'anno 1913 al 1916; il secondo dal 1917 al 1921.

Il Socio SACCO presenta e fa dono di una sua Nota pubblicata nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „ dal

titolo: *L'anomalia della Gravità sulla Terra*, e ne discorre brevemente.

Il Presidente ringrazia i donatori.

Il Socio PONZIO presenta quindi due Note:

La 1ª, *Sugli acidi nitrolici aromatici* del signor Gustavo ROGGERI.

La 2ª, *Ricerche sulle Diossime* del dottor Lodovico AVOGADRO.

Le due Note sono accolte per gli *Atti*.

Il Socio POCHETTINO presenta quindi, in unione al signor G. FULCHERIS, una Nota su le *Proprietà elettriche e termiche dello Jodio*, la quale viene approvata per gli *Atti*.

Infine il Socio MATTIROLO presenta per la inserzione negli *Atti* una Nota, da lui redatta in unione al Dr Piero GIAJ-LEVRA, dal titolo: *Primo Elenco delle Diatomee fluviali dei dintorni di Torino*. Questa Nota contempla lo studio delle Diatomee alpine nelle sorgive che si trovano sulla sponda sinistra del Po, presso il Valentino (di cui è discusso il trasporto attraverso ai conglomerati e alle puddinghe, sulle quali formazioni è situata Torino); e inoltre si riferisce allo studio delle Diatomee attualmente viventi nelle acque del *Po*, del *Sangone*, della *Dora Riparia* e della *Stura di Lanzo*, e dei *torrentelli* che dalla Collina di Torino scendono al Po.

LETTURE

Sugli acidi nitrolici aromatici

Nota del dott. GUSTAVO RUGGERI
Presentata dal Socio nazionale residente Giacomo Ponzio

Fra i metodi generali di preparazione degli acidi nitrolici $R.C(:NOH).NO_2$, e cioè:

a) azione dell'acido nitroso sui mononitroidrocarburi [1], p. es. $CH_3.CH_2.NO_2 \xrightarrow{HNO_2} CH_3.C(:NOH).NO_2$;

b) azione dell'idrossilamina sui dibromonitroidrocarburi [2], p. es. $CH_3.CBr_2.NO_2 \xrightarrow{NH_3O} CH_3.C(:NOH).NO_2$;

c) azione del nitrito di argento sui cloruri degli acidi idrossamici [3], p. es. $CH_3.C(:NOH).Cl \xrightarrow{AgNO_2} CH_3.C(:NOH).NO_2$;

d) azione del tetrossido di azoto sugli α-ossiminoacidi [4], p. es. $CH_3.C(:NOH).COOH \xrightarrow{N_2O_4} CH_3.C(:NOH).NO_2$;

e fra alcuni metodi di applicazione limitata, e cioè:

e) azione delle basi sui chetopseudonitroli [5], p. es. $CH_3.CH_2.C(:N_2O_3).CO.CH_3 \xrightarrow{KOH} CH_3.CH_2.C(:NOH).NO_2$;

f) azione dell'acido nitrico sui chetoni [6], p. es. $CH_3.CH_2.CO.CH_3 \xrightarrow{HNO_3} CH_3.C(:NOH).NO_2$,

soltanto il primo ha permesso a Wieland e Semper [7] di ottenere, dopo molti tentativi infruttuosi di parecchi altri chimici,

---

(1) V. Meyer, *Ann. 175*, 93 (1875); Demole, *Ann. 175*, 146 (1875); Tscherniak, *Ann. 180*, 166 (1876); V. Meyer e Constam, *Ann. 214*, 329, 335 (1882).

(2) V. Meyer, *Ann. 175*, 127 (1875).

(3) Piloty e Steinbock, *Ber. 35*, 3104 (1902).

(4) Ponzio, " Gazz. Chim. Ital. ", *33*, I, 508 (1903).

(5) Ponzio, " Id. ", *29*, I, 358 (1899).

(6) Behrend e Tryller, *Ann. 283*, 245 (1894).

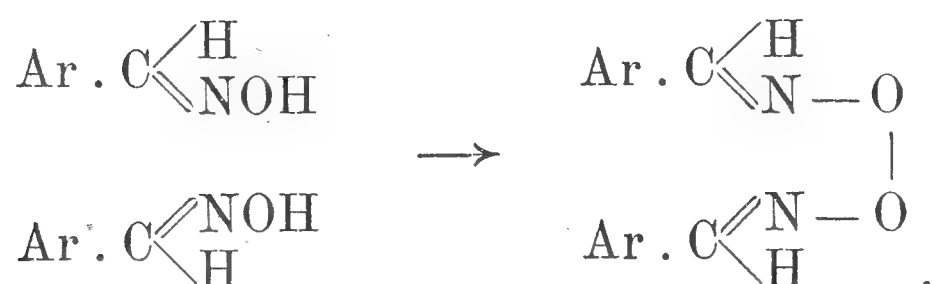
(7) *Ber. 39*, 2522 (1906).

l'unico termine finora conosciuto degli acidi nitrolici aromatici: l'acido fenilmetilnitrolico o benznitrolico $C_6H_5.C(:NOH).NO_2$, il quale risulta in condizioni speciali, e con scarso rendimento, facendo agire l'acido ossalico sul sale potassico del fenilnitrometano $C_6H_5.CH_2NO_2$ in presenza di nitrito sodico.

Io ho trovato che alcuni acidi arilnitrolici $Ar.C(:NOH).NO_2$ si possono facilmente preparare trattando le arilaldossime $Ar.C(:NOH).H$ con tetrossido di azoto, ossia ricorrendo ad un reattivo il quale è stato finora utilizzato per trasformare dette aldossime nei rispettivi perossidi o nei dinitroidrocarburi primari. Come dirò più avanti, per ottenere i miei acidi nitrolici occorre impiegare una mezza molecola di tetrossido, per il che questa agendo su una sola molecola di aldossima ne sostituisce l'atomo di idrogeno legato al carbonio con un nitrogruppo

$$Ar.C{\langle}^{H}_{NOH} \longrightarrow Ar.C{\langle}^{NO_2}_{NOH};$$

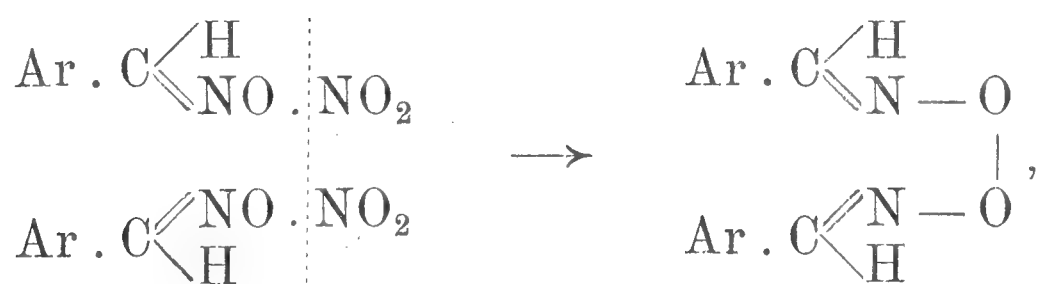
mentre, nei casi già noti, quando risultano i perossidi delle aldossime, una molecola di tetrossido di azoto toglie a due molecole di queste ultime i due atomi di idrogeno ossimico

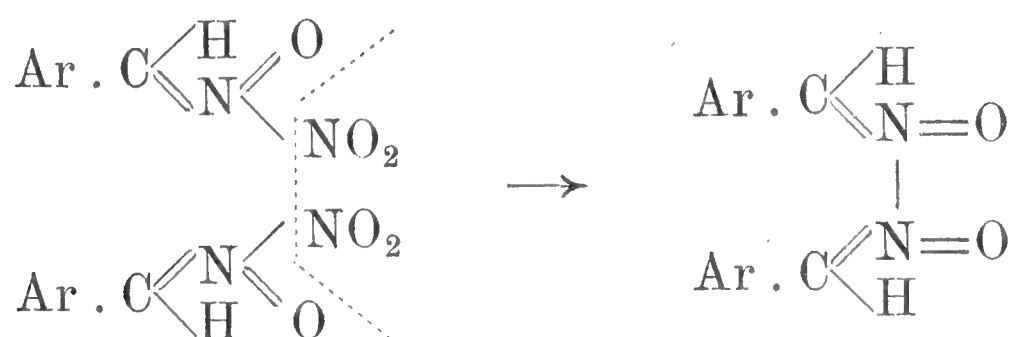
$$\begin{matrix} Ar.C{\langle}^{H}_{NOH} \\ Ar.C{\langle}^{NOH}_{H} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} Ar.C{\langle}^{H}_{N-O} \\ \qquad\quad | \\ Ar.C{\langle}^{N-O}_{H} \end{matrix}.$$

Il diverso modo di comportarsi delle differenti aldossime non è difficile ad interpretare. Infatti, siccome secondo Ponzio ([8]) i dinitroidrocarburi risultano dalle aldossime aromatiche in maggior quantità facendo agire due molecole di tetrossido di azoto invece di una sola, e siccome Behrend e Tryller ([9]) hanno ossidato l'acido etilnitrolico in dinitroetano coll'acido nitrico $CH_3.C(:NOH).NO_2 \longrightarrow CH_3.CHN_2O_4$, è evidente che la formazione degli acidi nitrolici deve precedere quella dei

---

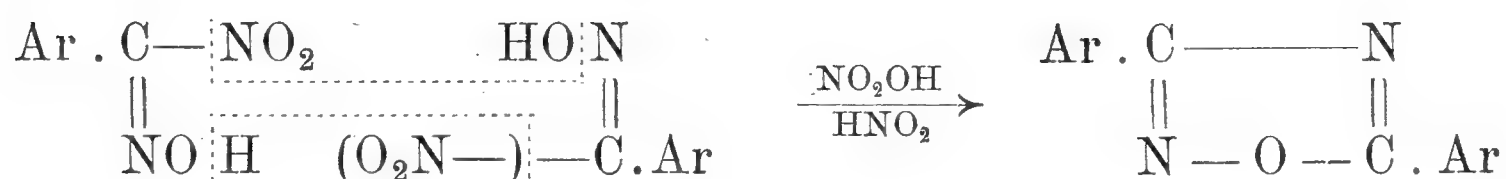
([8]) " Gazz. Chim. Ital. ", *36*, II, 588 (1906).
([9]) *Ann.* *283*, 243 (1894).

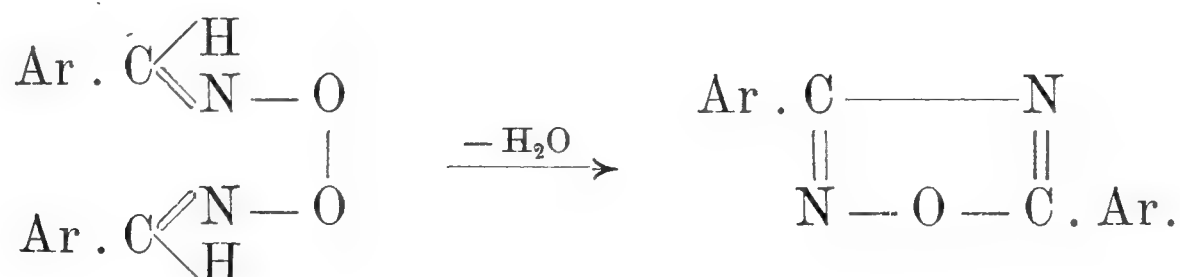
dinitroidrocarburi. Inoltre, poichè, nei casi da me presi in esame, quando risultano gli acidi nitrolici non si formano i perossidi delle aldossime, mentre quando risultano i perossidi delle aldossime od i dinitroidrocarburi non furono mai riscontrati gli acidi nitrolici, è logico ammettere che esista una stretta relazione fra le tre classi di composti. Ed in base ai risultati delle esperienze che descrivo in questa Nota ritengo poter concludere che i prodotti primitivi della reazione fra le arilaldossime ed il tetrossido di azoto siano sempre gli acidi nitrolici, alcuni dei quali sono stabili e si possono isolare, altri sono facilmente ossidabili in dinitroidrocarburi da un eccesso di reattivo, ed altri infine sono trasformabili, con eliminazione del nitrogruppo e riunione dei residui di due molecole, in perossidi delle aldossime. Attribuendo agli acidi nitrolici la struttura di nitroso-nitro-idrocarburi $Ar . C \begin{smallmatrix} / H \\ - NO \\ \backslash NO_2 \end{smallmatrix}$, l'ossidazione in dinitro-idrocarburi $Ar . C \begin{smallmatrix} / H \\ - NO_2 \\ \backslash NO_2 \end{smallmatrix}$ si spiega senza difficoltà; mentre per spiegare la formazione dei perossidi delle aldossime bisognerebbe attribuire agli acidi nitrolici la struttura di nitriti $Ar . C \begin{smallmatrix} / H \\ \backslash NO . NO_2 \end{smallmatrix}$, ovvero quella di N-nitroderivati $Ar . C \begin{smallmatrix} / H \\ \backslash N \begin{smallmatrix} /\!/ O \\ \backslash NO_2 \end{smallmatrix} \end{smallmatrix}$, la prima delle quali conduce alla formola comunemente adottata per detti perossidi

$$\begin{matrix} Ar . C \begin{smallmatrix} / H \\ \backslash NO \end{smallmatrix} . \vdots NO_2 \\ Ar . C \begin{smallmatrix} /\!/ NO \\ \backslash H \end{smallmatrix} . \vdots NO_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} Ar . C \begin{smallmatrix} / H \\ \backslash N - O \end{smallmatrix} \\ \qquad | \\ Ar . C \begin{smallmatrix} /\!/ N - O \\ \backslash H \end{smallmatrix} \end{matrix} ,$$

la seconda ad una formola

$$\begin{matrix} Ar . C \begin{smallmatrix} / H \\ \backslash N \begin{smallmatrix} /\!/ O \\ \backslash NO_2 \end{smallmatrix} \end{smallmatrix} \\ Ar . C \begin{smallmatrix} /\!/ N \begin{smallmatrix} / NO_2 \\ \backslash O \end{smallmatrix} \\ \backslash H \end{smallmatrix} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} Ar . C \begin{smallmatrix} / H \\ \backslash N = O \end{smallmatrix} \\ \qquad | \\ Ar . C \begin{smallmatrix} /\!/ N = O \\ \backslash H \end{smallmatrix} \end{matrix}$$

che si accorda bene con la formola nitronica delle aldossime $Ar . C \genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup H}{\diagdown N \genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup O}{\diagdown H}}$ proposta da Staudinger e Miescer ([10]) e sperimentalmente dimostrata per molti derivati di queste ultime.

Gli acidi p-clorofenilmetilnitrolico $Cl . C_6H_4 . C (: NOH) . NO_2$ e m-nitrofenilmetilnitrolico $NO_2 . C_6H_4 . C (: NOH) . NO_2$ da me ottenuti con ottimo rendimento si possono, se puri, conservare inalterati all'aria per molto tempo. Come l'acido fenilmetilnitrolico $C_6H_5 . C (: NOH) . NO_2$ essi sono trasformabili nei perossidi delle diossime corrispondenti, ma, a differenza di quello (instabilissimo), si possono anche benzoilare e trasformare in azossime, le quali non provengono però direttamente dagli acidi nitrolici per eliminazione contemporanea di una molecola di acido nitrico ed una di acido nitroso

$$\begin{array}{ccc} Ar . C - \vdots NO_2 & HO \vdots N & \\ \| & \| & \\ NO \vdots H & (O_2N-) \vdots - C . Ar & \end{array} \xrightarrow[HNO_2]{NO_2OH} \begin{array}{ccc} Ar . C & - & N \\ \| & & \| \\ N - O & - & C . Ar \end{array}$$

bensì derivano dai perossidi delle aldossime (risultanti in un primo tempo dagli acidi nitrolici nel modo che ho detto poc'anzi), i quali si decompongono poi, conforme a quanto ebbero già ad osservare Beckmann ([11]) e Ponzio ([12]), con eliminazione di una molecola di acqua nel modo seguente

$$\begin{array}{l} Ar . C \genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup H}{\diagdown N - O} \\ \qquad\qquad\quad | \\ Ar . C \genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup\!\!\diagup N - O}{\diagdown H} \end{array} \xrightarrow{-H_2O} \begin{array}{ccc} Ar . C & - & N \\ \| & & \| \\ N - O & - & C . Ar. \end{array}$$

Acido p-clorofenilmetilnitrolico (acido p-clorobenznitrolico) $Cl . C_6H_4 . C (: NOH) . NO_2$. — Gr. 10 di p-clorobenzaldossima $Cl . C_6H_4 . C (: NOH) . H$ sciolti in circa 100 cc. di etere anidro si trattano, raffreddando in miscela frigorifera, con gr. 3 di tetrossido di azoto distillato su anidride fosforica. Si osserva

---

([10]) " Helvetica Chim. Acta ", II, 554 (1919).

([11]) *Ber.* *22*, 1591 (1889).

([12]) " Gazz. Chim. Ital. ", *36*, II, 338 (1906).

subito un'intensa colorazione bruna la quale passa poi al verde smeraldo per scomparire dopo circa un'ora, mentre si separa una piccolissima quantità (circa gr. 0,1) di una sostanza bianca cristallina, che raccolta su filtro e lavata con etere fonde, senza ulteriore purificazione, a 88° con viva decomposizione [13]. Il filtrato, lavato ripetutamente con poca acqua, seccato su solfato sodico anidro e fatto evaporare all'aria, lascia come residuo l'acido p-clorofenilmetilnitrolico $Cl . C_6H_4 . C(:NOH) . NO_2$ il quale purificato per cristallizzazione, prima da una miscela di cloroformio e di etere di petrolio e quindi dalla ligroina, costituisce lunghi e fini aghi setacei leggermente paglierini fusibili a 78°-79° con viva decomposizione (rendimento gr. 7-8 circa).

Trovato %: N 13,86.
Per $C_7H_5O_3N_2Cl$ calc.: 13,96.

È solubile a freddo in etere, alcool, acetone e cloroformio; discretamente a caldo e poco a freddo in benzene; poco a caldo e quasi nulla a freddo in ligroina; pochissimo in eteri di petrolio.

Si scioglie negli idrossidi e nei carbonati di metalli alcalini con colorazione intensamente rossa e dai primi può essere riprecipitato, senza che subisca alcuna alterazione, se si acidifica immediatamente. Invece col tempo le soluzioni si decolorano con separazione di una miscela di di-p-clorobenzenilazossima e di perossido della di-p-clorobenzildiossima. Questi due composti, non ancora conosciuti, risultano pure più o meno facilmente dall'acido p-clorofenilmetilnitrolico per riscaldamento con alcuni solventi organici [14], e si ottengono nel miglior modo sciogliendo l'acido in carbonato sodico ed isolandoli dalla loro miscela mediante cristallizzazione frazionata dall'acetone.

---

[13] Questa sostanza non è il perossido della p-clorobenzaldossima.

[14] Nella decomposizione provocata dai carbonati l'azossima si forma in prevalenza, mentre in quella provocata dal calore (e che è accompagnata da svolgimento di gas nitrosi) si forma in maggior quantità il perossido della diossima; in quest'ultimo caso, prima di procedere alla cristallizzazione, conviene fare un trattamento con soluzione di idrossido di sodio per eliminare l'acido p-clorobenzoico che contemporaneamente risulta.

La *di-p-clorobenzenilazossima* $Cl . C_6H_4 . C \text{———} N$

$$\begin{array}{ccc} & \| & \| \\ & N - O - & C . C_6H_4 . Cl \end{array}$$

ricristallizzata dall'alcool si presenta in lunghi aghi appiattiti, splendenti, fusibili a 180°-181° senza decomposizione.

Trovato °/$_0$:	N 9,64	Cl 24,89.
Per $C_{14}H_8ON_2Cl_2$ calc.:	9,62	24,39.

È pochissimo solubile anche a caldo in etere, alcool ed eteri di petrolio; molto solubile a caldo e meno a freddo in acetone, cloroformio, benzene e ligroina. Essa è in tutte le sue proprietà identica col prodotto che ho ottenuto facendo agire l'ipoclorito sodico sulla p-clorobenzaldossima col metodo di Ponzio e Busti (loc. cit.), il che ne conferma la struttura.

Il *perossido della di-p clorobenzildiossima* $Cl.C_6H_4.(C_2N_2O_2).C_6H_4.Cl$ cristallizza dall'acetone in laminette bianche allungate fusibili a 193°-194° senza decomposizione.

Trovato °/$_0$:	N 9,05.
Per $C_{14}H_8O_2N_2Cl_2$ calc.:	9,12.

È pochissimo solubile a caldo in etere, alcool ed eteri di petrolio; poco a caldo e pochissimo a freddo in acetone; molto solubile a caldo e poco a freddo in cloroformio e benzene; discretamente a caldo in ligroina.

Benzoilderivato dell'acido p-clorofenilmetilnitrolico $Cl . C_6H_4 . C (: NOCOC_6H_5) . NO_2$. Si ottiene aggiungendo goccia a goccia ed agitando, idrossido di sodio al 10 °/$_0$ alla soluzione eterea di una miscela di acido p-clorofenilmetilnitrolico e di cloruro di benzoile, raffreddata in ghiaccio e raccogliendo su filtro il prodotto che rimane dopo l'evaporazione dell'etere all'aria. Lavato con alcool a freddo e cristallizzato da questo solvente costituisce lunghi aghi splendenti fusibili a 115° senza decomposizione

Trovato °/$_0$:	N 9,17	Cl 12,37.
Per $C_{14}H_9O_4N_2Cl$ calc.:	9,19	11,85.

È solubile in etere, cloroformio, acetone e benzene; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool e ligroina.

p-clorofenildinitrometano $Cl . C_6H_4 . CHN_2O_4$. Risulta in piccola quantità facendo agire una molecola di tetrossido di azoto sulla p-clorobenzaldossima, e con rendimento quasi teorico facendone agire due molecole. A tale scopo gr. 10 di p-clorobenzaldossima $Cl.C_6H_4.C(:NOH).H$ sciolti in etere anidro raffreddato in miscela frigorifera, si trattano con gr. 12 di tetrossido di azoto, per il che si osserva subito intensa colorazione bruna e notevole sviluppo di un gas incoloro. Dopo dodici ore si lava ripetutamente il liquido con poca acqua e lo si agita con soluzione satura e fredda di bicarbonato sodico fino a che questa si colora in giallo. La soluzione bicarbonica si lava con etere, si raffredda in ghiaccio, e dopo aver eliminato con una corrente d'aria l'etere disciolto, si tratta con acido solforico al 10 %. Il p-clorofenildinitrometano, che precipita, impuro, in fiocchi bianchi, si secca nel vuoto, si scioglie in alcool assoluto, e mediante idrossido di potassio concentratissimo si trasforma in p-clorofenildinitrometanpotassio il quale si lava con alcool, si scioglie in acqua fredda e finalmente si decompone con acido solforico diluito.

Il *p-clorofenildinitrometano* $Cl . C_6H_4 . CHN_2O_4$ in tal modo ottenuto si cristallizza poi dagli eteri di petrolio, ed allora si presenta sotto forma di aghi bianchi fondenti a 55° con decomposizione.

Trovato %:	N 12,83.
Per $C_7H_5O_4N_2Cl$ calc.:	12,93.

È solubile a freddo in alcool, etere, acetone, cloroformio e benzene; molto a caldo e pochissimo a freddo in ligroina ed eteri di petrolio.

Malgrado sia possibile trasformare nei modi anzidetti la p-clorobenzaldossima mediante il tetrossido di azoto, sia in acido p-clorofenilmetilnitrolico $Cl . C_6H_4 . C(:NOH) . NO_2$, che in p-clorofenildinitrometano $Cl . C_6H_4 . CHN_2O_4$ impiegando rispettivamente mezza o due molecole di tetrossido di azoto, non mi è riuscito di passare direttamente dall'acido nitrolico al dinitroidrocarburo nè col tetrossido di azoto in eccesso, nè con altri ossidanti, quali l'acido nitrico ed il peridrolo.

Sale potassico del p-clorofenildinitrometano (p-clorofenildinitrometanpotassio) $Cl . C_6H_4 . CKN_2O_4$. Ottenuto nel modo già de-

scritto e cristallizzato dall'acqua si presenta in grossi prismi giallo-aranciati (15).

Trovato $^0/_0$: K 15,31.
Per $C_7H_4O_4N_2ClK$ calc.: 15,35.

È molto solubile a caldo (con colorazione rossa intensa) e poco a freddo (con colorazione giallo-aranciato) in acqua; pochissimo solubile nell'alcool; insolubile negli altri comuni solventi.

Evaporando l'etere, dal quale mediante il bicarbonato sodico si è estratto il p-clorofenildinitrometano, rimane un olio che distillato col vapore d'acqua fornisce un po' di p-clorobenzaldeide $Cl.C_6H_4.CHO$ (p. f. 47°). Quest'ultima fu trasformata per trattamento con fenilidrazina in soluzione alcoolica nel corrispondente *fenilidrazone* $Cl.C_6H_4.CH:N.NHC_6H_5$, non ancora conosciuto, il quale cristallizza dall'alcool in piccoli aghetti paglierini fondenti a 132° senza decomposizione.

Trovato $^0/_0$: N 12,10.
Per $C_{13}H_{11}N_2Cl$ calc.: 12,14.

È molto solubile a freddo in etere, acetone, benzene e cloroformio; discretamente solubile a caldo e poco a freddo in alcool; insolubile in acqua, ligroina ed eteri di petrolio. All'aria ed alla luce si colora dopo qualche tempo in rosso.

Acido m-nitrofenilmetilnitrolico (acido m-nitrobenznitrolico) $NO_2.C_6H_4.C(:NOH).NO_2$. — Risulta nelle identiche condizioni dell'acido p-clorofenilmetilnitrolico $Cl.C_6H_4.C(:NOH).NO_2$, facendo agire mezza molecola di tetrossido di azoto sulla m-nitrobenzaldossima $NO_2.C_6H_4.C(:NOH).H$, però assieme al 7-8 $^0/_0$ del perossido di questa (p. f. 131°).

Operando come nel caso precedente si ottiene, dopo evaporazione dell'etere all'aria, una sostanza giallognola costituita in massima parte dall'acido nitrolico, il quale, purificato per precipitazione dalla sua soluzione cloroformica mediante ligroina,

---

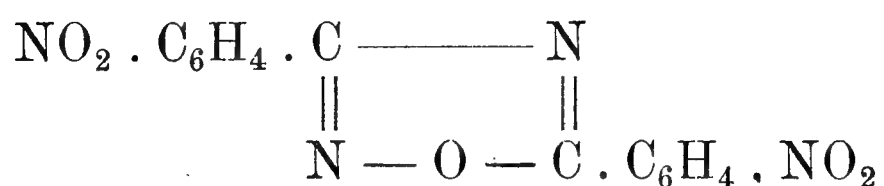
(15) Questo sale è stabilissimo: un campione conservato in boccetta non perfettamente chiusa è ancora inalterato dopo tre anni. Se riscaldato esplode.

e cristallizzato dal benzene od anche dall'alcool acquoso, si presenta in piccoli aghetti appiattiti leggermente paglierini fondenti a 89° con viva decomposizione (rendimento circa 80 %).

Trovato %: N 19,78.
Per $C_7H_5O_5N_3$ calc.: 19,90.

È molto solubile in etere, alcool, cloroformio e acetone; discretamente a caldo e poco a freddo in benzene; poco a caldo e quasi nulla a freddo in ligroina.

Verso gli idrossidi dei metalli alcalini si comporta analogamente all'acido p-clorofenilmetilnitrolico, cioè si può riottenere inalterato trattandone subito la soluzione con acido, mentre un prolungato contatto lo altera profondamente. La sua soluzione in carbonato sodico fornisce, decolorandosi dopo qualche tempo, un abbondante precipitato costituito da una miscela di di-m-nitrobenzenilazossima e di perossido della di-m-nitrobenzildiossima, le quali risultano anche per riscaldamento dell'acido con alcuni solventi organici. Per isolarle conviene far bollire la miscela con alcool nel quale la di-m-nitrobenzenilazossima

$$\begin{array}{l} NO_2 . C_6H_4 . C \text{———} N \\ \qquad\qquad\quad \| \qquad\quad \| \\ \qquad\qquad\quad N - O - C . C_6H_4 . NO_2 \end{array}$$

è più facilmente solubile. Questa ricristallizzata dall'alcool fornisce piccoli aghetti bianchi, e talvolta laminette, fondenti a 169° conforme ai dati di Stieglitz ([16]), Minunni e Ciusa ([17]), Ponzio e Busti ([18]).

Trovato %: N 17,86.
Per $C_{14}H_8O_5N_4$ calc.: 17,95.

Il perossido della di-m-nitrobenzildiossima $NO_2 . C_6H_4 (C_2N_2O) C_6H_4 . NO_2$, che rimane per la maggior parte indisciolto, cristallizzato da acido acetico glaciale, ove è discretamente solubile a caldo e poco a freddo, si presenta in lunghi aghi ap

---

([16]) *Ber.* *22,* 3158 (1889).
([17]) " Atti Accad. Lincei ", *14,* II, 518 (1905).
([18]) " Gazz. Chim. Ital. ", *36,* II, 340 (1906).

piattiti fondenti a 185° conforme ai dati di Werner [19] e Werner e Stiba [20].

Trovato %: N 16,98.
Per $C_{14}H_8O_6N_4$ calc.: 17,07.

Benzoilderivato dell'acido m-nitrofenilmetilnitrolico $NO_2.C_6H_4.C(:NOCOC_6H_5).NO_2$. Si separa istantaneamente trattando la soluzione ben fredda di acido m-nitrofenilmetilnitrolico in idrossido di sodio al 10 % con cloruro di benzoile. Dopo lavatura con acqua e poi con alcool, si cristallizza da una miscela di cloroformio con poco alcool e costituisce allora bellissimi prismetti giallognoli fondenti a 145° rammollendo qualche grado prima.

Trovato %: N 13,13.
Per $C_{14}H_9O_6N_3$ calc.: 13,33.

È pochissimo solubile in etere e alcool; solubile a freddo in acetone e cloroformio; discretamente a caldo e meno a freddo in benzene; pochissimo a caldo e quasi nulla a freddo in ligroina.

Torino. - Istituto Chimico della R. Università.
Maggio 1923.

---

(19) *Ber.* *27*, 2848 (1894).
(20) *Ber.* *32*, 1662 (1899).

Ricerche sulle diossime

Nota del dott. LODOVICO AVOGADRO

Presentata dal Socio nazionale residente Giacomo Ponzio

Dopo quanto è stato detto nella Nota VI [1] riguardo alla fenilgliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$ era logico prevedere che, come questa, anche i suoi derivati sostituiti nel nucleo, quali, per es., la p-metilfenilgliossima $CH_3 . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$ (p-tolilgliossima), la p-clorofenilgliossima $Cl . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$, la p-bromofenilgliossima $Br . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$, ecc., dovessero esistere in due forme.

Di tale fatto non trovasi però cenno alcuno nella letteratura chimica, ed in realtà Söderbaum [2] descrive una sola p-tolilgliossima fusibile a 165° ed una p-bromofenilgliossima fusibile a 169°-170°; e Collet [3] una sola p-clorofenilgliossima fusibile a 198°-199° ed una p-bromofenilgliossima fusibile a 171°-172°. Occorreva dunque fare una revisione dei lavori di detti chimici, e ciò non soltanto per correggerne gli eventuali errori, ma anche per poter disporre del materiale necessario al proseguimento delle ricerche sulle diossime, da tempo iniziate in questo laboratorio.

Ricorrendo a metodi assolutamente diversi fra di loro, vale a dire all'azione dell'idrossilamina sull'isonitroso-p-metil-, p-cloro-, e p-bromoacetofenone $CH_3 . C_6H_4 . CO . C(:NOH) . H$, $Cl . C_6H_4 . CO . C(:NOH) . H$ e $Br . C_6H_4 . CO . C(:NOH) . H$, ed all'azione

(1) " Gazz. Chim. Ital. ", *53*, I, 25 (1923).

(2) " Beilstein ", III, 92 e 95.

(3) " Bull. Soc. chim. " (3), *27*, 542 e 543 (1902).

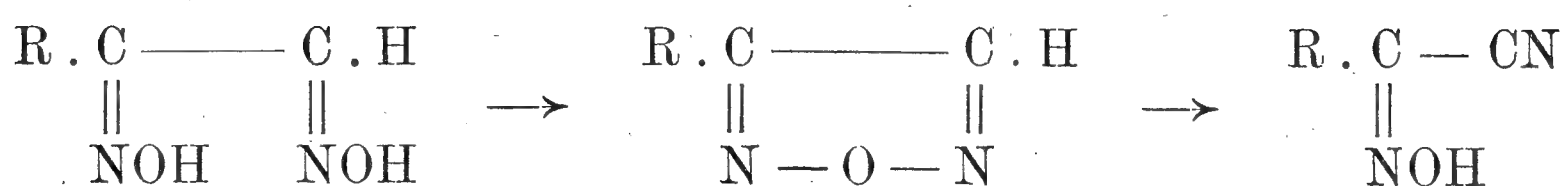
dell'idrossilamina sull' ω-dibromo-p-metilacetofenone $CH_3 . C_6H_4 . CO . CHBr_2$ e sull' ω-dibromo-p-cloroacetofenone $Cl . C_6H_4 . CO . CHBr_2$, sono riuscito a dimostrare che le sostanze ritenute finora come le diossime del p-tolil-, del p-clorofenil- e del p-bromofenilgliossale, sono invece ognuna miscele di due diossime isomere le quali stanno fra di loro nello stesso rapporto delle due forme della fenilgliossima. Di esse, quelle che chiamerò forme α danno un sale di nichel verde, solubile a freddo in acido acetico diluito, mentre quelle che chiamerò forme β danno un sale di nichel rosso-bruno, insolubile anche a caldo in detto acido. Le forme α fondono a temperatura, in ciascun caso, inferiore a quella delle forme β e queste, che sono le più stabili, si ottengono dalle prime direttamente per fusione o per riscaldamento con acido acetico diluito.

I sali di nichel delle forme β derivano da due molecole di gliossima per sostituzione di due atomi di idrogeno ossimico, uno per ciascuna molecola, con un atomo di nichel; quelli delle forme α (che non si possono ottenere allo stato di purezza) derivano invece, con tutta probabilità, da una sola molecola di gliossima per sostituzione dei due atomi di idrogeno ossimico con un atomo di metallo. Inoltre soltanto le forme β (e non le forme α) posseggono la caratteristica proprietà di intaccare in soluzione acquosa il nichel ed il cobalto compatti dando il relativo sale complesso (4).

Anche i derivati delle p-tolil- e delle p-clorofenilgliossime, che più avanti descrivo, presentano perfetta analogia con i derivati delle fenilgliossime; però, mentre le fenilgliossime danno un unico diacetilderivato (perchè per azione dell'anidride acetica la forma α si isomerizza nella forma β), la p-tolilgliossima e la p-clorofenilgliossima danno due diacetilderivati diversi a seconda che si tratta della forma α o della forma β. Inoltre, le forme α della p-tolil- e della p-clorofenilgliossima, come la forma α della fenilgliossima, non sono benzoilabili a causa della facilità con cui esse si anidrizzano nei corrispondenti furazani, isomerizzabili a loro volta nell'ossima del cianuro di p-toluile e di p-clorobenzoile.

---

(4) " Gazz. Chim. Ital. „ *51*, II, 213 (1921).

$$\begin{array}{ccc} R.C\text{---}C.H & & R.C\text{---}C.H & & R.C-CN \\ \| \quad\quad \| & \longrightarrow & \| \quad\quad \| & \longrightarrow & \| \\ NOH \quad NOH & & N-O-N & & NOH \end{array}$$

$$(R = CH_3 . C_6H_4 \quad \text{ovvero} \quad Cl . C_6H_4 -).$$

Lo stesso comportamento hanno probabilmente le p-bromo-fenilgliossime, delle quali non ho creduto necessario studiare i derivati, limitandomi a stabilire che la diossima ottenuta da Collet e da Söderbaum (loc. cit.) col punto di fusione 169°-170° o 171°-172° è la forma α, e che esiste anche una forma β fusibile a 197°-198°.

Sulla natura dell'isomeria delle due forme delle nuove gliossime da me preparate riferirò non appena ultimato lo studio del loro comportamento verso il tetrossido di azoto; posso però fin d'ora escludere che si tratti di isomeri geometrici, poichè già dalle esperienze preliminari mi risulta che nella forma β i due gruppi >NOH sono equivalenti, mentre tali non sono nelle forme α.

p-tolilgliossime $CH_3 . C_6H_4 . C(:NOH).C(:NOH).H$. Secondo Söderbaum (loc. cit.) la p-tolilgliossima cristallizza dal toluene in fini aghi bianchi fusibili a 165°. La sostanza ottenuta da detto Autore (in modo non descritto) era certamente una miscela della forma α fusibile a 170°-171° e della forma β fusibile a 192°-193°, le quali prendono contemporaneamente origine, però in quantità diverse, facendo agire l'idrossilamina sia sull' ω-dibromo-p-metilacetofenone $CH_3 . C_6H_4 . CO . CHBr_2 + 2NH_3O \longrightarrow CH_3 . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H + 2HBr$, che sull'isonitroso-p-metilacetofenone $CH_3 . C_6H_4 . CO . C(:NOH) . H + NH_3O \longrightarrow CH_3 . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H + H_2O$ e si isolano mediante i procedimenti seguenti:

a) Alla soluzione alcoolica dell' ω-dibromo-p-metilacetofenone $CH_3 . C_6H_4 . CO . CHBr_2$, preparato secondo le indicazioni di Verley ([5]), si aggiunge un piccolo eccesso delle quantità teoriche di cloridrato di idrossilamina e di acetato sodico cristal-

([5]) "Bull. Soc. chim.", (3), *17*, 909 (1897).

lizzato sciolti in poca acqua e si scalda a 60°-70° per qualche ora. Avvenuta la reazione suesposta si tratta con idrossido di sodio diluito, si filtra per eliminare l'ω-dibromo-p-metilacetofenone rimasto inalterato, si acidifica con acido acetico e si addiziona subito un piccolo eccesso di acetato di nichel al 20 %: precipita così in fiocchi giallo-rossastri il sale di nichel della forma β della p-tolilgliossima $(C_9H_9O_2N_2)_2Ni$. Si filtra, ed al filtrato si aggiunge quindi idrossido di ammonio fino a che non si formi più precipitato di sale di nichel verde della α-p-tolilgliossima $C_9H_8O_2N_2Ni$.

b) Alla soluzione alcoolica di isonitroso-p-metilacetofenone, preparato secondo le indicazioni di Müller e Pechmann [6], si aggiunge un piccolo eccesso delle quantità teoriche di cloridrato di idrossilamina e di acetato sodico cristallizzato e si riscalda la miscela a 60°-70°: per il che dopo breve tempo incomincia già a separarsi dal liquido la α-p-tolilgliossima quasi pura. Dopo alcune ore si filtra, si addiziona acido acetico alle acque madri (le quali contengono poca α ed una grande quantità di β-p-tolilgliossima) e si fa bollire per qualche tempo in presenza di acetato di nichel: precipita così in polvere rosso-viva il sale di nichel della β-p-tolilgliossima preesistente e di quella che risulta dall'isomerizzazione della forma α.

α-p-tolilgliossima $CH_3 . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$ p. f. 170°-171°. Isolato come è stato detto poc'anzi il suo sale di nichel, lo si lava con alcool bollente, lo si tratta con acido cloridrico diluito e si estrae quindi con etere. La gliossima, in tal modo messa in libertà, oppure quella che si è formata direttamente per azione delll'idrossilamina sull'isonitroso-p-metilacetofenone, si purifica dapprima sciogliendola in acetone e riprecipitandola con acqua, ed infine cristallizzandola dal toluene. La si ottiene allora in prismetti bianchi fusibili a 170°-171° senza decomposizione.

Trovato %: N 15,55.
Per $C_9H_{10}O_2N_2$ calc. %: 15,73.

---

(6) *Ber.* *22*, 2560 (1889).

È praticamente insolubile nell'acqua fredda e poco in quella calda; solubile a freddo in alcool, etere, acetone; pochissimo a caldo e quasi affatto a freddo in cloroformio e benzene; discretamente a caldo e quasi insolubile a freddo in toluene; quasi insolubile in ligroina.

Si scioglie nell'idrossido di sodio al 20 $^0/_0$ senza colorazione e riprecipita inalterata per azione dell'anidride carbonica e dell'acido acetico diluito; si scioglie pure nell'idrossido di ammonio 6 N, poco a freddo e discretamente a caldo.

Fatta bollire in soluzione acquoso-alcoolica con acido acetico diluito si isomerizza lentamente nella forma β, la quale risulta pure, come sarà detto nella Nota XV, per breve riscaldamento alla temperatura di fusione.

In presenza di acido acetico non dà sale di nichel; tuttavia aggiungendo alla soluzione alcoolica della α-p-tolilgliossima una soluzione acquosa di acetato di nichel si ha un precipitato giallo-verdastro che, cristallizzato dal cloroformio per aggiunta di ligroina, costituisce una polvere amorfa giallo-bruna insolubile in tutti i solventi organici comuni eccettuato il cloroformio, e che non fonde neanche se scaldata a 300°. I risultati del dosamento del nichel (trovato $^0/_0$ Ni : 21,31) lasciano prevedere che si tratti del sale semplice $C_9H_8O_2N_2Ni$ (il quale richiede Ni $^0/_0$ 25,01) e non del sale complesso $(C_9H_7O_2N_2)_2Ni$ (il quale richiede Ni $^0/_0$ 14,20).

Diacetilderivato $CH_3.C_6H_4.C(:NOCOCH_3).C(:NOCOCH_3).H$. Si ottiene acetilando a freddo la α-p-tolilgliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso ([7]). Cristallizzato dall'alcool costituisce prismetti bianchi fusibili a 115° senza decomposizione.

Trovato $^0/_0$:	N	10,55.
Per $C_{13}H_{14}O_4N_2$ calc. $^0/_0$:		10,68.

È insolubile in acqua; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool; poco solubile in etere; solubile a freddo in

([7]) Contemporaneamente risulta anche un po' di p-tolilfurazano $CH_3.C_6H_4.(C_2N_2O)H$, il quale però è facilmente eliminabile mediante lavatura con etere del prodotto della reazione.

acetone, benzene, cloroformio; un po' solubile a caldo e meno a freddo in ligroina.

Trattato con idrossido di sodio al 20 $^0/_0$ vi si scioglie lentemente trasformandosi in p-tolilfurazano $CH_3 . C_6H_4 . (C_2N_2O) . H$ e nell'ossima del cianuro di p-toluile $CH_3 . C_6H_4 . C (: NOH) . CN$, suo prodotto di isomerizzazione.

Azione del cloruro di benzoile. La benzoilazione della α-p-tolilgliossima non è possibile, ed in realtà facendo agire il cloruro di benzoile sulla soluzione della gliossima in idrossido di sodio ho ottenuto il *benzoilderivato dell'ossima del cianuro di p-toluile* $CH_3 . C_6H_4 . C (: NOCOC_6H_5) . CN$ la cui formazione è facile a spiegarsi data la tendenza di detta gliossima di anidrizzarsi in furazano $CH_3 . C_6H_4 . (C_2N_2O) . H$, isomerizzabile a sua volta nell'ossima del cianuro di p-toluile $CH_3 . C_6H_4 . C (: NOH) . CN$. Questo benzoilderivato cristallizzato dall'alcool si presenta in aghetti bianchi fusibili a 147°-148° senza decomposizione.

Trovato $^0/_0$:	N 10,47.
Per $C_{16}H_{12}O_2N_2$ calc. $^0/_0$:	10,60.

È solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool e nella ligroina; poco solubile in etere; solubile a freddo in acetone, benzene, cloroformio.

β-*p-tolilgliossima* $CH_3 . C_6H_4 . C (: NOH) . C (: NOH) . H$ p. f. 192°-193°. Come ho già detto, questa forma della p-tolilgliossima risulta dalla forma α sia facendone bollire la soluzione acquoso-alcoolica con acido acetico diluito, sia riscaldandola alla temperatura di fusione. Conviene prepararla passando per il suo sale di nichel, che si ottiene col procedimento già indicato. Il sale si lava prima con alcool bollente, quindi si tratta con acido cloridrico e si estrae con etere. Eliminato il solvente, si ha così la β-p-tolilgliossima $CH_3 . C_6H_4 . C (: NOH) . C (: NOH) . H$, la quale purificata per ebollizione con cloroformio e cristallizzata dall'alcool o dall'alcool acquoso si presenta in laminette leggermente paglierine fusibili a 192°-193° senza decomposizione.

Trovato $^0/_0$:	N 15,66.
Per $C_9H_{10}O_2N_2$ calc. $^0/_0$:	15,73.

È pochissimo solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in acqua; discretamente solubile a freddo in alcool ed in etere; solubile a freddo in acetone; pochissimo solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in benzene e toluene; quasi insolubile in cloroformio ed in ligroina.

Si scioglie negli idrossidi dei metalli alcalini e di ammonio senza colorazione e riprecipita inalterata per azione degli acidi anche deboli.

In soluzione acquosa intacca a 100° il nichel ed il cobalto trasformandosi nei rispettivi sali complessi.

Sale di nichel $(C_9H_9O_2N_2)_2Ni$. Si forma per azione diretta della β-p-tolilgliossima sul metallo; si prepara trattando la soluzione della gliossima in acqua ed alcool od in acido acetico al 50 % con acetato di nichel al 20 %. A freddo precipita in fiocchi color giallo rossastro: a caldo in presenza di acido acetico diluito in polvere rosso-viva. Cristallizzato dalla piridina per aggiunta di alcool costituisce una polvere cristallina di color rosso-sangue che riscaldata a 300° imbrunisce senza fondere.

Trovato %: Ni 14,35.
Per $C_{18}H_{18}O_4N_4Ni$ calc. %: 14,20.

È insolubile in acqua, alcool, acetone; un po' solubile in benzene ed in cloroformio; lentamente solubile nell'idrossido di sodio al 20 % con colorazione rossa; insolubile nell'idrossido di ammonio. Gli acidi minerali diluiti lo decompongono con facilità, invece resiste notevolmente all'acido acetico anche a caldo.

Sale cobaltoso $(C_9H_9O_2N_2)_2Co$. Si forma direttamente dal metallo; si prepara in modo analogo al sale di nichel e costituisce una polvere di color caffè.

Trovato %: Co 14,20.
Per $C_{18}H_{18}O_4N_4Co$ calc. %: 14,28.

(Per il sale cobaltico $C_{27}H_{27}O_6N_6Co$ si calcola % Co : 9,98).

È insolubile nell'acqua e nei comuni solventi organici; insolubile nell'idrossido di sodio e pochissimo solubile nell'idrossido di ammonio. Gli acidi minerali diluiti lo decompongono lentamente.

Diacetilderirato $CH_3 . C_6H_4 . C(:NOCOCH_3) . C(:NOCOCH_3) . H$. Si ottiene acetilando a freddo la β-p-tolilgliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso. Cristallizzato dalla ligroina si presenta in aghetti bianchissimi fusibili a 73°-74° senza decomposizione.

Trovato %: N 10,44.
Per $C_{13}H_{14}O_4N_2$ calc. %: 10,68.

È insolubile in acqua; poco solubile in ligroina a caldo e quasi insolubile a freddo; solubile a freddo in alcool, etere, benzene, acetone, cloroformio.

Trattato con idrossido di sodio al 20 % vi si scioglie lentamente trasformandosi nella gliossima da cui deriva.

Dibenzoilderivato $CH_3.C_6H_4.C(:NOCOC_6H_5).C(:NOCOC_6H_5).H$. Si prepara benzoilando con cloruro di benzoile la β-p-tolilgliossima sciolta in idrossido di sodio. Cristallizzato dall'alcool costituisce laminette splendenti fusibili a 170° senza decomposizione.

Trovato %: N 7,21.
Per $C_{23}H_{18}O_4N_2$ calc. %: 7,22.

È poco solubile a caldo e meno a freddo in alcool; poco solubile in etere; solubile a freddo in acetone, benzene, cloroformio; poco solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in ligroina.

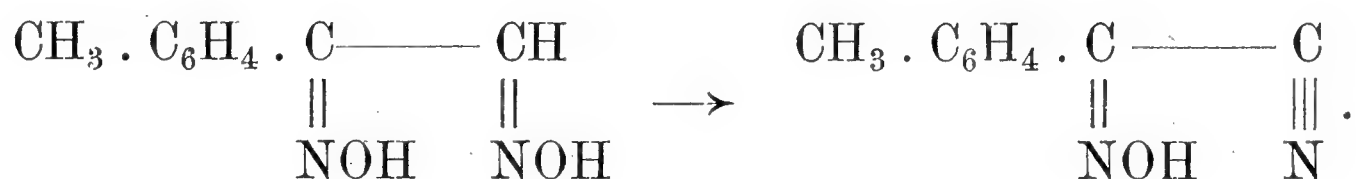
Trattato con idrossido di sodio al 20 % e qualche goccia di alcool, vi si scioglie lentamente trasformandosi nella gliossima da cui deriva.

p-tolilfurazano $CH_3 . C_6H_4 . (C_2N_2O) . H$. Per prepararlo conviene trattare la α-p-tolilgliossima con anidride acetica, versare in acqua il prodotto della reazione (miscela di furazano col diacetilderivato della gliossima) e distillare con vapore. Cristallizzato dall'alcool acquoso costituisce magnifici prismetti di odore caratteristico, fusibili a 52° senza decomposizione.

Trovato %: N 17,45.
Per $C_9H_8ON_2$ calc. %: 17,50.

È insolubile in acqua; solubile a freddo in tutti i comuni solventi organici; molto facilmente volatile col vapore. Non è

alterato nè dall'acido solforico concentrato (nel quale si scioglie a freddo riprecipitando per diluizione con acqua), nè dall'acido cloridrico e nitrico; per contro gli idrossidi dei metalli alcalini e persino l'acqua bollente lo isomerizzano con facilità nell'ossima del cianuro di p-toluile.

$$\begin{array}{ccc} CH_3 . C_6H_4 . \underset{\underset{NOH}{\|}}{C} - \underset{\underset{NOH}{\|}}{CH} & \longrightarrow & CH_3 . C_6H_4 . \underset{\underset{NOH}{\|}}{C} - \underset{\underset{N}{|||}}{C} . \end{array}$$

Ossima del cianuro di p-toluile (ossimino-p-toluilcianuro) $CH_3 . C_6H_4 . C (: NOH) . CN$. Si forma dal p-tolilfurazano nel modo anzidetto ed è in tutte le sue proprietà identico al prodotto che, per conferma, ho preparato partendo dal nitrile dell'acido p-tolilacetico $CH_3 . C_6H_4 . CH_2 . CN$ per trattamento con sodio e nitrito di amile. A tale scopo alla soluzione di un atomo di sodio in 10 parti di alcool assoluto ho aggiunto, raffreddando bene in ghiaccio, il nitrito di amile ed il nitrile; ho raccolto qualche tempo dopo il sale sodico dell'ossima, il quale si separa come un precipitato cristallino giallo-rossastro, l'ho sciolto in acqua e quindi l'ho decomposto con acido acetico diluito.

L'ossima del cianuro di p-toluile $CH_3 . C_6H_4 . C (:NOH) . CN$ cristallizzata dall'acqua costituisce laminette splendenti fusibili a 117°.

Trovato $^0/_0$: N 17,27.
Per $C_9H_8ON_2$ calc. $^0/_0$: 17,50.

È poco solubile a caldo e pochissimo a freddo in acqua; solubile a freddo in alcool, etere, acetone, benzene, cloroformio; discretamente solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in ligroina.

Sciolta in idrossido di sodio al 20 $^0/_0$ e trattata con cloruro di benzoile si trasforma nel benzoilderivato $CH_3 . C_6H_4 . C (: NOCOC_6H_5) . CN$, il quale, come già ho detto, è il prodotto che risulta per azione del cloruro di benzoile sulla soluzione della α-p-tolilgliossima nell'idrossido di sodio e che, a sua volta, sospeso nell'idrossido di sodio al 20 $^0/_0$ addizionato di qualche goccia di alcool, si idrolizza lentamente nell'ossima del cianuro di p-toluile fusibile a 117°.

p-clorofenilgliossime $Cl . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$. Collet (loc. cit.) scaldando a ricadére una soluzione alcoolica di ω-bromo- ovvero di ω-dibromo-p-cloroacetofenone $Cl.C_6H_4.CO.CH_2Br$ e $Cl . C_6H_4 . CO . CHBr_2$ colla quantità equimolecolare di cloridrato di idrossilamina sciolto in acqua e previamente neutralizzato con carbonato sodico ottenne una sostanza fusibile a 198°-199° che ritenne p-clorofenilgliossima.

Partendo sia dall'ω-dibromo-p-cloroacetofenone che dall'isonitroso-p-cloroacetofenone $Cl . C_6H_4 . CO . C(:NOH) . H$, io ho invece sempre ottenuto una miscela delle due forme della p-clorofenilgliossima fusibili rispettivamente a 165° ed a 188°, cosicchè devo concludere che il prodotto descritto da Collet era una miscela delle diossime del p-clorofenilgliossale contenente anche sostanze con punto di fusione molto più elevato di queste.

Il procedimento che ho seguìto per isolare la α e la β p-clorofenilgliossima, passando per i rispettivi sali di nichel, è analogo a quello esposto nel caso delle p-tolilgliossime, però siccome l'isonitroso-p-cloroacetofenone non era ancora conosciuto l'ho dovuto preparare partendo dal p-cloroacetofenone $Cl . C_6H_4 . CO . CH_3$ nitrosandolo con etilato sodico e nitrito di amile col metodo di Claisen e Manasse [8]. Cristallizzato dal cloroformio l'*isonitroso-p-cloroacetofenone* $Cl . C_6H_4 . CO . C(:NOH) . H$ si presenta in aghetti paglierini fusibili a 170° senza decomposizione.

Trovato %: N 7,40.
Per $C_8H_6O_2NCl$ calc. %: 7,62.

È pochissimo solubile nell'acqua bollente, e quasi insolubile a freddo; solubile a freddo in alcool, etere, acetone; poco a caldo e pochissimo a freddo in benzene e cloroformio; pochissimo a caldo in ligroina e quasi insolubile a freddo.

α-p-clorofenilgliossima $Cl . C_6H_4 . C(:NOH) . C(:NOH) . H$ p. f. 165°. Messa in libertà dal suo sale di nichel verde giallastro e purificata per cristallizzazione dal benzene o dal cloroformio costituisce prismetti bianchi fusibili a 165° senza decomposizione.

---

(8) *Ber.* *22*, 526 (1889).

Trovato %: N 13,92 Cl 18,16.
Per $C_8H_7O_2N_2Cl$ calc. %: 14,10 17,88.

È pochissimo solubile nell'acqua bollente, quasi insolubile in quella fredda; solubile a freddo in alcool, etere, acetone; poco solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in benzene, cloroformio e ligroina.

Fatta bollire in soluzione acquoso-alcoolica con acido acetico diluito si isomerizza lentamente nella forma β, la quale risulta pure per riscaldamento alla temperatura di fusione. In presenza di acido acetico non dà sale di nichel; invece aggiungendo alla sua soluzione acquoso-alcoolica acetato di nichel al 20 % si ha un precipitato giallo verdastro amorfo.

Diacetilderivato $Cl.C_6H_4.C(:NOCOCH_3).C(:NOCOCH_3).H$. Si ottiene acetilando a freddo la α-p-clorofenilgliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso ([9]). Cristallizzato dall'alcool costituisce laminette microscopiche fusibili a 123°-124° senza decomposizione.

Trovato %: Cl 12,53.
Per $C_{12}H_{11}O_4N_2Cl$ calc. %: 12,58.

È molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool; insolubile in acqua; solubile a freddo in acetone, benzene, cloroformio; poco solubile a freddo in etere; poco solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in ligroina.

Trattato con idrossido di sodio vi si scioglie lentamente trasformandosi in p-clorofenilfurazano $Cl.C_6H_4.(C_2N_2O).H$ e nell'ossima del cianuro di p-clorobenzoile prodotto di isomerizzazione del primo e fusibile dopo cristallizzazione dalla ligroina a 113°-114°, cioè a temperatura leggermente superiore a quella trovata da Walther e Wetzlich ([10]) e da Zimmermann ([11]) i quali l'avevano ottenuta per azione del sodio e del nitrito di amile sul cianuro di p-clorobenzile.

([9]) Anche in questo caso si forma un po' di p-clorofenilfurazano $Cl.C_6H_4.(C_2N_2O).H$ facilmente eliminabile mediante lavatura con etere.
([10]) " J. Prakt. Chem. „ (2), *61*, 193 (1900).
([11]) " J. Prakt. Chem. „ (2), *66*, 373 (1902).

Azione del cloruro di benzoile. Trattando con cloruro di benzoile la α-p-clorofenilgliossima sciolta in idrossido di sodio si ottiene in modo analogo a quanto si verifica per la α-p-tolilgliossima, il benzoilderivato dell'ossima del cianuro di p-clorobenzoile $Cl . C_6H_4 . C(:NOCOC_6H_5) . CN$, il quale, cristallizzato dall'alcool, costituisce prismetti bianchi fusibili a 117°-118°, ad una temperatura cioè un po' superiore a quella ottenuta da Zimmermann [12] che l'aveva preparato benzoilando l'ossima corrispondente.

β-*p-clorofenilgliossima* $Cl . C_6H_4 . C(: NOH) . C(: NOH) . H$ p. f. 188°. Risulta dalla forma α facendone bollire la soluzione acquoso-alcoolica con acido acetico diluito o riscaldandola alla temperatura di fusione, ma conviene prepararla direttamente dal p-cloroisonitrosoacetofenone passando per il sale di nichel. Cristallizzata dall'acqua o dal toluene costituisce aghi o prismi bianchi leggermente paglierini fusibili a 188° e decomponibili qualche grado più alto.

Trovato %: N 13,92.
Per $C_8H_7O_2N_2Cl$ calc. %: 14,10.

È solubile a freddo in alcool, etere, acetone; poco solubile a caldo in toluene e pochissimo a freddo; poco solubile in acqua bollente e pochissimo in quella fredda; pochissimo solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in cloroformio.

In soluzione acquosa intacca il nichel trasformandosi nel sale complesso di cui dirò tosto.

Sale di nichel $(C_8H_6O_2N_2Cl)_2Ni$. Si ottiene nel miglior modo trattando la soluzione acquoso-alcoolica della β-p-clorofenilgliossima con acetato di nichel al 20 %. Cristallizzato dalla piridina per aggiunta di alcool costituisce prismetti rosso-aranciati che incominciano ad imbrunire verso 305° senza fondere.

Trovato %: Ni 12,17.
Per $C_{16}H_{12}O_4N_4Cl_2Ni$ calc. %: 12,34.

È insolubile nei comuni solventi organici.

---

[12] " J. Prakt. Chem. „ (2), *66*, 374 (1902).

Diacetilderivato $Cl.C_6H_4.C(:NOCOCH_3).C(:NOCOCH_3).H$. Risulta acetilando a freddo la β-p-clorofenilgliossima con anidride acetica in presenza di acetato sodico fuso. Cristallizzato dall'alcool costituisce prismetti bianchi fusibili a 128°-129° senza decomposizione.

Trovato %   N 9,72.
Per $C_{12}H_{11}O_4N_2Cl$ calc. %: 9,91.

È insolubile in acqua; molto solubile a caldo e pochissimo a freddo in alcool; discretamente solubile in etere; solubile a freddo in acetone, benzene, cloroformio; discretamente solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in ligroina.

Trattato con idrossido di sodio al 20 % vi si scioglie lentamente trasformandosi nella gliossima da cui deriva.

Dibenzoilderivato $Cl.C_6H_4.C(:NOCOC_6H_5).C(:NOCOC_6H_5).H$. Si prepara benzoilando con cloruro di benzoile la β-p-clorofenilgliossima sciolta in idrossido di sodio. Cristallizzato dall'alcool costituisce aghetti splendenti fusibili a 159° senza decomposizione.

Trovato %: N 6,67.
Per $C_{22}H_{15}O_4N_2Cl$ calc. %: 6,77.

È poco solubile a caldo e meno a freddo in alcool; poco solubile a freddo in etere; solubile a freddo in acetone, benzene, cloroformio; pochissimo solubile a caldo e quasi insolubile a freddo in ligroina.

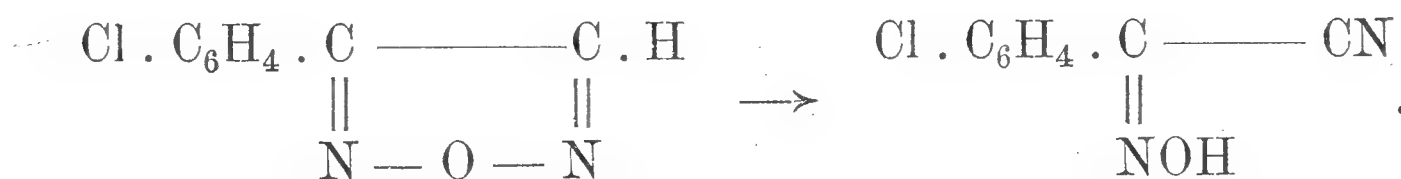
Trattato con idrossido di sodio al 20 % e qualche goccia di alcool, vi si scioglie, trasformandosi nella gliossima da cui deriva.

p-clorofenilfurazano $Cl.C_6H_4.(C_2N_2O).H$. Per ottenerlo conviene acetilare a freddo con anidride acetica la α-p-clorofenilgliossima, versare in acqua il prodotto della reazione e distillare col vapore. Cristallizzato dall'alcool costituisce aghetti bianchissimi di odore caratteristico fusibili a 103°-104° senza decomposizione.

Trovato %: N 15,36.
Per $C_8H_5ON_2Cl$ calc. %: 15,51.

È facilmente volatile col vapore; insolubile in acqua; solubile a freddo in acetone, etere, benzene, cloroformio; solubile a caldo e meno a freddo in alcool e ligroina.

Non è alterato dagli acidi solforico, cloridrico e nitrico concentrati; è invece trasformato dagli idrossidi dei metalli alcalini nell'ossima del cianuro di p-clorobenzoile.

$$\begin{array}{ccc} Cl\,.\,C_6H_4\,.\,C & \text{———} & C\,.\,H \\ \| & & \| \\ N & -\,O\,- & N \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} Cl\,.\,C_6H_4\,.\,C & \text{———} & CN \\ \| & & \\ NOH & & \end{array} .$$

Questa isomerizzazione ha luogo anche per semplice ebollizione con acqua.

Torino – Istituto Chimico della R. Università.
Maggio 1923.

Primo Elenco delle Diatomee fluviali dei dintorni di Torino

Nota del Socio nazionale residente ORESTE MATTIROLO
e di PIERO GIAJ-LEVRA

Le determinazioni delle Diatomee consegnate nella presente Nota, spettanti a me sottoscritto (1), rappresentano i risultati di un lavoro compiuto negli anni giovanili, quando appena laureato in Scienze naturali e in Medicina e Chirurgia ero stato nominato assistente alla Cattedra di Botanica della Università di Torino.

Esse ebbero inizio nell'anno 1881, cioè quarantatrè anni or sono, sotto la guida dell'inglese signor H. Dalton, fabbricante di preparati microscopici, e proseguirono quindi, quando egli, dopo alcuni mesi di soggiorno in Torino, ritornò in patria per dedicarsi alla fabbricazione delle Lampadine elettriche.

La ragione che mi aveva indotto ad occuparmi dello studio delle *Diatomee*, era stata quella di poter dimostrare, come attraverso alle sabbie e agli strati di conglomerato ciottoloso del cono di dejezione del *Sangone* e della *Dora Riparia*, sul quale è situata la Città di Torino, avessero potuto essere trasportate anche le Diatomee alpine.

La questione allora appassionava il pubblico torinese, perchè era in relazione con certi progetti di derivazione di acque per uso cittadino che si andavano studiando.

Le osservazioni del Prof. L. Pagliani avevano dimostrato che i terreni diluviali sui quali sorge la Città di Torino, costituiti da grossolani materiali di trasporto, lasciano passare con facilità le acque di scioglimento delle nevi provenienti dai monti vicini, e che per il veicolo di dette acque si verifica nel suolo di Torino la penetrazione, il trasporto e la diffusione di una

(1) Nell'Elenco sono precedute da un asterisco.

grande quantità di materiali organici varii, i quali procedono sia nel senso verticale, che in quello orizzontale.

La spinta a queste mie ricerche era stata determinata precipuamente dalla osservazione interessante, che io riferisco sulla fede di testimonianze avute dal Prof. PAGLIANI e dall'Ing. QUINTINO CARRERA, che nei pozzi praticati per le fondazioni di alcuni villini costrutti sull'area già occupata dall'antica Piazza d'Armi, precisamente nella località ora occupata dalla Via Assietta ai N[ri] civici 22-24, si ebbe a riscontrare, profondamente nel suolo, una certa quantità di peli, riconosciuti come peli di suini, i quali evidentemente dovevano provenire dal non lontano ammazzatoio civico, dove, prima della fognatura, si erano costrutti ampi pozzi profondi, così detti *perdenti*, analoghi a quelli pure costrutti in quel turno di tempo nelle Carceri nuove (1).

---

(1) A conferma e illustrazione e complemento di queste osservazioni mi pare opportuno citare anche alcuni dati relativi alla composizione delle acque scorrenti nel cono diluviale della Valle di Susa, sul cui frontale è costrutta Torino. Una serie di analisi eseguite nei mesi di marzo e di aprile 1893 dai signori P. FOÀ e B. PORRO progressivamente da monte a valle diedero per i residui fissi i seguenti risultati.

(V. PAGLIANI, *Trattato di Igiene e Sanità pubblica*. Vol. I, pag. 198, Milano, Vallardi. — V. pure ivi, fig. 21, pag. 104 e fig. 28, pag. 115).

	Residuo fisso a 180° in gram.			
Sopra la Città . . .	(1)	0.344	(2)	0.436
Entro „ . . .	(3)	0.412	(4)	0.420
„ „ . . .	(5)	0.444	(6)	0.440
„ „ . . .	(7)	0.466	(8)	0.476
„ „ . . .	(9)	0.476	(10)	0.548
Parte più declive . .	(11)	0.540	(12)	0.584.

L'esame delle acque delle cosidette sorgenti emananti dal cono diluviale ha dato i seguenti risultati per residuo solido a 100° p. 1.

A monte della Barriera della Città (la falda non è passata ancora sotto l'abitato):

Periodo di abbondanza:	gr.	0.394	0.408	0.504.
„ di magra	„	0.382	0.414	0.488.

Entro la Cinta daziaria, da monte a valle (falda che scorre sotto il fabbricato cittadino sempre più denso):

Periodo di abbondanza:	gr.	0.464	0.486	0.508	0.584	0.744.
„ di magra	„	0.452	0.528	0.402	0.520	0.626.

Il massimo di residuo solido si trova nelle acque che scaturiscono dalla

Se questi materiali avevano potuto emigrare per uno spazio di circa *novecento* metri, che tanti separano Via Assietta dall'ammazzatoio, era ovvio pensare che un viaggio assai più lungo avessero potuto compiere, pure rimanendo vitali, le *Diatomee* alpine minutissime, adatte quindi per le loro proprietà morfologiche, per la constatata resistenza vitale, per la adattabilità a vivere nel suolo, a poter essere trasportate a distanza dalle acque attraverso alle anfrattuosità, siano pure assai minute, esistenti nei terreni diluviali formati da grossi elementi ciottolosi, passaggio di acqua che non è ostacolato neppure dagl'interstrati di conglomerato parzialmente cementato, come fu dimostrato da ricerche del Prof. C. F. Parona, e come lo dimostra anche lo intorbidamento delle acque delle risorgive dopo furiosi acquazzoni.

Io pensai allora di osservare se in quelle numerose sorgenti che affiorano lungo la sponda del Po (a sinistra della corrente) presso al Valentino, in vicinanza dell'Orto botanico, che rappresentano appunto l'uscita a giorno dell'ampia falda acquea, la quale in atto scorre profondamente a circa 30 metri, e che per il declivio del terreno affiora a circa 12 metri dalla superficie del suolo sulla riva del Po, potessero essere trascinate le Diatomee alpine e avessero potuto mantenersi viventi nelle acque ivi affioranti.

Intrapresi perciò una serie di osservazioni le quali mi parvero concludenti, perciò che rinvenni in tali acque un certo

---

falda acquea nei punti dove essa ha attraversato la più gran parte del sottosuolo cittadino, ed ha perciò ricevuto la maggiore contaminazione.

Che sieno essenzialmente sali terrosi che acquistano, lo dimostra, oltre le analisi particolareggiate delle stesse acque, il fatto che la loro durezza totale varia rispettivamente per le sorgenti in periodi di abbondanza coi seguenti gradi tedeschi: 19.1 - 19.6 - 22.4 - 22.1 - 22.4 - 22.8 - 23.8 - 27.0 (V. Pagliani, loc. cit.).

Questi risultati concordano esattamente e sono completati da quelli ottenuti da Musso e Ballario che analizzarono le stesse acque del sottosuolo di Torino appartenenti alla falda acquea che dopo aver percorso il sottosuolo sul quale è situato l'abitato della città affiorano nelle sorgenti sulla sinistra del Po, riferentesi al contenuto dell'azoto dei nitriti e dei nitrati (V. Pagliani, loc. cit., pag. 224) e da quelli ancora ottenuti dal Prof. Abba per riguardo alla presenza e alla quantità di germi microbici (V. Pagliani, loc. cit., pag. 229-924).

numero di Diatomee alpine, la presenza delle quali veniva a confermare la mia induzione, non essendo, io credo, possibile altra spiegazione del fatto che avevo constatato, salvo che ammettendo l'emigrazione a ritroso di queste Diatomee dal Po, lungo il ruscello di scarico della sorgente nel fiume.

Fra le specie ivi incontrate posso citare:

Pinnularia borealis Ehr., frequente nelle Alpi, in ispecie nelle Alpi granitiche, nei ruscelli, fra i muschi, nelle Cascate.
Pinnularia lata Rabh., frequente nelle acque delle regioni alpine e sottoalpine.
Diatoma hiemale Heib., abbondante nelle acque alpine.
" " var. *mesodon*, " " " "
Eunotia pectinalis Ktz., comune nelle acque silicee delle Alpi.

Tutte specie che gli Autori concordemente ritengono come specie caratteristiche delle regioni alpine (1).

Dopo avere studiato le Diatomee delle così dette sorgenti del Valentino, estesi le mie ricerche a quelle viventi nel *Sangone,* nella *Dora Riparia* e nel *Po* e nella *Stura di Lanzo.* Sino a che, preso da nuovi ideali, nel 1883 abbandonai lo studio delle Diatomee, dopo aver redatto un catalogo accurato di quelle da me determinate e aver raccolto e preparato copioso materiale nell'intento di studiarlo poi.

L'occasione di valermi di tale materiale mi venne circa trentacinque anni dopo, offerta dal D^r^ Piero Giaj-Levra, appassionato studioso, valente e pazientissimo preparatore di Diatomee.

A lui affidai il mio Catalogo, i preparati (2) e i materiali raccolti e non ancora studiati.

Il D^r^ Giaj-Levra, con lavoro durato parecchi anni, ebbe cura di aggiornare la nomenclatura e la sinonimia da me usata, e si accinse volenteroso allo studio dei miei materiali indeterminati, completando le ricerche ed estendendole alle Diatomee di *Stura*, di *Dora* e a quelle viventi nei rivoli che scendono dalla *Collina di Torino* al *Po.*

---

(1) V. J. Brun, *Diatomées des Alpes et du Jura*, 1880, Genève.

(2) I preparati delle varie Diatomee da me determinate, dove sono individualmente separate le specie in ciascun preparato, si trovano a disposizione degli studiosi, depositati nelle Collezioni del R. Orto botanico di Torino.

La duplice collaborazione ha portato così alla compilazione del presente *Primo Elenco delle Diatomee fluviali dei dintorni di Torino*, che, comunque incompleto, rappresenta un contributo che può già dare un'idea della flora diatomologica della regione, annoverando esso 268 specie.

Ringrazio il mio egregio collaboratore per avermi incoraggiato a rimettere in luce un lavoro al quale avevo atteso con diligenza e costanza, ma che, senza il suo aiuto, non avrei ardito pubblicare riconoscendolo troppo incompleto e manchevole.

Il presente Catalogo a buon diritto viene quindi presentato sotto il nome dei due Autori.

Una certa utilità a questo nostro lavoro sembrami anche essergli accordata da due ordini di considerazioni.

La prima risultante dal fatto che finora nessuno ancora aveva preso in considerazione la flora diatomologica fluviale della regione piemontese, la quale ha pure non lieve importanza per gli studi planctonici.

La seconda emerge dal fatto che alcune Diatomee terricole, come tali considerate dagli studiosi di questioni edafiche, furono da noi rinvenute viventi anche nelle acque fluviali, ciò che dimostra la adattabilità a stazioni differenti di questi organismi.

Infatti abbiamo trovate abbondanti nelle acque fluviali le 5 specie seguenti, che il Muriel Bristol ha elencato fra le 20 *Bacillarieae* terricole, finora note:

Pinnularia borealis Eh. — *Diploneis ovalis* var. *oblongella* Cl.
Navicula Pupula Kutz. — *Hantzchia amphioxis* (Eh.) Grun.
Nitzchia Palea (Kutz.) W. Sm.

Ora che per tante e tante ricerche si è venuta sempre più accentuando l'importanza dell'azione esercitata dagli organismi terricoli, come modificatori delle condizioni edafiche del suolo, e preparatori delle condizioni necessarie alla vita dei vegetali superiori, l'attenzione degli studiosi si è venuta mano mano rivolgendo all'attività di questi organismi terricoli (animali e vegetali) considerandoli sotto il punto di vista del loro significato per l'economia edafica. Fra questi organismi varii, una delle attività maggiori è riconosciuta alle Alghe terricole, delle quali numerose specie, resistenti anche alla essiccazione prolungata, furono incontrate nel suolo, viventi anche a profondità

abbastanza notevoli, sino a 40-50 centim. Fra le Alghe terricole viventi nel suolo dell'Inghilterra, B. MURIEL BRISTOL ha infatti già descritto 24 *Myxophyceae*, 20 *Bacillarieae*, 20 *Clorophyceae*. Mentre il FRANCK riteneva che le Alghe terricole avessero la capacità di fissare direttamente l'azoto atmosferico, molti altri Autori invece, come KOSSOWITSCH, PRINGSHEIM, ESMARCH, ROBBINS, NAKANO, GAUTIER, DROUIN, ecc., riferiscono invece questa funzione all'azione dei *bacterii* terricoli viventi nel suolo; ritenendo però che fra alghe (specialmente *Myxophyceae* e *Clorophyceae*) e i *bacterii* terricoli esista un rapporto simbiotico in conseguenza del quale, anche nei terreni più sabbiosi (silicei) possano formarsi composti azotati per azione dei bacterii, i quali utilizzerebbero i prodotti idrocarbonati elaborati dalle alghe, alle quali concederebbero parte dei materiali azotati dei quali esse hanno necessità.

È così che queste nuove idee, confortate dai risultati ottenuti dagli sperimentatori valentissimi di cui abbiamo ricordati i nomi, accordano oggi allo studio delle Alghe terricole un interesse speciale che deve essere riconosciuto, secondo il nostro parere, non solo alle *Myxophyceae* e alle *Clorophyceae*, ma anche alle *Bacillarieae* che le accompagnano dovunque nel suolo, specialmente quando in esso si verifichino condizioni adatte di umidità.

Queste considerazioni e l'interesse che, per la leggiadria delle forme, rivestono le Diatomee, speriamo varranno presto ad indurre i ricercatori piemontesi a studiarle, sia nel terreno, sia nei torrenti delle elevate regioni delle Alpi, onde completare così la massa di osservazioni sparse che, riassunte, potrebbero concedere una idea complessiva della Flora diatomologica del Piemonte.

Infatti, del Lago d'Orta già si occupò il BONARDI, studiandone le Diatomee. — I molti laghetti intermorenici del Canavese, colla nota competenza, furono studiati da ACHILLE FORTI che illustrò i dragaggi del Dr G. DE AGOSTINI. — La Prof.ssa RITA MONTI, continuando e completando le ricerche di PIETRO PAVESI, ci ha dato numerosi indici di Diatomee proprie dei Laghi alpini dell'alta Valle d'Aosta e delle valli ossolane. — L'Abate CASTRACANE ha studiato le Bacillariali della Valle Intrasca e delle Sorgenti termali di Valdieri.

R. Orto Botanico. - Maggio 1923.

Prof. ORESTE MATTIROLO.

ELENCO delle opere citate con abbreviazione, alle quali si riferiscono le figure indicate per ogni specie e varietà:

A. S. Atl. = SCHMIDT A., *Atlas der Diatomaceenkunde.*
V. H. Tr. Diat. = VAN HEURCK H., *Traité des Diatomées.* Anvers, 1899.
Fr. Meist. = MEISTER FR., *Die Kieselalgen der Schweiz.* Bern, 1912.
Dippel. = DIPPEL L., *Diatomeen d. Rhein-Mainebene.* Braunschw., 1904.

Nel presente Elenco si danno i risultati dell'esame, già iniziato, sino dal 1881, dal Prof. ORESTE MATTIROLO, e poi da me continuato in questi ultimi anni, di materiali raccolti nel Po, nella Dora, nella Stura, nel Sangone, nel Salice, in varie località della Collina di Torino e nelle vasche dell'Orto Botanico di questa R. Università.

Ringrazio qui il Prof. MATTIROLO che ebbe la bontà di permettermi di frequentare per lungo tempo il R. Orto Botanico, del quale potei esaminare la collezione di preparati di Diatomee dei dintorni di Torino e varie opere contenute nella Biblioteca dello stesso Orto Botanico.

Esprimo anche la mia riconoscenza al Rev. Don ANTONIO TONELLI, Professore di Scienze nel Seminario Missioni Estere dei Rev. Padri Salesiani di Torino, che cortesemente mi offrì molti campioni di materiali da Lui raccolti in Val Salice e nella Stura.

Dott. PIERO GIAJ-LEVRA.

Melosira Ag.

* *Melosira varians* Ag. — (A. S. Atl., T. 182, f. 17, 18).
Po, Sangone, Dora, Stura, Vasche Orto Botanico.

* „ *arenaria* Moore. — (Fr. Meist., T. I, f. 2, 3).
Po.

* „ *Roeseana* Rabh. — (Fr. Meist., T. I, f. 4, 5).
Po, Dora.

„ *distans* Ktz. — (A. S. Atl., T. 182, f. 4).
Dora.

„ *italica* Ktz. — (Fr. Meist., T. I, f. 12).
Stagno in Val Salice.

„ „ „ var. *crenulata* Ktz. — (A. S. Atl., T. 181, f. 53, 54).
Stagno in Val Salice.

Cyclotella Ktz.

Cyclotella comta Ktz. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XXII, f. 653).
Po, Dora, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *radiosa* Grun. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XXII, f. 654).
Po, Stura.

„ *Kützingiana* Thw. — (Fr. Meist., T. II, f. 9).
Stura.

„ *Meneghiniana* Ktz. — (Fr. Meist., T. III, f. 5).
Po, Sangone, Stura, Salice.

„ *operculata* Ktz. — (Fr. Meist., T. III, f. 6).
Po, Sangone, Stura.

Meridion Ag.

* *Meridion circulare* Ag. — (Fr. Meist., T. IV, f. 2, 3).
Po, Stura, Salice, Dora, Vasche Orto Botanico.

„ *constrictum* Ralfs. — (Fr. Meist., T. IV, f. 4, 5).
Po, Stura, Salice, Dora, Vasche Orto Botanico.

Tabellaria Ehr.

Tabellaria fenestrata Ktz. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XI, f. 477).
Dora, Stura.
„ *flocculosa* Ktz. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XI, f. 478).
Sangone, Stura.

Denticula Ktz.

Denticula tenuis Ktz. — (Fr. Meist., T. V, f. 4).
Po, Sangone, Stura.
„ *frigida* Ktz. — (Fr. Meist., T. V, f. 5, 6).
Po, Sangone, Stura.

Diatoma D. C.

* *Diatoma vulgare* Bory. — (Fr. Meist., T. V, f. 9).
Po, Dora, Vasche Orto Botanico.
„ „ „ var. *brevis* Grun. — (Fr. Meist., T. V, f. 8).
Stura, Vasche Orto Botanico.
„ „ „ var. *producta* Grun. — (Fr. Meist., T. V, f. 10).
Stura, Vasche Orto Botanico.
„ „ „ var. *capitulata* Grun. — (Fr. Meist., T. V, f. 11).
Po, Vasche Orto Botanico.
„ *grande* W. Sm. var. *Ehrenbergii* (Grun.) Meist. — (Fr. Meist., T. V, f. 12).
Po, Vasche Orto Botanico.
„ *tenue* Ag. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XI, f. 468).
Vasche Orto Botanico.
„ „ „ var. *minus* Grun. — (Fr. Meist., T. V, f. 17).
Vasche Orto Botanico.
* „ *hiemale* Heib. — (Fr. Meist., T. V, f. 21).
Po, Dora, Vasche Orto Botanico.
* „ „ „ var. *mesodon* Grun. — (Fr. Meist., T. V, f. 19, 20).
Po, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

Fragilaria Grun.

Fragilaria crotonensis Kitt. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XI, f. 444).
Vasche Orto Botanico.

„ *virescens* Ralfs. — (Fr. Meist., T. V, f. 26).
Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.

„ *capucina* Desm. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XI, f. 446).
Sangone.

„ „ „ var. *mesolepta* Rabh. — Fr. Meist., T. VI, f. 3).
Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.

„ *construens* Grun. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XI, f. 450).
Stura.

„ „ „ var. *venter* Grun. — (V. H. Tr. Diat., Pl. XI, f. 451).
Stura.

„ *binodis* Ehr. — (Fr. Meist., T. VI, f. 9).
Vasche Orto Botanico.

„ *intermedia* Grun. — (Fr. Meist., T. VI, f. 15).
Po, Sangone, Stura, Salice.

„ *Harrisonii* Grun. — (Fr. Meist., T. VI, f. 16).
Sangone.

Synedra Ehr.

Synedra pulchella Ktz. — (Fr. Meist., T. VI, f. 17).
Po, Sangone, Stura.

„ *Vaucheriae* Ktz. — (Fr. Meist., T. VI, f. 18).
Salice.

* „ *ulna* Ehr. — (V. H. Tr. Diat., Pl. X, f. 409).
Po, Sangone, Dora, Salice, Vasche Orto Botanico, Stura.

* „ „ „ var. *oxyrhynchus* V. H. — (Fr. Meist., T. VI, f. 19).
Po, Sangone, Salice, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *subaequalis* Grun. — (Fr. Meist., T. VII, f. 2).
Po, Sangone, Salice, Stura.

Synedra ulna Ehr. var. *danica* Grun. — (Fr. Meist., T. VII, f. 3)
Po, Stura, Vasche Orto Botanico.

„ *joursacensis* J. Hérib. — (Fr. Meist., T. VII, f. 4).
Po, Sangone.

* „ *acus* Ktz. — (Fr. Meist., T. VI, f. 23).
Po, Sangone, Stura, Dora, Salice, Vasche Orto Botanico.

„ *radians* Ktz. — (Fr. Meist., T. VI, f. 21).
Po, Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.

* „ *capitata* Ehr. — (Fr. Meist., T. VII, f. 6).
Po, Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.

„ *longissima* W. Sm. — (Fr. Meist., T. VIII, f. 1).
Po, Sangone, Salice, Stura, Vasche Orto Botanico.

„ *amphirhynchus* Ehr. — (Fr. Meist., T. VIII, f. 6).
Sangone.

„ *vitrea* Ktz. — (Fr. Meist., T. VIII, f. 5).
Po.

Eunotia Ehr.

Eunotia parallela Ehr. — (Fr. Meist., T. X, f. 4).
Stura.

„ *monodon* Ehr. — (Dippel, f. 284).
Dora, Stura.

„ *diodon* Ehr. — (Fr. Meist., T. X, f. 6).
Po, Stura.

„ *tetraodon* Ehr. — (Fr. Meist., T. X, f. 8).
Dora.

„ *arcus* Ehr. — (Fr. Meist., T. XI, f. 11).
Stura, Collina di Torino.

„ „ „ forma *curta* (Grun.). — (Dippel, f. 278).
Stura.

„ *uncinata* Ehr. — (Fr. Meist., T. XI, f. 16).
Stura.

* „ *pectinalis* Ktz. — (Dippel, f. 268).
Po, Stura.

Eunotia pectinalis Ktz. forma *curta* V. H. — (Dippel, f. 269).
Po, Stura.
„ „ „ var. *media* O. m. — (Fr. Meist., T. XI, f. 3).
Po, Stura.
„ „ „ var. *minor* V. H. — (Dippel, f. 272).
Po, Stura.
„ „ „ var. *stricta*. — (Dippel, f. 273).
Po, Stura.
„ *lunaris* Grun. — (Fr. Meist., T. IX, f. 16).
Stura, Stagno in Val Salice.

Ceratoneis Ehr.

Ceratoneis arcus Ktz. — (Fr. Meist., T. XI, f. 19).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.
„ „ „ var. *amphioxys* Rabh. — (Fr. Meist., T. XI, f. 18).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.
„ „ „ var. *linearis* Holmboe. — (Fr. Meist., T. XI, f. 20).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

Rhoicosphenia Grun.

Rhoicosphenia curvata Grun. — (Fr. Meist., T. XII, f. 1-3).
Po, Salice, Vasche Orto Botanico.

Cocconeis (Ehr.) Cl.

* *Cocconeis placentula* Ehr. — (Fr. Meist., T. XII, f. 4, 5).
Po, Dora, Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.
* „ „ „ var. *lineata* V. H. — (Fr. Meist., T. XII, f. 6, 7).
Po, Dora, Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.

Cocconeis placentula Ehr. var. *euglypta* Cl. — (Fr. Meist., T. XII, f. 8).
Po, Sangone, Stura.

" " " var. *trilineata* Cl. — (Fr. Meist., T. XII, f. 9, 10).
Po, Sangone, Stura.

" *pediculus* Ehr. — (Fr. Meist., T. XII, f. 11, 12).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

Eucocconeis Cl.

Eucocconeis flexella Cl. — (Fr. Meist., T. XII, f. 14, 15).
Sangone, Stura.

Microneis Cl.

Microneis minutissima Cl. — (Fr. Meist., T. XII, f. 19, 20).
Vasche Orto Botanico.

" *microcephala* Cl. — (Fr. Meist., T. XII, f. 23-26).
Po, Sangone.

" *linearis* Cl. — (Fr. Meist., T. XII, f. 27).
Po, Sangone, Salice, Vasche Orto Botanico.

" *exilis* Cl. — (Fr. Meist., T. XIII, f. 1, 2).
Po, Sangone, Salice.

Achnanthidium Heib.

Achnanthidium lanceolatum Bréb. — (Fr. Meist., T. XIII, f. 12, 13).
Po, Sangone, Stura, Salice.

Diploneis (Ehr.) Cl.

* *Diploneis elliptica* Cl. — (Fr. Meist., T. XIV, f. 6).
Po, Sangone, Stura, Salice.

" *ovalis* Cl. var. *pumila* Cl. — (Fr. Meist., T. XIV, f. 9).
Stura.

" " " var. *oblongella* (Näg.) Cl. — (Fr. Meist., T. XIV, f. 10).
Stura, Salice.

Neidium Pfitzer.

* *Neidium amphirhynchus* (Ehr.) Pf. — (Fr. Meist., T. XIV, f. 16).
Po, Stura, Dora.

„ *productum* (W. Sm.) Pf. — (Fr. Meist., T. XIV, f. 19).
Po.

„ *bisulcatum* var. *turgidula* (Lagst.) Meist. — (Fr. Meist., T. XV, f. 1).
Po, Stura.

„ *iridis* Pfitzer. — (Fr. Meist., T. XV, f. 2).
Po, Dora.

„ *affine* (Ehr.) Pf. var. *media* Cl. — (Fr. Meist., T. XV, f. 4).
Po.

„ *amphigomphus* (Ehr.) Pf. — (Fr. Meist. T. XV, f. 6).
Po.

„ *dubium* Pfitzer. — (Fr. Meist., T. XV, f. 7).
Po.

Caloneis Cl.

* *Caloneis amphisbaena* Cl. — (Fr. Meist., T. XV, f. 9).
Po.

„ *Schumanniana* Cl. — (Fr. Meist., T. XVI, f. 7).
Po, Dora.

„ *silicula* (Ehr.) Cl. — (Fr. Meist., T. XVI, f. 10).
Po, Dora, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *major* (Hérib.) Meist. — (Fr. Meist., T. XVI, f. 9).
Po, Sangone, Stura.

„ „ „ Cl. var. *cuneata* Meist. — (Fr. Meist., T. XVI, f. 11).
Po, Sangone, Stura.

„ „ „ var. *inflata* (Grun.) Cl. — (Fr. Meist., T. XVI, f. 12).
Po, Sangone, Stura, Salice.

„ „ „ var. *undulata* (Grun.) Cl. — (Fr. Meist., T. XVI, f. 13).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

Anomoeoneis Pfitzer.

Anomoeoneis sculpta Pfitzer. — (Fr. Meist., T. XVII, f. 8).
Po.

Gyrosigma Hassal (*Pleurosigma* W. Sm.).

* *Gyrosigma attenuatum* Rabh. — (Fr. Meist., T. XVII, f. 13).
Po, Dora, Salice.
„ *acuminatum* Rabh. — (Dippel, f. 184).
Po, Stura.
„ „ „ var. *Brébissonii* (Grun.) Cl. — (Fr. Meist., T. XVIII, f. 2).
Po.
„ *Kützingii* Grun. — (Dippel, f. 188).
Po.
„ *Spenceri* Cl. — (Fr. Meist., T. XVIII, f. 3).
Po.

Frustulia Ag.

Frustulia vulgaris (Thw.) Cl. — (Fr. Meist., T. XVIII, f. 4).
Sangone, Stura, Salice.

Stauroneis Ehr.

Stauroneis phoenicenteron Ehr. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 1).
Po, Dora, Stura.
„ „ „ var. *gracilis* Cl. — (Dippel, f. 174 b, c).
Stagno in Val Salice.
„ „ „ var. *amphilepta* (Ehr.) Cl. — (Fr. Meist., T. XVIII, f. 10).
Po, Stura.
„ *anceps* Ehr. — (Dippel, f. 178 b).
Po, Sangone, Stura, Salice.
„ „ „ var. *amphicephala* (Ktz.) Cl. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 3).
Po, Sangone, Stura.

Stauroneis anceps Ehr. var. *elongata* Cl. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 4).
Po, Sangone, Stura.
„ *Smithii* Grun. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 7).
Po.

Navicula Bory.

Navicula binodis Ehr. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 12).
Po, Sangone.
„ *Rotaeana* Grun. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 13).
Po.
„ *seminulum* Grun. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 19).
Po, Sangone, Stura.
„ *minima* Grun. var. *atomoides* Cl. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 21).
Po, Sangone, Stura.
„ *bacilliformis* Grun. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 23).
Po, Sangone.
„ *pupula* Ktz. — (Fr. Meist., T. XIX, f. 25).
Po, Salice.
„ *bacillum* Ehr. — (Fr. Meist., T. XX, f. 4).
Po, Sangone.
„ „ „ var. *Gregoryana* Grun. — (Fr. Meist., T. XX, f. 3).
Po, Sangone.
„ „ „ var. *major* Hérib. — (Fr. Meist., T. XX, f. 2).
Po, Sangone.
„ *pseudobacillum* Grun. — (Fr. Meist., T. XX, f. 5).
Po, Sangone, Stura.
„ *pusilla* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XX, f. 9).
Po, Sangone.
* „ *cuspidata* Ktz. — (Fr. Meist., T. XX, f. 10).
Po, Sangone, Vasche Orto Botanico.
„ „ „ forma *angusta*. — (Dippel, f. 118).
Vasche Orto Botanico.
„ „ „ forma *craticula*. — (Dippel, f. 122).
Vasche Orto Botanico.

Navicula ambigua Ehr. — (Fr. Meist., T. XX, f. 13).
Po, Sangone.

" *gracilis* Grun. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 1).
Po, Vasche Orto Botanico.

" *cryptocephala* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 3).
Po, Sangone.

" " " var. *pumila* Grun. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 5).
Stura.

" " " var. *veneta* (Ktz.) V. H. — (Dippel, f. 87).
Po, Sangone, Stura.

" *rhynchocephala* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 9).
Po, Sangone, Vasche Orto Botanico.

" *hungarica* var. *capitata* Cl. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 8).
Po, Stura.

" *viridula* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 10).
Po, Sangone, Stura.

* " *radiosa* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 13).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

" " " var. *acuta* Grun. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 12).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

" *tenella* Bréb. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 14).
Po, Sangone, Stura.

" *Reinhardtii* Grun. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 17, 18).
Po, Sangone, Stura.

" *menisculus* Schum. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 20).
Po, Vasche Orto Botanico.

" *meniscus* Schum. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 19).
Po.

" *tuscula* V. H. — (Fr. Meist., T. XXI, f. 23).
Po, Sangone, Stura.

" *oblonga* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXII, f. 2).
Sangone, Stura, Salice.

" " " var. *lanceolata* Grun.—(Fr. Meist., T. XXI, f. 24).
Sangone, Stura, Salice.

Navicula lanceolata Ktz. — (Fr. Meist., T. XXII, f. 4).
Po, Sangone, Vasche Orto Botanico.
„ *gastrum* Donk. — (Fr. Meist., T. XXII, f. 6).
Po.
„ *placentula* Grun. — (Fr. Meist., T. XXII, f. 8).
Po, Sangone, Dora, Stura.
„ „ „ var. *lanceolata* Grun. — (Fr. Meist., T. XXII, f. 9).
Po, Sangone, Dora, Stura.
„ *anglica* Ralfs. — (Fr. Meist., T. XXII, f. 12).
Po, Sangone.
„ *dicephala* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXII, f. 15).
Po.

Pinnularia Ehr.

* *Pinnularia nobilis* Ehr. — (Fr. Meist., T. XXIII, f. 1).
Po, Sangone, Stagno in Val Salice.
„ *gentilis* Donk. — (Fr. Meist., T. XXIII, f. 2).
Po, Stagno in Val Salice.
* „ *viridis* Ehr. — (V. H. Tr. Diat., Pl. II, f. 70).
Po, Dora, Stura, Stagno in Val Salice.
„ „ „ var. *commutata* (Grun.) Cl. — (V. H. Tr. Diat., Pl. II, f. 71).
Po, Stura, Stagno in Val Salice.
„ *dactylus* Ehr. — (Fr. Meist., T. XXIV, f. 4).
Po, Stura, Stagno in Val Salice.
„ *major* Rabh. — (V. H. Tr. Diat., Pl. II, f. 69).
Po, Sangone, Stura, Stagno in Val Salice.
„ „ „ var. *convergens* Meist. — (Fr. Meist., T. XXVI, f. 1).
Stura.
„ *nodosa* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXVI, f. 3).
Stagno in Val Salice.
„ *parva* Greg. — (Fr. Meist., T. XXVI, f. 6).
Salice, Stura.
„ *brevicostata* Cl. — (A. S. Atl., T. XLIII, f. 26, 27).
Stagno in Val Salice.

* *Pinnularia alpina* W. Sm. — (A. S. Atl., T. XLV, f. 1-4).
Po.
„ *lata* (Bréb.) Rabh. — (Fr. Meist., T. XXVI, f. 11).
Po.
„ *borealis* Ehr. — (Fr. Meist., T. XXVII, f. 3).
Po, Stagno in Val Salice.
„ *legumen* Ehr. — (Fr. Meist., T. XXVII, f. 4).
Po, Stura.
„ *stauroptera* Rabh. (Grun.). — (V. H. Tr. Diat., Pl. II, f. 85).
Po.
„ *divergens* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXVII, f. 7).
Po.
„ *Brébissonii* Rabh. — (Fr. Meist., T. XXVII, f. 9).
Po, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.
* „ *mesolepta* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXVIII, f. 4).
Po.
„ „ „ var. *stauroneiformis* Cl. — (Fr. Meist., T. XXVIII, f. 5).
Stura.
„ *tabellaria* Ehr. — (V. H. Tr. Diat., Pl. II, f. 87).
Dora.
* „ *interrupta* W. Sm. var. *biceps* Cl. — (Fr. Meist., T. XXVIII, f. 8).
Po, Dora, Stura.
„ „ „ var. *stauroneiformis* Cl. — (Fr. Meist., T. XXVIII, f. 9).
Po, Stura.
„ *appendiculata* Cl. — (Fr. Meist., T. XXVIII, f. 12).
Po.

Gomphonema Ag.

Gomphonema constrictum Ehr. — (Fr. Meist., T. XXVIII, f. 15).
Po, Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.
* „ *capitatum* Ehr. — (Fr. Meist., T. XXVIII, f. 16).
Po, Dora, Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.

Gomphonema angustatum Grun. — (Fr. Meist., T. XXVIII, f. 19).
Sangone, Stura, Salice.

„ „ „ var. *subaequale* Grun.—(Fr. Meist., T. XXVIII, f. 21).
Sangone, Stura, Salice.

„ *intricatum* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXIX, f. 1).
Stura, Salice.

„ „ „ var. *dichotoma* Grun. — (Dippel, f. 219).
Stura, Salice.

„ *gracile* Ehr. — (Dippel, f. 213).
Sangone, Stura, Salice.

„ „ „ var. *dichotoma* V. H. —(Dippel, f. 214).
Stura.

* „ *acuminatum* Ehr. — (Dippel, f. 201).
Dora, Stura, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *coronata* Grun. — (Dippel, f. 202).
Dora, Stura.

„ „ „ var. *trigonocephala* Grun. — (Dippel, f. 206).
Sassi, Stagno in Val Salice.

„ „ „ var. *Brébissonii* Grun. — (Dippel, f. 205).
Salice.

„ *subclavatum* Cl. — (Fr. Meist., T. XXIX, f. 9).
Sangone, Stura, Salice.

„ *augur* Ehr. — (Fr. Meist., T. XXIX, f. 5).
Salice.

„ *parvulum* Grun. — (Fr. Meist., T. XXIX, f. 11).
Sangone, Stura, Salice.

„ *olivaceum* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXIX, f. 14).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

Cymbella Ag.

Cymbella tumida V. H. — (Fr. Meist., T. XXIX, f. 18).
Po, Sangone, Stura, Vasche Orto Botanico.

Cymbella cistula Kirchn. — (Dippel, f. 242).
Po, Sangone, Stura.

„ *gastroides* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXX, f. 3).
Po, Sangone, Stura, Stagno in Val Salice, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *truncata* Rabh. — (Dippel, f. 238).
Po, Sangone, Stura, Salice.

„ *helvetica* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXIX, f. 22).
Po, Sangone, Salice.

„ „ „ var. *curta* Cl. — (Fr. Meist., T. XXX, f. 4).
Po, Sangone.

* „ *lanceolata* Ehr. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 1).
Po, Dora.

„ *maculata* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 3).
Po, Sangone, Salice.

„ *cymbiformis* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 4).
Po, Sangone, Salice.

„ *parva* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 7).
Po, Sangone.

„ *affinis* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 8).
Po, Sangone, Stura.

„ *delicatula* Ktz. — (Dippel, f. 234).
Sangone.

„ *naviculaeformis* Auersw. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 12).
Po, Sangone, Stura.

„ *amphicephala* Naeg. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 14).
Po, Sangone, Stura.

„ *cuspidata* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 18).
Po, Sangone, Stura.

„ *Ehrenbergii* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXII, f. 1).
Po, Sangone.

„ „ „ var. *delecta* Cl. — (Fr. Meist., T. XXXI, f. 19).
Po, Sangone.

„ *aequalis* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXXII, f. 7).
Po, Sangone.

„ *pusilla* Grun. — (Dippel, f. 232).
Po, Dora, Stura.

„ *leptoceras* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXII, f. 10).
Sangone, Stura.

* *Cymbella prostrata* Cl. — (Fr. Meist., T. XXXII, f. 12).
Po, Dora, Salice, Stura, Vasche Orto Botanico.

* „ *turgida* Greg. — (Fr. Meist., T. XXXII, f. 13).
Po, Stura, Vasche Orto Botanico.

„ *ventricosa* Ktz. — (Dippel, f. 246).
Po, Stura, Sangone, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *Auerswaldii* Meist. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 1).
Po, Sangone, Stura.

„ „ „ var. *ovata* Cl. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 3).
Po.

„ „ „ var. *lunula* Meist. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 4).
Po, Sangone, Stura.

„ *gracilis* Cl. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 5).
Po, Stura.

Amphora Ehr.

* *Amphora ovalis* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 9).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *perlonga* Meist. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 8).
Po, Sangone, Stura.

„ „ „ var. *gracilis* V. H. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 10).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *libyca* Cl. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 11).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *pediculus* V. H. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 12).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

Amphora perpusilla Grun. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 13).
Po, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

Epithemia Bréb.

Epithemia Hyndmannii W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXXIV, f. 1).
Po, Dora, Stagno in Val Salice.

* „ *turgida* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 17).
Po, Dora, Vasche Orto Botanico, Stagno in Val Salice.

„ „ „ var. *granulata* Brun. — (Dippel, f. 256).
Po, Dora, Vasche Orto Botanico, Stagno in Val Salice.

„ „ „ var. *Westermannii* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 18).
Vasche Orto Botanico.

„ *sorex* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXIII, f. 20).
Dora, Collina di Torino.

* „ *argus* Ktz. — (Fr. Meist., T. XXXIV, f. 3, 4).
Po, Collina di Torino, Sassi.

„ *zebra* Ktz. var. *proboscidea* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXV, f. 5).
Vasche Orto Botanico.

Rhopalodia O. M.

Rhopalodia gibba O. M. — (Fr. Meist., T. XXXV, f. 6).
Po.

„ *ventricosa* O. M. — (Fr. Meist., T. XXXV, f. 8).
Po.

Hantzschia Grun.

* *Hantzschia amphioxys* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXVI, f. 2).
Po, Stura, Salice.

„ „ „ var. *pusilla* Dippel. — (Fr. Meist., T. XXXVI, f. 1).
Salice.

Hantzschia amphioxys Grun. var. *major* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXVI, f. 4).
Po, Stura, Salice (Dippel, f. 293).

Nitzschia Grun.

Nitzschia angustata Grun. — (Fr. Meist., T. XXXVI, f. 7).
Po, Stura.

" " " var. *constricta* Meist. — (Fr. Meist., T. XXXVI, f. 9).
Po, Stura.

" *dubia* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXXVII, f. 1).
Po.

" *sinuata* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXVI, f. 12).
Sangone.

" *tabellaria* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXVI, f. 13).
Sangone, Vasche Orto Botanico.

* " *dissipata* Grun. *media* Grun. — (Dippel, f. 315).
Dora.

* " *sigmoidea* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXXVII, f. 6).
Po, Dora, Stura.

" *lamprocampa* Hantz. — (Fr. Meist., T. XXXVII, f. 7, 8).
Po.

" *linearis* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXXVIII, f. 4).
Po, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

" " " var. *tenuis* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXVIII, f. 5).
Po, Stura, Salice.

" *recta* Hantzsch. — (Fr. Meist., T. XXXVIII, f. 6).
Po, Stura, Salice.

" *Heufleriana* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXVIII, f. 8).
Po, Stura.

" *palea* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXXVIII, f. 9).
Po, Sangone, Salice, Vasche Orto Botanico.

" *frustulum* Grun. — (Dippel, f. 338).
Salice, Po.

" *perpusilla* Rabh. — (Dippel, f. 339).
Salice.

Cymatopleura W. Sm.

* *Cymatopleura solea* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XXXIX, f. 2).
Po, Dora, Sangone, Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.

* „ „ „ var. *regula* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXVIII, f. 16).
Po, Dora, Sangone.

„ „ „ var. *crassa* Meist. — (Fr. Meist., T. XXXIX, f. 1).
Po.

„ „ „ var. *gracilis* Grun. — (Fr. Meist., T. XXXIX, f. 3).
Po, Sangone, Salice, Vasche Orto Botanico.

„ „ „ var. *elongata* Meist. — (Fr. Meist., T. XXXIX, f. 4).
Po, Sangone.

* „ *elliptica* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XL, f. 2).
Po, Sangone, Stura.

* „ „ „ forma *minor*. — (Dippel, f. 349).
Po, Sangone, Stura.

„ „ „ var. *ovata* Grun. — (Fr. Meist., T. XL, f. 4, 5).
Po, Sangone.

Surirella Turpin.

* *Surirella biseriata* Bréb. — (Dippel, f. 352).
Po, Dora.

* „ „ „ var. *media* Dippel. — (Dippel, f. 353).
Po, Dora.

* „ *linearis* W. Sm. — (Fr. Meist., T. XLI, f. 3).
Po.

* „ *Capronii* Bréb. — (Fr. Meist., T. XLV, f. 2).
Po.

* „ *robusta* Ehr. — (Dippel, f. 357).
Po.

Surirella robusta Ehr. forma *minor* — (Dippel, f. 358).
Po.
* „ *splendida* Ktz. — (Fr. Meist., T. XLIV, f. 3).
Po.
„ *elegans* Ehr. — (Dippel, f. 362).
Po.
„ *gracilis* Grun. — (Fr. Meist., T. XLI, f. 7).
Po.
„ *angusta* Ktz. — (Fr. Meist., T. XLI, f. 8).
Po, Vasche Orto Botanico.
* „ *ovalis* Bréb. — (Dippel, f. 364).
Po.
„ „ „ var. *ovata* V. H. — (Dippel, f. 366).
Po, Vasche Orto Botanico.
„ „ „ forma *subovata*. — (Dippel, f. 365).
Salice.
„ „ „ var. *minuta* V. H. — (Dippel, f. 368).
Stura, Salice, Vasche Orto Botanico.
* „ *spiralis* Ktz. — (Fr. Meist., T. XLI, f. 2),
Po, Stura.

Campylodiscus Ehr.

* *Campylodiscus noricus* Ehr. var. *costatus* Grun. — (Fr. Meist., T. XLVII, f. 3).
Po, Stura.
„ „ „ var. *hibernicus* Grun. — (Fr. Meist., T. XLVIII, f. 2).
Po, Dora, Stura.

PRINCIPALI OPERE CONSULTATE

PAGLIANI L., *Trattato di Igiene e di Sanità pubblica.* – Vol. I. *Dei Terreni e delle Acque in rapporto colla Igiene e colla Sanità pubblica.* Milano, Vallardi.

MURIEL BRISTOL B., *On the Alga-Flora of some desiccated English Soil an important Factor in Soil Biology.* "Annals of Botany „, vol. XXXIV, january 1920, pp. 35-80.

FRANCK B., *Ueber den experimentellen Nachweis der Assimilation freie Stickstoffs durch erdbodenbewohnende Algen.* " Berich. d. Deut. Bot. Gesell. „, vol. VII, 1889, pp. 34-42.

ID. *Ueber den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse der Assimilation elementaren Stickstoffs durch die Pflanze.* " Ib. „, ib., p. 234.

ID. und OTTO R., *Untersuchungen über Stickstoff-Assimilation in der Pflanze.* " Ib. „, vol. VIII, 1890, p. 331.

KOSSOWITSCH P., *Untersuchungen über die Frage ob die Algen freien Stickstoff fixiren.* " Bot. Zeitung „, 1894, Heft 5, pp. 98-116.

ESMARCH, *Untersuchungen über die Verbreitung der Cyanophyceen auf und in verschiedenen Boden.* Hedwigia, Band IV, Sept. 1914.

NAKANO H., *Untersuchung über die Entwicklung und Ernährungsphysiologie einiger Clorophyceen.* " Journ. of Coll. of Science Imper. University Tokyo „, vol. XI, 1917 (cit. da Murriel).

GAUTIER et DROUIN, *Recherches sur la fixation de l'Azote par le sol et les végétaux.* " Comptes-Rendus „, CVI, 1888, p. 754 et seg.

PRINGSHEIM, *Kulturversuche mit Clorophyllführenden Microorganismen III. Zur Physiologie der Schyzophyceen.* " Cohn's Beiträge zur Biol. der Pflanzen „, XII, pp. 99, 107.

SCHMIDT A., *Atlas der Diatomaceenkunde.*

VAN HEURCK H., *Traité des Diatomées.* Anvers, 1899.

BRUN J., *Diatomées des Alpes et du Jura.* Genève, 1880.

MEISTER FR., *Die Kieselalgen der Schweiz.* Bern, 1912.

DIPPEL L., *Diatomeen der Rhein-Mainebene.* Braunschweig, 1904.

v. SCHÖNFELDT H., *Bacillariales* (*Diatomeae*) [" Die Susswasser. Flora Deutschlands, Oesterreichs, und der Schweiz „, herausgegeben von A. Pascher. Heft 10]. Jena, 1913.

Pubblicazioni che si riferiscono alla Flora Diatomologica del Piemonte
(recente e fossile)

ACCOMAZZO P., *Il plancton nel Lago di Candia.* " Natura „, Riv. di Scienze Naturali. Vol. VI, fasc. ag.-dicembre. Milano, 1915.

BONARDI E., *Diatomee del Lago d'Orta.* " Bullett. Scientif. „, Pavia, 1885, N. 1. Notarisia, 1886, p. 60.

ID. *Sulle Diatomee di alcuni Laghi italiani.* " Bullett. Scientif. „, Anno X, N. 2, Pavia, 1888.

CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI, *Saggio sulla Flora diatomacea delle cosidette Muffe delle Terme di Valdieri.* Notarisia III, 1888, N. 9, pp. 384-386.

ID. *Catalogo di Diatomee raccolte in Valle Intrasca.* " Comm. Soc. Critt. „, 1865, fasc. II.

CLERICI E., *Diatomee della farina calcarea raccolta presso il Lago di Avigliana.* " Bullett. Soc. Geol. ital. „, vol. XXVI (1907), fasc. II.

DE TONI e LEVI, *Censimento delle Diatomee italiche.* Notarisia, luglio-ott. 1886, Venezia.

FORTI A., *Contribuzioni diatomologiche* (vol. VI). " Atti del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti „, Anno 1900-901, Tom. XL, Parte II, p. 783.

ID. *Contribuzioni diatomologiche.* - XIII. *Le Diatomee fossili di Marmorito.*

ID. *Alghe. Lo stato attuale delle conoscenze sulla vegetazione dell'Italia e proposte, ecc.* " Atti della Società italiana per il Progresso delle Scienze „, ottobre 1908, p. 71.

MONTI RINA, *Physiologische Beobachtungen an den Alpenseen zwischen dem Vigezzo und der Onsernonenthal 1904.* " Plöner. Berichte „, 1905.

ID. *Le condizioni fisico-biologiche dei Laghi Ossolani e Valdostani in rapporto alla piscicultura.* - R. Istituto Lombardo. - Memoria letta il 26 marzo 1903.

ID. *Recherches sur quelques Lacs du Massif du Ruitor.* " Annales de Biologie lacustre „, Tom. I, 1906, Bruxelles.

ID. *I protisti delle Risaie.* " Rendic. del R. Istituto Lombardo „, 1899.

PADOVANI, *Il " Plancton „ del fiume Po. - Contributo allo studio del " Plancton „ fluviale.* " Zoologisch. Anzeig. „, Vol. XXX, VII, N. 5, febbr. 1911.

PARONA CORRADO, *Prime ricerche intorno ai protisti del Lago d'Orta, con cenni della loro corologia italiana.* " Bullett. Scientif. „, Anno II, Pavia, 1880.

Su le proprietà elettriche e termiche dello Jodio

Nota I del Socio nazion. resid. A. POCHETTINO
e di G. FULCHERIS

Esiste una grande incertezza sui valori da attribuire alla conducibilità elettrica dello Jodio puro sia allo stato solido che allo stato liquido, e sul genere stesso di questa conducibilità: e cioè se essa sia metallica, elettrolitica o del tipo cosidetto variabile, ossia quello che, pur crescendo con la temperatura, non è accompagnato dal verificarsi di f. e. m. di polarizzazione al contatto con gli elettrodi.

Se si lasciano da parte le ricerche di Gay-Lussac e di Solly (1) che considerano lo Jodio come un isolante, quelle di Inglis e di Knox (2) che invece concludono essere lo Jodio, per quanto in minima misura, conduttore, e infine le ricerche di Beetz (3), il quale crede di poter affermare che le traccie di conducibilità, osservate dall'Inglis e da lui stesso, sono dovute alle impurità contenute nello Jodio esaminato, il primo ad assegnare un valore determinato della conducibilità dello Jodio puro è Exner (4). Questi, usando elettrodi di Platino, trova che alla temperatura di 17° lo Jodio presenta una resistività di $1{,}7.10^7$ Ohm $^{cm}/_{cm^2}$, che questa resistività diminuisce enormemente quando lo Jodio passa allo stato liquido, e che, in questo stato, detta resistività diminuisce al crescere della temperatura, scendendo da $8{,}1.10^3$, alla temperatura di 110° ad un valore

(1) " Pogg. Ann. ", *37*, pag. 420, 1836.
(2) " Phil. Mag. ", *9*, pag. 450.
(3) " Pogg. Ann. ", *92*, pag. 456, 1854.
(4) " Wien. Ber. ", *84*, pag. 511, 1881.

di $4{,}6.10^3$ Ohm $^{cm}/_{cm^2}$ alla temperatura di 166°; l'Exner non si pronuncia su la natura della conducibilità osservata.

In un lavoro alquanto posteriore il Walden (1), studiando la conducibilità delle soluzioni di Jodio nel Cloruro di Solforile, giunge alla conclusione che lo Jodio, in quelle soluzioni, si comporta come un elettrolita dissociato secondo lo schema:

$$2J_2 \rightleftarrows 3J^{\cdot} + J'''.$$

Poco appresso G. N. Lewis e P. Wheeler (2) constatano che le soluzioni di Joduro di Potassio nello Jodio fuso conducono la corrente così bene come le corrispondenti soluzioni acquose e, di conseguenza, attribuiscono allo Jodio un forte potere dissociante. Trovano inoltre, usando recipienti di quarzo fuso ed elettrodi di Platino iridiato, che lo Jodio puro allo stato solido ha una conduttività di 3.10^{-5} circa (cioè una resistività di 3.10^{+4} Ohm $^{cm}/_{cm^2}$, valore quindi molto lontano da quello trovato da Exner); non si pronunciano sul tipo di questa conduttività, ma notano che questa diminuisce col permanere dello Jodio nel recipiente di quarzo a contatto con gli elettrodi di platino iridiato, senza riuscire a decidere se questo fenomeno sia dovuto ad un cambiamento molecolare dello Jodio, alla scomparsa graduale di vapor d'acqua o di altre impurità incorporate nella sublimazione, od infine all'assorbimento di impurità dal recipiente.

Il lavoro più recente sull'argomento è quello di von Hasslinger (3), il quale studia il comportamento dello Jodio, fuso in recipienti di quarzo fra elettrodi di carbone, e poi lasciato solidificare. Egli trova che a 20° lo Jodio presenta traccie di conducibilità, che la sua resistività si mantiene costante tra i 40° e i 110°, intorno ad un valore di 3.10^6 Ohm $^{cm}/_{cm^2}$; questa resistività diminuisce bruscamente quando lo Jodio passa allo stato liquido: a 120° assume un valore di $2{,}7.10^5$ Ohm $^{cm}/_{cm^2}$, che diminuisce poi lentamente con il crescere ulteriore della temperatura. Von Hasslinger constata inoltre che il passaggio della corrente (anche con un'intensità di qualche milliampère)

---

(1) " Zeit. f. Phys. Chemie ", *43*, pag. 415, 1903.
(2) " Zeit. f. Phys. Chemie ", *56*, pag. 179, 1906.
(3) " Wien. Ber. ", *115*, pag. 1532, 1906.

attraverso lo Jodio allo stato liquido non dà luogo a traccie di f. e. m. secondarie; nello Jodio allo stato solido invece, alla interruzione della corrente primaria, si ha una corrente secondaria nettissima che il von Hasslinger ritiene di natura termoelettrica provocata dall'effetto Peltier ai contatti carbone-jodio.

Noteremo infine che le soluzioni di Jodio in diversi solventi organici presentano [1] una notevole conducibilità elettrica, specialmente le soluzioni in Nitrobenzolo [2] che hanno una conducibilità dell'ordine di quella delle soluzioni elettroliche più conduttrici.

Fra i valori assegnati alla resistività dello Jodio da Exner, da Lewis e Wheeler, e da von Hasslinger si notano delle differenze così forti che non possono attribuirsi che o ad un differente grado di purezza dello Jodio usato o a qualche notevole causa d'errore inerente ai procedimenti seguìti. Questa potrebbe esser dovuta in primo luogo al fatto che nei dispositivi usati dagli sperimentatori su ricordati lo Jodio viene a trovarsi per lungo tempo entro recipienti di vetro o di quarzo nei quali è stato fuso e non appare sia stata presa alcuna precauzione per preservarlo dal contatto con l'umidità dell'aria; in secondo luogo al fatto che gli elettrodi si introducono quando lo Jodio si trova allo stato di fusione, e poichè esso si contrae sensibilmente solidificandosi, il contatto con gli elettrodi non può essere garantito in modo costantemente riproducibile.

Per poter quindi stabilire qualcosa di sicuro riguardo al comportamento elettrico dello Jodio, dopo ripetuti tentativi intesi ad ottenere contatti sicuri e riproducibili, abbiamo seguìto il metodo di Streintz delle polveri compresse. Lo Jodio purissimo, tetrasublimato, gentilmente favoritoci dal Prof. Ponzio, direttore dell'Istituto Chimico della R. Università di Torino, veniva compresso, mediante una grossa pressa a bilanciere, entro forme cilindriche di acciaio rivestite internamente di mica. I cilindretti di Jodio compresso apparivano compattissimi, di aspetto metallico; la loro densità, calcolata dal loro peso e dalle loro dimensioni geometriche, risultò essere in media 4,7, in buon accordo dunque con il valore 4,66 riportato nel *Recueil*

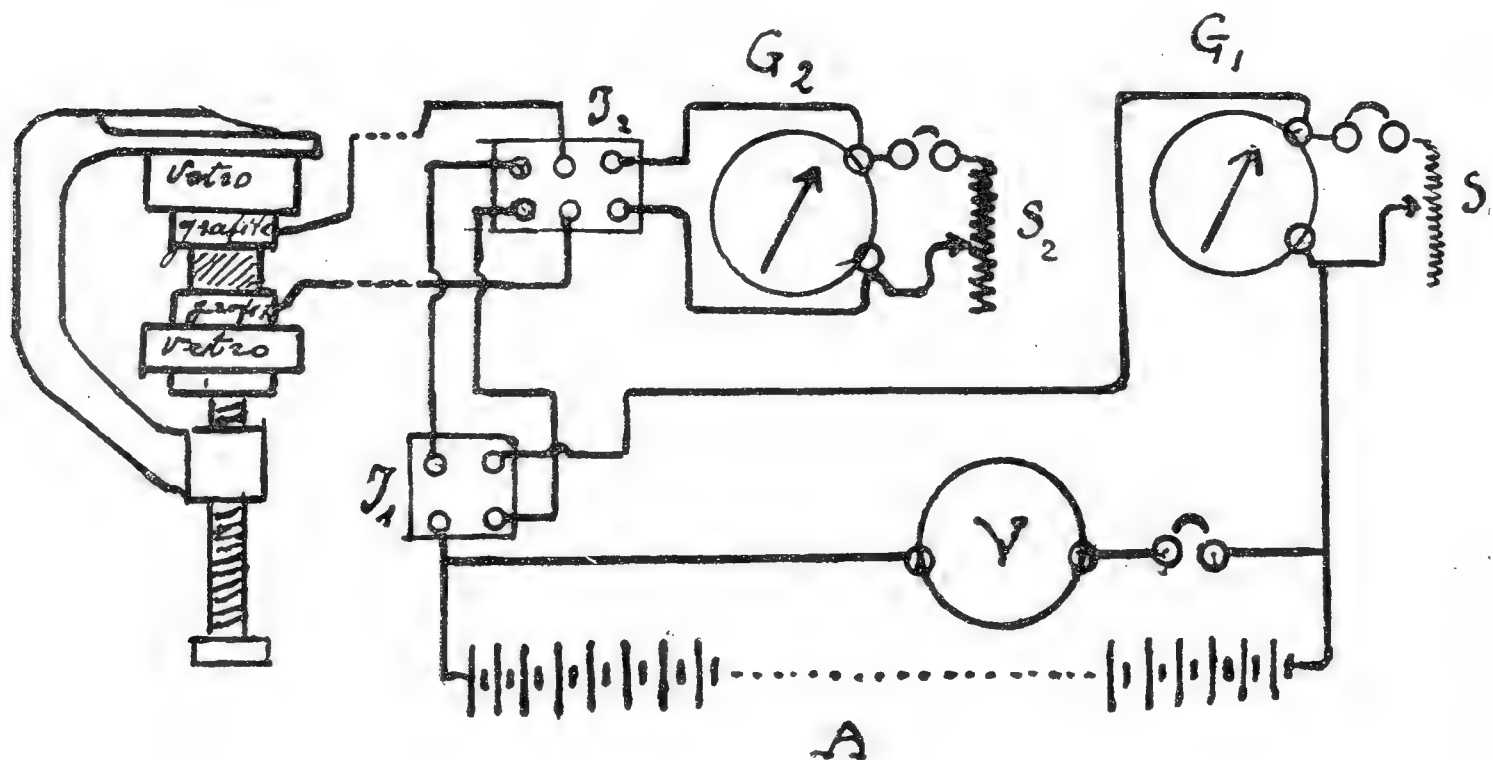
---

(1) " Journ. of Phys. Chem. „, *9*, pag. 641.

(2) " Proc. Chem. Soc. „, *18*, pag. 69; " Journ. Chem. Soc. „, *81*, pag. 524.

de Constantes Physiques per il 1913 della Società Francese di Fisica. Ogni cilindretto veniva accuratamente e uniformemente limato su tutta la sua superficie esterna con una lastrina di vetro foggiata a coltello onde eliminare lo strato superficiale eventualmente inquinato per il contatto con la mica. Tutti i cilindretti venivano poi conservati in un essicatore ad acido solforico e, durante la loro preparazione, si usavano tutte le possibili precauzioni per impedire contatti anche di breve durata con sostanze che con lo Jodio potessero dare una qualche reazione.

I risultati di diverse esperienze istituite per scegliere il materiale più conveniente con cui formare gli elettrodi ci indussero a preferire la grafite semidura come quella con cui si fanno le spazzole per le dinamo. La resistenza a Jodio era dunque formata così: il cilindretto di Jodio descritto era compreso fra due cilindri di grafite di ugual diametro, portanti i morsetti di attacco; il contatto fra il cilindro centrale e i due laterali veniva stabilito e mantenuto costante per mezzo di un morsetto a vite, dal quale il sistema era isolato elettricamente mediante due lastrine di vetro dello spessore di alcuni mm. Si potè constatare che, qualunque fosse la durata e l'intensità della corrente attraversante il preparato, nessuna alterazione presentavano le superfici di contatto dello Jodio e della grafite. Per tutta la durata delle misure la resistenza a Jodio veniva sottratta all'azione del vapor acqueo dell'atmosfera tenendola in un essicatore ad acido solforico.

Il circuito adottato per le misure è rappresentato dal seguente schema:

Per mezzo del galvanometro G_1 (tipo Déprez-D'Arsonval, resistenza: 10.000 Ohm, sensibilità: $6{,}3.10^{-10}$ ampères), munito dello shunt S_1, si misurava l'intensità della corrente che passava nello Jodio applicando la f. e. m. fornita dalla batteria A di accumulatori. Con il galvanometro G_2 (identico al primo), munito anch'esso di uno shunt, si poteva vedere se in seguito al passaggio della corrente si producessero nella resistenza a Jodio delle correnti secondarie. Con il commutatore I_1 si poteva inviare nello Jodio la corrente nei due sensi senza invertirla nel galvanometro G_1; con il commutatore I_2 si poteva escludere lo Jodio dal circuito primario e chiuderlo in corto circuito sul galvanometro G_2; infine un voltometro V permetteva di determinare la f. e. m. inserita nel circuito. Nell'essicatore, contenente il preparato di Jodio, e con il bulbo vicinissimo a questo, si poteva disporre un buon termometro a decimi di grado; l'essicatore stesso veniva poi immerso in grande recipiente contenente dell'acqua della quale si poteva far variare la temperatura a piacere.

Della completa sicurezza, riproducibilità ed inalterabilità dei contatti abbiamo avuto una prova dal fatto che, determinando la resistenza di un cilindretto di Jodio a parecchie riprese, a distanza di tre mesi, abbiamo ottenuti, operando nelle stesse condizioni di temperatura, dei risultati molto ben concordanti.

Alla chiusura del circuito si osserva al galvanometro una intensità di corrente che appare costante per un certo tempo e poi lentamente diminuisce; interrompendo la corrente primaria e chiudendo la resistenza a Jodio in corto circuito sul galvanometro G si nota in questo una piccola deviazione indicante una corrente secondaria, di senso contrario alla primaria, che lentamente diminuisce; ciò avviene naturalmente qualunque sia la direzione della corrente primaria. Questa piccola corrente secondaria deve indubbiamente interpretarsi come corrente termoelettrica dovuta al diverso riscaldamento dei due contatti Jodio-grafite provocato dall'effetto Peltier nel passaggio della corrente primaria. Le ragioni di questa nostra affermazione si vedranno meglio quando esporremo i risultati delle nostre misure sul potere termoelettrico e sull'effetto Peltier della coppia Jodio-grafite. Ad ogni modo la presenza di questa corrente se-

condaria, sia pure molto debole, ci obbligò a prendere qualche precauzione nel determinare l'intensità della corrente primaria cercando che questa determinazione potesse compiersi nel più breve tempo possibile.

I risultati delle nostre misure sono raccolti nella tabella seguente ove θ è la temperatura, *V* la f. e. m. applicata e σ la resistenza specifica calcolata:

θ	*V*	σ	θ	*V*	σ	θ	*V*	σ
4°,1	120	$113,2.10^8$	9°,2	40	$59,6.10^8$	31°,0	125	$4,3.10^8$
4 ,3	567	110,7 „	14 ,5	40	30,9 „	31 ,1	250	4,3 „
4 ,9	487	107,5 „	14 ,5	120	30,9 „	32 ,5	41	3,3 „
5 ,0	367	106,7 „	17 ,3	123	19,0 „	34 ,8	41	2,9 „
5 ,1	245	107,1 „	18 ,3	123	16,8 „	35 ,0	125	2,9 „
5 ,3	120	101,9 „	20 ,9	126	10,7 „	37 ,7	128	1,5 „
6 ,0	120	94,3 „	21 ,1	252	10,4 „	38 ,0	85	1,5 „
6 ,1	245	95,4 „	21 ,1	252	10,4 „	38 ,2	43	1,5 „
7 ,0	245	85,2 „	24 ,0	124	8,6 „	41 ,5	285	1,1 „
7 ,8	245	74,4 „	27 ,3	42	6,1 „	42 ,0	42	1,1 „
8 ,2	120	67,7 „	27 ,4	82	6,0 „	42 ,7	126	1,1 „
9 ,2	40	60,4 „	27 ,4	125	6,0 „			

Questi numeri vennero calcolati dalle misure compiute su di un cilindretto di Jodio del diametro medio di cm. 1,601, lungo cm. 0,752 e della densità 4,7. Per dare un'idea della attendibilità dei numeri ottenuti, riferiamo qui per esempio due dati calcolati con le misure effettuate su un altro cilindretto del diametro di cm. 0,525, lungo cm. 0,863, della densità 4,72:

θ	*V*	σ
24°,9	100	$8,5.10^8$
21°	126	$10,3.10^8$

notando che le misure corrispondenti a queste due determinazioni vennero eseguite a tre mesi di distanza una dall'altra, rimontando ogni volta il cilindretto di Jodio fra gli elettrodi di grafite nel morsetto a vite. La concordanza con i valori ottenuti con l'altro cilindro ci sembra più che sufficiente per ritenere degni di fiducia i numeri raccolti nella precedente tabella.

L'andamento di σ con la temperatura può essere sufficientemente bene rappresentato con una formola esponenziale $\sigma_\theta = \sigma_0 e^{-a\theta}$ del tipo dunque di quelle che vennero trovate convenienti per alcuni conduttori cosidetti variabili. Ponendo $a = 0,126$ si ottengono le seguenti serie di valori calcolati ai quali poniamo di fianco per confronto i corrispondenti valori osservati:

θ	val. calc.	val. osserv.
0°	191,5.10⁸	—
4 ,1	114,3 „	113,2.10⁸
5 ,0	102,0 „	106,7 „
6 ,0	92,1 „	94,3 „
9 ,2	60,1 „	60,4 „
17 ,3	21,7 „	19,0 „
21 ,1	13,4 „	10,4 „
27 ,4	6,1 „	6,0 „
35 ,0	2,3 „	2,9 „
38 ,0	1,6 „	1,5 „
42 ,0	0,97 „	1,1 „

Dall'esame dei risultati ottenuti si può dedurre che, poichè la resistività dello Jodio solido è indipendente dalla f. e. m. applicata, poichè non si riscontrano agli elettrodi alterazioni di sorta qualunque sia la durata e l'intensità della corrente attraversando lo Jodio, e poichè d'altra parte la resistività stessa diminuisce con il crescere della temperatura, lo Jodio puro allo stato solido deve essere considerato, secondo la definizione di Koenigsberger (1), come un conduttore " variabile ". I valori da noi ottenuti per la resistività sono alquanto superiori a quelli trovati dagli altri sperimentatori; secondo noi questa differenza dipende dalla maggiore purezza dello Jodio (tetrasublimato) da noi adoperato; tanto vero che la resistività di un campione di Jodio semplicemente bisublimato venne da noi trovata essere di $8,5.10^6$ alla temperatura di 40°, valore non molto lontano da quello trovato da von Hasslinger alla stessa temperatura.

---

(1) Graetz L., *Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus.* Vol. III, pag. 661, 1920.

Fissato il valore della resistività elettrica siamo passati a determinare la conducibilità termica interna dello Jodio allo stato solido, costante che, per quanto ci risulta, non venne finora mai determinato. Il metodo da noi seguìto è quello dei dischi, proposto da Lees [1]. Si abbiano tre dischi di metallo buon conduttore termico (ottone nel nostro caso) posti uno sopra l'altro e con le superfici esterne verniciate uniformemente in nero; fra quello superiore e quello mediano si pone una spirale piatta di filo di argentana isolato elettricamente dai dischi adiacenti e riscaldabile mediante una corrente elettrica; fra quello mediano e l'inferiore si pone invece un disco di ugual diametro della sostanza in esame. Se indichiamo con v_1, v_2, v_3 gli eccessi, a stato stazionario raggiunto, delle temperature rispettivamente dei dischi mediano, inferiore e superiore su quella I dell'ambiente; se chiamiamo s_1, s_2, s_3 le superfici emettenti di quelli ed s la superficie emettente del disco in esame, e supponiamo che l'eccesso della temperatura di questo su quella dell'ambiente sia uguale alla media fra v_1 e v_2, avremo che la quantità di calore H fornita dalla spirale riscaldante in un secondo è uguale a:

$$H = h s_1 v_1 + h s \frac{v_1 + v_2}{2} + h s_2 v_2 + h s_3 v_3$$

se con h indichiamo la conducibilità superficiale del sistema. D'altra parte H è noto dalla relazione $H = 0{,}239 . i^2 r$, dove i è la intensità della corrente che circola nella spirale riscaldante ed r la resistenza della spirale stessa; quindi si può calcolare h dalla formola:

$$h = \frac{H}{s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 + s \frac{v_1 + v_2}{2}} .$$

Il flusso di calore attraverso il disco in esame è:

$$Q = k A \frac{v_1 - v_2}{d}$$

dove k è la conducibilità termica della sostanza, A l'area attraverso la quale avviene il flusso e d lo spessore del disco.

---

(1) " Phil. Mag. „ (5), *41*, pag. 495, 1866.

Quella quantità Q può essere posta uguale alla media della quantità di calore che fluisce dal disco mediano e quella che esce dal disco inferiore; ma il flusso che passa dal disco mediano al disco della sostanza in esame è uguale a quello che passa dalla sostanza nel disco mediano e questo alla sua volta è uguale al flusso emesso dal disco inferiore, quindi:

$$k A \frac{v_1 - v_2}{d} = \frac{1}{2} \left\{ h s \frac{v_1 + v_2}{2} + h s_2 v_2 + h s_2 v_2 \right\} = h s \frac{v_1 + v_2}{4} + h s_2 v_2$$

da cui si ricava:

$$k = \frac{h d \left(s \frac{v_1 + v_2}{4} \right) + s_2 v_2}{A (v_1 - v_2)} .$$

La determinazione di $v_1 \, v_2 \, v_3$ veniva fatta mediante tre coppie termoelettriche: la prima, che dava v_1, era a nichel-rame ed aveva una saldatura nel disco mediano e l'altra in un bagno di acqua alla temperatura ambiente, in cui era posto un termometro campione diviso in decimi di grado. Una seconda coppia a ferro-rame, con una saldatura nel disco mediano ed una nel disco inferiore, dava la differenza di temperatura fra i due dischi suddetti; finalmente una terza coppia, a ferro-rame, aveva una saldatura nel disco mediano ed una nel disco superiore. La sensibilità delle tre coppie e dei galvanometri inseriti nei loro circuiti permetteva di determinare le differenze di temperatura $v_1 \, v_2 \, v_3$ fino al decimo di grado.

Applicando le formole (1) e (2) ad un disco di grafite (da membrana microfonica) e tenendo conto che:

$s_1 =$ cm² 10,18	$v_1 = 34°73$	$I = 14°,2$	$d =$ cm. 0,05
$s_2 =$ „ 16,92	$v_2 = 30°66$	$A =$ cm² 7,21	$r = 27{,}15$ Ohm
$s_3 =$ „ 17,40	$v_3 = 11°93$	$s =$ „ 0,476	$i =$ 0,41 ampère

si ottenne, essendo:

$$H = 0{,}239 \times 27{,}15 \times \overline{0{,}41}^2 \times 1'' = 1{,}09 \text{ piccole calorie}$$

$h = 0{,}0009954$, da cui si ricava:

$$K = 0{,}000893 \text{ per la grafite.}$$

Se si racchiude il disco di Jodio da studiare fra due dischi di grafite identici (per evitare il contatto fra Jodio ed ottone) a quello di cui si è determinata la conducibilità termica con la misura precedente, la conducibilità termica dello Jodio K sarà data dalla formola:

$$K' = \frac{d'}{\frac{d''}{K''} - \frac{2d}{K}}$$

dove K è la conducibilità termica della grafite, d' lo spessore del disco di Jodio, $d'' = d' + 2d$ lo spessore di tutto l'insieme dei tre dischi, K'' la conducibilità termica di questo insieme.

I risultati delle diverse esperienze compiute su un disco di Jodio del diametro medio di cm. 3,00 e dello spessore di cm. 0,27 sono i seguenti:

1) Temperatura ambiente: 15°,5; $v_1 = 10°,29$; $v_2 = 7°,56$; $v_3 = 6°,35$; $i = 0,15$ amp.; $H = 0,146$ picc. cal.; $h = 0,000390$; $K'' = 0,001076$.

$K' = 0,001163$ (in corrispond. ad una temper. media di 24°,4).

2) Temperatura ambiente: 15°,5; $v_1 = 16,56$; $v_2 = 11°,5$; $v_3 = 10°,03$; $i = 0,2$ amp.; $H = 0,2537$ picc. cal.; $h = 0,0004424$; $K'' = 0,001005$.

$K' = 0,001055$ (in corrispond. ad una temper. media di 29°,53).

3) Temperatura ambiente: 15°,3; $v_1 = 23°,96$; $v_2 = 15°,88$; $v_3 = 13°,8$; $i = 0,25$ amp.; $H = 0,4055$ picc. cal.; $h = 0,0004931$; $K'' = 0,0009723$.

$K' = 0,001006$ (in corrispond. ad una temper. media di 35°,42).

4) Temperatura ambiente: 15°,2; $v_1 = 33°,49$; $v_2 = 21°,83$; $v_3 = 20°,09$; $i = 0,3$ amp.; $H = 0,6115$ picc. cal.; $h = 0,0005287$; $K'' = 0,0009943$.

$K' = 0,001038$ (in corrispond. ad una temper. media di 42°,86).

Riassumendo i valori della conducibilità termica dello Jodio puro, allo stato solido, oscillano fra 0,001006 e 0,001163 con un valor medio di 0,001065, sensibilmente costante nell'intervallo di temperatura 24°,4-42°,86.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona – Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LVIII, DISP. **15a, 1922-1923**

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1923

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Giugno 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. CORRADO SEGRE
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci NACCARI, PEANO, FOÀ, GUIDI, SOMIGLIANA, PANETTI, SACCO, MAJORANA, HERLITZKA, ZAMBONINI e il Segretario MATTIROLO.

Scusa la sua assenza il Socio PARONA.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, il quale risulta approvato senza osservazioni.

Assistono alcuni amici, colleghi e ammiratori del compianto Socio CIAMICIAN.

Il Presidente, prima di passare agli argomenti segnati nell'ordine del giorno, dà la parola al Socio ZAMBONINI per la commemorazione del Socio corrispondente Prof. Giacomo CIAMICIAN.

Con sentimento di affettuosa devozione e con brillante magistero di lingua, il Socio ZAMBONINI, dopo aver ricordati per sommi capi i momenti più importanti della vita dell'insigne chimico italiano, ne analizza le magistrali ricerche assurgendo a considerazioni d'indole generale, le quali lumeggiano la genialità dell'ingegno di Giacomo CIAMICIAN, la cui influenza sullo sviluppo e sul progresso odierno della Chimica è universalmente riconosciuta.

La bella, dotta, sintetica biografia, degna dell'illustre commemorato, che ha messo in evidenza non solo i meriti scientifici eccezionali del Ciamician, ma che ne ha giustamente esaltate la candidezza dell'animo e la italianità del sentimento, è vivamente applaudita dai Soci e dal pubblico presente, è accolta per la stampa negli *Atti*, mentre l'Autore riceve le congratulazioni del Presidente.

Si procede quindi allo svolgimento dell'ordine del giorno, e il Presidente dà comunicazione di due ordini del giorno: il primo della *Società Italiana di Scienze Naturali*, sedente in Milano; e l'altro della *Società Italiana di Scienze Fisiche e Matematiche " Mathesis "*, Sezione di Pavia.

I due *ordini del giorno* hanno riguardo al futuro nuovo ordinamento dell'insegnamento scientifico nelle Scuole medie e al pericolo che la minacciata depressione della coltura scientifica si ripercuota sulle fortune avvenire del Paese.

L'Accademia, dopo discussione alla quale prendono parte diversi Soci e dopo una serie di comunicazioni d'ordine privato fatte dal Socio Foà, delibera di associarsi all'ordine del giorno della *Società italiana di Scienze Naturali*, dando incarico alla Presidenza di segnalare la deliberazione dell'Accademia a S. E. il Ministro e alla Presidenza della Società Italiana.

Si passa quindi alla presentazione di omaggi.

Il Socio Guidi presenta e fa dono di una sua Nota dal titolo: *Sulle Dighe a volte multiple.*

Il Socio Sacco fa omaggio di tre suoi lavori, rispettivamente intitolati:

1° *Il glacialismo nel Gruppo del Gran Paradiso.*

2° *Come si formò il Cervino.*

3° *Les révolutions du Globe.*

e ne discorre brevemente.

I Soci Somigliana e Sacco fanno dono del fascicolo 5° del " Bollettino del Comitato glaciologico.

Il Socio Foà presenta i fascicoli VIII e IX del *Trattato di Anatomia patologica* che contengono lavori di Volpino, Fontana, San Giorgio, Ravenna e Almagià. La continuazione dell'importante *Trattato* è svolta con la consueta eleganza di tipi e di illustrazioni originali,

Finalmente dal Prof. Kiesow viene presentato e donato alla Biblioteca Accademica il 2° volume dell' "Archivio italiano di psicologia „.

Il Presidente in nome dell'Accademia ringrazia i singoli donatori.

Il Socio Somigliana interpella l'Accademia in merito alla condotta che egli dovrà tenere in seno al Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico, per rispondere, nelle attuali condizioni del Politecnico, al mandato conferitogli dall'Accademia.

L'interpellanza provoca una discussione animata, la quale si risolve nella dichiarazione di piena ed ampia fiducia che l'Accademia rinnova al Socio Somigliana, onde, per il vantaggio della Scienza, voglia continuare ad assolvere il suo mandato.

Dopodichè il Presidente, ricordando che questa è l'ultima adunanza della Classe, prima del periodo estivo, saluta i Soci presenti augurando loro buone vacanze.

LETTURE

COMMEMORAZIONE

del Socio Corrispondente

GIACOMO CIAMICIAN

Letta dal Socio nazionale residente FERRUCCIO ZAMBONINI

Quando, negli ultimi giorni di dicembre del 1921, si diffuse per l'Italia la notizia tristissima che Giacomo Ciamician giaceva morente in quell'Istituto di Chimica Generale di Bologna che egli aveva reso giustamente famoso fra gli studiosi, grazie all'opera sua indefessa e geniale di oltre un trentennio, sincero e profondo fu il sentimento di dolore e di accoramento che si manifestò non soltanto nella ristretta cerchia dei chimici, ma presso quanti, in Italia, si interessano della cultura, e sentono anche il valore morale elevatissimo, di esempio e di incitamento, che esercita una vita tutta dedicata alla ricerca scientifica ed alla Patria, con una austerità ed un disinteresse veramente rari. Fervido fu l'augurio, che, ancora per lunghi anni, fosse conservato all'Italia il cittadino ricco delle più egregie virtù, lo scienziato eminente, il Maestro che con lena infaticata aveva istruito diverse generazioni di giovani chimici, molti dei quali, divenuti valenti, onoravano la scuola dalla quale provenivano. Ma il desiderio ardente non valse a mutare il fato inesorabile: il 2 gennaio 1922 Giacomo Ciamician si abbandonava al sonno senza risveglio, proprio quando dell'opera sua e del suo esempio più vivo era sentito il bisogno. Unanime fu il compianto per l'uomo illustre e benemerito: il popolo intiero di Bologna circondò la sua bara, come già, pochi mesi innanzi, quella di un altro illustre studioso: Augusto Righi. Ed il cordoglio popolare per la scomparsa di quei due studiosi insigni, dimostra che anche

gli umili lavoratori sanno ammirare la luce ideale che emana dagli indagatori geniali dei misteri della Natura, che hanno dedicato la loro vita a quella che un illustre chimico-fisico, Jean Perrin, chiamava, venti anni or sono, la dea dei tempi futuri: la pura e splendente verità.

La vita esteriore di Giacomo Ciamician è trascorsa semplice e piana. Nato a Trieste il 25 agosto 1857, frequentò le scuole medie nella città natale, studiò all'Università di Vienna, e si laureò a Giessen nel 1880. Benchè la famiglia del Ciamician fosse di origine armena, in quella mirabile fucina di italianità indomabile, resistente ugualmente alla forza ed alle blandizie, che è Trieste, il giovane Ciamician era e si sentiva profondamente italiano. E rinunciando all'avvenire brillante che gli si apriva dinanzi in Austria, egli alla patria legale preferì senza esitazione quella del cuore, e venne in Roma, in quella scuola di Stanislao Cannizzaro, dalla quale, come Egli stesso scrisse in una mirabile commemorazione del Maestro, pochi anni dopo, nel 1887, uscì trasformato, per andare ad occupare la cattedra di Padova. Nel 1889 passò a Bologna, dove rimase fino alla morte, fedele all'antica e storica Università. Nel Laboratorio modesto, ristretto ed incomodo di Bologna svolse la parte migliore dell'opera sua, e fece sorgere una scuola, che presto acquistò una meritata fama, anche fuori d'Italia, nuovo esempio ammonitore che non gli edifici grandiosi, nei quali, pur troppo, anche da noi lo Stato ha profuso milioni, ma i mezzi per le ricerche ed i Direttori tutti presi da un amore esclusivo, entusiastico e riflessivo al tempo istesso, per la Scienza, sono necessari per il progresso degli studî.

Giacomo Ciamician fu un ingegno acuto e brillante, pronto a scendere all'esame dei più minuti dettagli, ma anche eminentemente versatile, desideroso degli sguardi d'insieme e delle sintesi geniali. Anche sotto questo punto di vista, il Ciamician merita di essere proposto ad esempio ai giovani, ai quali troppo spesso si impone una specializzazione precoce, che li induce ad approfondire le loro conoscenze in un'unica direzione, perdendo ogni contatto con i problemi affini, così come un viandante che si inoltra per un viottolo fiancheggiato da alte mura vede la via che gli si para dinanzi, se alza gli occhi un lembo di cielo,

ma nulla più: ignote gli rimangono le vaste distese che si svolgono al di là dei muri che limitano il suo sentiero!

Così, benchè Ciamician abbia iniziato il suo lavoro di investigatore nel campo della Chimica organica intorno al 1880, quando, cioè, ancora avevano un largo credito, se pure non più un predominio assoluto, quelle tendenze che facevano consistere la Chimica nella preparazione pura e semplice di nuovi composti, senza importanza nè teorica, nè pratica, che servivano soltanto ad aumentare il volume dei grandi trattati (il Ciamician li chiamò, scherzosamente sì, ma giustamente, i composti che si trovano soltanto nel Beilstein), non pensò minimamente a seguire il comune andazzo, ma rivolse la sua attenzione a sostanze che hanno una parte notevole nel mondo animale o vegetale, ed inoltrandosi sempre più su tale via feconda, nell'ultimo ventennio della sua vita operosa abbandonò gli studî speciali su particolari composti, per quanto importanti, per dedicarsi alle ricerche, così attraenti, sull'azione chimica della luce, ed a quelle, troncate dalla morte, sulla Chimica delle piante.

Veramente poderose sono le ricerche di Ciamician sul pirrolo, continuate con infaticato ardore per oltre un decennio, dal 1879 al 1890. Già nel 1870 Adolfo von Baeyer aveva proposto, per quel curioso costituente dell'olio animale del Dippel, una formula di struttura, accettata ancora oggi, ma che rappresentava, più che la sintesi di un complesso di fatti e di esperienze, il frutto di una intuizione geniale. Del pirrolo, infatti, allora si sapeva pochissimo. Ciamician ha precisato in modo mirabile il carattere chimico di quel composto, discutendone, con chiarezza e profondità di vedute, le relazioni che lo collegano al furfurano, al tiofene, alla piridina, e mettendo in evidenza sia il cosiddetto " carattere aromatico „ del pirrolo, che le analogie di comportamento col fenolo. Non è il caso di entrare, qui, nei dettagli dell'opera del Ciamician sul pirrolo: è certo, però, che, con la preparazione e la caratterizzazione precisa di un gran numero di nuovi derivati, egli contribuì assai, come scrisse nella sua monografia riassuntiva che gli valse il Premio Reale dei Lincei per il 1887, a dimostrare ciò che non era che l'espressione di una ipotesi molto abilmente concepita. Inoltre, quei chimici che hanno dimostrato, più tardi, come dei pirroli costituiscano il nucleo centrale della emoglobina e della cloro-

filla, hanno trovato il loro còmpito facilitato assai dai lavori del Ciamician. L'importanza sempre maggiore che va assumendo il pirrolo nella materia vivente assicura all'opera del Ciamician un interesse duraturo da parte dei chimici. Nè va dimenticato che la Scuola del Ciamician, per opera sopratutto di Angeli e di Plancher, ha portato, indipendentemente dal Maestro, contributi notevolissimi alla chimica sia del pirrolo, che dell'indolo. Se italiani, nel 1889, hanno scritto che " per quanto concerne la struttura chimica del pirrolo e le relazioni che lo collegano al furfurano, al tiofene, alla piridina, ecc., è assai difficile poter discernere la parte di merito che spetta al Ciamician nelle considerazioni, del resto con molta competenza e lucidità esposte ", nel grande trattato di Chimica organica di Meyer e Jacobson si legge: " Il singolare comportamento delle sostanze pirroliche venne posto in luce specialmente da una grande serie di belle ricerche, che dobbiamo al chimico italiano Ciamician ed ai suoi allievi ".

E nel commosso cenno necrologico, pronunciato nella seduta del 16 gennaio 1922 della Società Chimica Tedesca, Paul Jacobson confermava che " a Ciamician ed alla sua Scuola si deve in prima linea, se la chimica del pirrolo appartiene oggi alle provincie meglio studiate e più ricche di movimento della Chimica organica ".

Pur assorbito, in seguito, da altre ricerche, l'interesse del Ciamician per il pirrolo non venne meno, e varie volte tornò ad occuparsene, specialmente per indagare quale influenza i progressi e le nuove vedute della scienza avevano sulla interpretazione dei fatti noti per quel composto.

Diminuiti dapprima, abbandonati, poi, gli studî sperimentali sui pirroli, Ciamician passò ad altre ricerche speciali, non così grandiose come quelle sui pirroli, ma tutte molto interessanti, e che sarebbero bastate da sole ad affermare solidamente la fama di un chimico. Mi limiterò a ricordare gli studî eleganti mediante i quali, con grande semplicità, riuscì a chiarire la vera natura delle cotoine, problema, questo, che era stato assai complicato da altri chimici; le ricerche acute e rigorose sulla struttura dell'apiolo e sulle relazioni che esistono fra l'apiolo, il safrolo ed il metileugenolo; la Memoria, che rimarrà certamente un classico modello di indagine, e che desta, in chi la legge,

un sentimento di profonda ammirazione, sulla costituzione dei principî aromatici dell'essenza di sedano. Ma una menzione tutta particolare meritano le bellissime ricerche sugli alcaloidi del melograno, e, specialmente, sulla pseudopellettierina, grazie alle quali, non solo fu definita perfettamente la struttura di quelle sostanze, ma, prima che il Willstaetter completasse i suoi famosi lavori sulla tropina, il Ciamician potè stabilire le relazioni che passano fra i derivati della pseudopelletierina e quelli della tropina, e precisare che le basi granatiche e quelle tropiniche si trovano nel rapporto di quella particolare specie di omologia, che egli, già prima, aveva chiamato nucleare.

In tutti questi lavori, fedele e valentissimo collaboratore del Ciamician fu Paolo Silber, che aveva già preso parte non piccola agli studî sul pirrolo, e che doveva legare in modo indissolubile il suo nome a quello dell'amico e Maestro nella serie importantissima di ricerche, cominciata nel 1900, intorno all'azione chimica della luce. Veramente, fin da quando era ancora assistente di Cannizzaro, in Roma, Ciamician aveva iniziato delle ricerche su questo argomento, scoprendo l'importante riduzione del chinone a chinidrone in soluzione alcoolica, accompagnata dall'ossidazione dell'alcool ad aldeide.

Le esperienze, iniziate in modo così felice, furono, però, presto abbandonate, per essere riprese soltanto parecchi anni più tardi. L'idea inspiratrice del Ciamician fu quella che " è opera degna di plauso il tentare di far produrre alle piante in maggior copia le sostanze fondamentali „, ed egli volle contribuire ad un tale tentativo, indagando quale azione eserciti la luce su svariate sostanze organiche.

L'opera del Ciamician in questo campo presenta un interesse grandissimo: dal punto di vista puramente teorico, si riterrebbe opportuno, oggi, adoperare non la luce bianca, ma, invece, radiazioni di lunghezza d'onda determinata, e premunirsi maggiormente contro possibili assorbimenti di energia da parte delle soluzioni esposte alla luce. Ma questi eventuali completamenti non infirmano il valore intrinseco dell'opera del nostro chimico, che ebbe a superare, insieme al suo collaboratore ammirevole, il Silber, delle difficoltà sperimentali gravissime, ma ebbe la gioia di ottenere risultati ai quali rimane legato il suo nome. Del resto, quale sia il valore che i competenti veri annettono alle

ricerche sulle azioni chimiche della luce di Ciamician e Silber risulta dal trattato fondamentale di uno specialista, come il Plotnikov, il quale, nelle notizie storiche sui progressi della fotochimica negli ultimi 25 anni, contraddistingue come una pietra miliare l'anno 1900, oltre che per altri motivi, anche perchè in quell'anno " gli scienziati italiani Ciamician e Silber hanno cominciato i loro lavori importanti sulla fotosintesi organica ". Ed altrove lo stesso Plotnikov scrive: " Noi dobbiamo il numeroso materiale sperimentale sulle fotosintesi in prima linea agli studiosi italiani Ciamician e Silber ".

Non è possibile ricordare, in questi fugaci cenni, i singoli risultati ottenuti da Ciamician e Silber: basterà far presente che il nostro investigatore, insieme al suo collaboratore, ha ottenuto, mediante la luce, fenomeni di riduzione e di ossidazione, polimerizzazioni, trasposizioni stereochimiche, fenomeni di idrolisi con rottura della catena in varî chetoni, sintesi importantissime. Fra i fatti più notevoli accertati, mi limiterò a menzionare l'interessantissimo passaggio dalla ortonitrobenzaldeide ad acido ortonitrosobenzoico, che, come ha giustamente osservato il Bruni, portò alla scoperta di un caso nuovo di soluzioni solide soprasature e labili; la trasformazione dell'acido maleico in fumarico, che sembra condurre ad un vero e proprio equilibrio; la polimerizzazione dell'acido cinnamico ad acido α-trussillico, quella dello stilbene, che raddoppia la sua molecola, e della benzaldeide; l'idrolisi dei chetoni in presenza di acqua, con formazione di un acido e di un idrocarburo (per esempio di metano e di acido acetico dall'acetone), idrolisi che nei chetoni ciclici determina l'apertura della catena, la quale, però, non si rompe; le sintesi di varî pinaconi per riduzione dei chetoni aromatici a spese di alcooli; la condensazione dell'acetone con l'alcool metilico per formare il glicole isobutilenico e con se stesso, formando, allora, l'acetonilacetone; le sintesi con l'acido cianidrico.

La carriera scientifica di Giacomo Ciamician si è chiusa con le belle ed attraenti ricerche sulla chimica delle piante, nelle quali egli ebbe a collaboratore assiduo il prof. Ravenna. Giovanetto, il Ciamician si era occupato di ricerche di biologia marina, nel laboratorio del Claus e nella stazione zoologica della sua Trieste con tanto successo, da descrivere anche una nuova

specie di celenterato: il vivo interesse per la biologia, che in Lui non venne mai meno, lo condusse, sul finir della vita, a degli studî di chimica biologica, nei quali non soltanto ricorse ad una tecnica ben diversa da quella delle ordinarie manipolazioni chimiche, quale la inoculazione nelle piante di svariate sostanze, la determinazione della resistenza che quelle sostanze oppongono all'ossidazione enzimatica delle piante, l'influenza che esercitano sullo sviluppo delle piantine di fagioli, ecc., ma, quasi presago della sua prossima fine, lasciò libero campo alle concezioni filosofiche e naturalistiche, che costituivano il frutto delle meditazioni di tutta la sua vita. Nel discorso pronunciato a Trieste *Sul significato biologico degli alcaloidi nelle piante* , i concetti fondamentali che hanno guidato il nostro chimico sono esposti con ammirabile chiarezza, e riuniti in un complesso armonico e attraente. Non sappiamo quante delle ardite idee del Ciamician rimarranno integre nel patrimonio scientifico dell'umanità: non vi è dubbio, però, che esse rappresentano un incitamento possente a nuove indagini, alle quali hanno segnato la via con osservazioni precise e profonde della più alta importanza.

Ciamician è partito dal concetto che le piante, per la loro stessa costituzione, hanno bisogno di più svariati stimoli chimici degli animali, e che esse vivono per processi chimici assai più di questi ultimi. Contrariamente all'opinione da molti accolta tuttora, le sostanze accessorie, e segnatamente gli alcaloidi, non sarebbero delle sostanze di rifiuto, ma costituirebbero addirittura gli ormoni vegetali.

Cominciò con l'occuparsi dei glucosidi, e stabilì il fatto molto importante, che, inoculando ad una pianta un principio aromatico estraneo, che per essa è velenoso, la pianta dà origine ad un glucoside, che normalmente non si trova in essa. Se, invece, si inocula un glucoside, si rinvengono nella pianta, oltre al glucoside inalterato, anche i suoi prodotti di scissione, e, precisamente, pare che si raggiunga un vero equilibrio. Passando, poi, ad occuparsi degli alcaloidi e di svariate altre sostanze, il Ciamician dimostrò che le piante sanno liberarsi perfettamente, sia con l'ossidazione fino all'acido formico ed al carbonico (assimilando, però, quest'ultimo nelle foglie), sia mediante la traspirazione, di sostanze estranee dannose od inutili inoculate nelle piante stesse. Così, inoculando nel mais il tartrato

di nicotina, questo alcaloide sfugge in parte attraverso le foglie insieme al vapor d'acqua, ma le piante di tabacco, cimentate in modo analogo, non emettono la loro nicotina, prova questa, secondo il Ciamician, che se esse la producono e la conservano nel loro organismo, ciò significa che la sua presenza corrisponde ad una determinata funzione, e che " le piante sanno preservare anche dall'ossidazione quelle sostanze di cui hanno bisogno ".

Studiando l'azione sullo sviluppo di piantine di fagioli di molti composti, il Ciamician è stato condotto ad enunciare la regola che " in molti casi, la presenza di radicali alcoolici (metili, etili o propili) o di radicali acidi (acetile, benzoile ed altri più complessi) esalta l'azione delle sostanze fondamentali che li contengono ".

Esalta, si è detto, non determina, ed invero il Ciamician ha mostrato che, quando la sostanza fondamentale è innocua o normalmente presente nelle piante, l'introduzione di radicali alcoolici od acidi non dà luogo a derivati tossici. Sembra, così, possibile, il poter dedurre dall'azione del derivato quella del composto fondamentale.

Ma il nostro chimico si è spinto ancora più innanzi, cercando di indagare per quale ragione le piante da composti più semplici, formano derivati più complessi, con radicali alcoolici od acidi, che possono rendere nettamente tossiche sostanze per se stesse poco dannose. Con apposite esperienze, il Ciamician ha accertato che, almeno nei casi studiati, i composti più dannosi sono quelli che meglio resistono all'azione enzimatica delle piante, il che lo ha portato a concludere che la formazione di quei derivati è fatta dalle piante per preservare dall'ossidazione le sostanze delle quali abbisognano, e che l'effetto delle sostanze organiche sulle piante deve stare in qualche relazione con la maggior resistenza che presentano alla eliminazione.

Sono tutte queste, come si vede, delle conclusioni di un interesse affascinante, che richiedono ulteriori studî, dal Ciamician stesso indicati nelle loro grandi linee nel ricordato discorso di Trieste. E noi dobbiamo augurarci che i giovani chimici italiani non abbandonino agli stranieri un campo di ricerche così importante, ma, animati dall'esempio del Maestro scomparso, ne continuino l'opera e la completino.

Benchè rivolto in modo precipuo verso la Chimica organica

e biologica, Giacomo Ciamician si è sempre sentito vivamente attratto dalla Chimica generale e dalla Chimica fisica. Giovinetto ventenne, egli pubblicò uno studio comparativo degli spettri di elementi omologhi, appartenenti ad uno stesso gruppo del sistema periodico di Mendeleev, giungendo alla conclusione che l'omologia delle linee spettrali di elementi analoghi ha, probabilmente, la sua causa nel fatto che gli elementi dei gruppi naturali sono costituiti dai medesimi componenti, e che nello spettroscopio noi abbiamo uno strumento atto a darci delle indicazioni sui moti degli atomi. Conclusioni così eterodosse per un'epoca nella quale l'indivisibilità dell'atomo era un dogma, valsero al giovane autore le critiche del Mendeleev e dell'Ostwald: oggi, però, come ha ben detto il Garbasso, rappresentano una vera anticipazione nella storia della scienza.

La teoria della dissociazione elettrolitica di Arrhenius lo interessò grandemente fin dal suo apparire, e nel 1892 egli pubblicò delle considerazioni assai importanti sul modo col quale l'acqua determina la dissociazione degli acidi energici, delle basi forti e dei sali. Egli ammise che l'acqua, rispetto a questi corpi, non è una materia indifferente, ma che, al contrario, quando le molecole d'acqua circondano in grande numero le molecole saline, come accade nelle soluzioni diluite, esercitano un'azione sugli ioni di queste ultime, fino a rompere il legame fra gli ioni stessi, che vengono ad essere circondati da molecole d'acqua intere. — Idee, queste, nuovissime allora ed originali, nelle quali è anticipata la teoria dei solvati. — Notevole anche, in quel breve lavoro, è la decisione con la quale il Ciamician parla delesistenza di idrati in soluzione, che allora e per parecchi anni dopo ancora, fu generalmente negata.

Nè va dimenticato che l'ampio contributo dato dal Laboratorio di Bologna allo studio teorico e sperimentale delle soluzioni solide è stato iniziato e proseguito per consiglio del Ciamician, il quale ebbe anche ad indicare alcuni degli indirizzi più interessanti da seguire, come, per esempio, quello di stabilire se fra le sostanze capaci di dare soluzioni solide esistono o meno relazioni cristallografiche.

Le ricerche sulla struttura delle sostanze cristalline eccitarono l'interesse vivissimo del Ciamician, il quale, insieme al Padoa, ha pubblicato, nel 1917, delle considerazioni importanti

e suggestive sulla natura dell'affinità chimica e della valenza degli atomi. La conclusione del Ciamician che, in alcuni elementi, la forma dell'atomo nei suoi composti possa variare col tipo di combinazione, è stata sostanzialmente confermata dalle successive ricerche di Bragg sui diametri atomici degli elementi.

A Giacomo Ciamician non mancarono gli onori in vita. Le nostre principali Accademie inscrissero presto il suo nome nei loro albi: il Governo lo chiamò nel 1910 a far parte del Senato. Anche gli Istituti scientifici stranieri gli manifestarono la loro stima. Egli fu, infatti, uno dei pochissimi soci stranieri dell'Accademia delle Scienze di Parigi, e socio onorario delle quattro principali società chimiche straniere: l'americana, la francese, l'inglese e la tedesca. Non solo, ma lo si volle più volte, fuori d'Italia, a parlare dei risultati dei suoi studî. Così, nel 1904, egli tenne un grande discorso alla Società Chimica di Berlino sul pirrolo, nel 1908 uno sulle azioni chimiche della luce a Parigi, alla Società Chimica francese, e nel 1912, al Congresso internazionale di Chimica applicata, riunitosi a New-York, pronunciò uno dei quattro grandi discorsi a sezioni riunite, e svolse, con successo memorabile, il tema attraentissimo *La Fotochimica dell'avvenire.* Il grande chimico Emilio Fischer, poi, lo propose per uno dei premi Nobel per la Chimica, designazione il cui valore non è diminuito dal fatto che l'Accademia di Stoccolma non credette di seguire il parere del più illustre chimico organico allora vivente.

Come italiani, noi dobbiamo essere assai grati a Giacomo Ciamician, che intorno all'opera sua di investigatore geniale seppe riunire tanto splendore di fama, così fervido consenso fuori del nostro Paese. Di quella fama e di quel consenso, infatti, si riflette una parte sulla Italia nostra, che, per merito anche dell'illustre e caro scomparso, appare agli stranieri ancora una volta non soltanto la terra delle glorie passate, ma bensì la patria attuale di elevatissimi valori morali.

E Giacomo Ciamician fu ben degno di far apprezzare il nome d'Italia ovunque brilla una luce di cultura superiore. Egli fu, infatti, un cittadino esemplare ed uno scienziato eminente, esempio di quegli uomini giusti e preclari, esaltati dal grande filosofo a Lui caro, che trovano la consolazione vera e migliore

della loro vita nell'apprendere, sicchè a loro bene si adatta verso del nostro Poeta

Altro diletto che 'mparar non provo.

La sua vita nobilissima fu tutta pervasa da

quel forte palpito inquieto
. . . .
Di quei che acceso alla beltà del vero
Un raggio se ne sente nel pensiero
E ognor lo segue e non lo giunge mai.

Nel volgere tumultuoso dei nostri tempi, la pura bellezza dell'Idea sembra impallidire dinanzi alle imprese che hanno un valore semplicemente materiale. Ingegni vividi si abbandonano loro con ardore, sdegnando quasi ciò che, attraverso alla scienza pura, conduce alle grandi conquiste del pensiero.

Ma Giacomo Ciamician non subì l'influenza del suo tempo, e rimase fedele al proprio ideale. Grande anima latina, sentì profondamente la superiorità dei beni morali, e, fissando il suo sguardo sempre più in alto, si inspirò durante tutta la vita al pensiero ammonitore del nostro Genio più luminoso: “ Non si dimanda ricchezza quella che si può perdere. La virtù è vero nostro bene, ed è vero premio del suo possessore: lei non si può perdere, lei non ci abbandona, se prima la vita non ci lascia „.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSI UNITE

Adunanza del 1° Luglio 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Foà, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Herlitzka, Pochettino;

della Classe di Scienze morali storiche e filologiche: i Soci De Sanctis, Stampini, Brondi, Einaudi, Prato, Pacchioni, Luzio, Mosca, Jannaccone e Vidari, che funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Cian e Schiaparelli.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza delle Classi unite (9 luglio 1922).

Il Socio Luzio, relatore della Commissione per il conferimento del premio Gautieri, legge, dietro invito del Presidente, la sua relazione, che era stata in precedenza comunicata ai Soci. Finita la lettura, il Presidente apre la discussione sulla relazione.

Nessuno prende la parola. Resta inteso che nella prossima seduta di domenica 8 corr., a norma del Regolamento, si voterà sulla proposta della Commissione, che è di dividere il premio per le Scienze storiche fra i signori R. Caggese e A. Comandini.

Si passa al secondo oggetto posto all'Ordine del giorno: Nomina della Commissione per il conferimento del premio Bressa.

Il Socio De Sanctis ricorda che sono da conferire due premii, quello per il quadriennio 1915-1918 e quello per il quadriennio 1919-1922.

Si procede alla votazione in conformità dell'art. 1 del Regolamento interno, e riescono eletti: per la Classe di Scienze fisiche: i Soci Pochettino, Parona e Mattirolo; per quella di Scienze morali: i Soci Einaudi, De Sanctis e Schiaparelli.

Relazione *della Commissione per il premio Gautieri riservato alla Storia* (triennio 1919-1921).

Al premio Gautieri di Storia pel triennio 1919-1921 ha concorso il solo prof. Romolo Caggese dell'Università di Pisa col III volume della sua *Firenze dalla Decadenza di Roma al Risorgimento d'Italia*, col primo della sua monografia su *Roberto d'Angiò*, col secondo degli *Statuti della Repubblica Fiorentina*. Da' soci Pacchioni e Vidari partì la proposta motivata di prendere in considerazione speciale l'*Italia nei Cento anni* di Alfredo Comandini.

Sono dunque due i candidati: apparentemente distanti fra loro per l'epoca che trattano, per l'indirizzo che seguono.

Il Caggese, voltosi ai campi più lontani della storia medioevale e moderna, già tanto dissodati dall'indagine critica italiana e straniera, non ha mancato di apportarvi il suo contributo di dotte, acute ricerche: ma ha mirato sopratutto al còmpito vero di storico nel senso più alto della parola, a dominare e rielaborare i soggetti prescelti con vaste sintesi, in poderosi quadri e vividi ritratti di situazioni e caratteri.

Corrette felicemente le giovanili tendenze che lo facevano indulgere a brillanti generalità, a esagerazioni di fuggevoli mode storiografiche, il Caggese ha saputo affermare, specialmente nel *Roberto d'Angiò*, la capacità del robusto suo ingegno a solide concezioni personali: ha affinato le doti di scrittore, magniloquente, esuberante talvolta, ma sempre signorile, forbito, attraente. A parte qualche secondaria riserva, merita quindi plauso la maturità della fecondissima attività sua, che, promettendo frutti sempre più vigorosi per l'avvenire, dà già ottimi saggi di una armonica fusione dei criteri a cui deve informarsi la rievocazione storica, con adeguato riguardo ai fattori economici e sociali, non meno che ai politici.

In tutt'altre condizioni s'è svolta l'operosità di Alfredo Comandini. Il Risorgimento è ancora troppo a noi vicino perchè lo si possa dire sottratto al malefico influsso di pregiudizi tenaci, di passioni non spente. Tanta parte del materiale storico genuino è tuttora racchiusa negli archivi pubblici e privati; il terreno è ingombro da tutte le male piante della partigianeria e della retorica, che soffocano, deformano la verità.

Una pubblicazione come quella creata, è la vera parola, dal Comandini sarebbe già altamente salutare, se fosse ristretta a pedestre ma precisa compilazione, a sicuro accertamento cronologico de' fatti. Quando si pensi invece che ogni nota di quel secolare Diario fu scrupolosamente vagliata da uno spirito critico spregiudicato, sagace, ardito: che in que' fitti volumi rivivono nella loro reale fisonomia avvenimenti e persone; tutta un'epoca è ricostruita con dati autentici e suggestivi nell'infinita varietà policroma de' suoi elementi costitutivi; allora l'*Italia ne' Cento anni* non è soltanto un istrumento prezioso, indispensabile di lavoro, sì anche una guida sapiente, una maestra di serietà, di rettitudine.

Secondo le buone tradizioni sempre osservate nell'assegnazione de' premi Gautieri, il giudizio investe, oltre i limiti del triennio, tutta la produzione e le complesse attitudini d'un candidato: del Comandini è perciò da ricordare che, mentre apprestava con mezzi esclusivamente suoi, in un trentenne sforzo, questo mirabile repertorio di curiosità, di erudizione, di critica, dava anche prova di saper assorgere dall'analisi frammentaria a libri organici, con pensiero indipendente, ed agile penna avvivatrice. Tali i volumi sulle Cospirazioni di Romagna, su Milano nel '48, sul Principe Napoleone e le Commemorazioni italiche: con le quali e con la spicciola collaborazione a periodici ha contribuito a diffondere una conoscenza più esatta e leale de' fasti del Risorgimento.

Da questo esame dell'opera de' due candidati scaturisce evidente la conclusione: che sarebbe incongruo ed inopportuno istituire una graduatoria di giudizio.

La Commissione concorde propone che il premio *ex aequo*

sia diviso fra entrambi: omaggio del pari dovuto al giovane valoroso, e al veterano provetto, infaticabile. L'Accademia, ne siamo sicuri, coglierà lieta l'occasione di affermare che, senza esclusivismo di scuola, siano sintetici, siano analitici, onora egualmente que' lavori storici, che rechino effettiva utilità agli studi, attestino nobiltà d'intenti, personalità di visione.

Francesco Ruffini, *Presidente*
Gaetano De Sanctis
Giuseppe Prato
Federico Patetta
Alessandro Luzio, *relatore*.

CLASSI UNITE

Adunanza dell'8 Luglio 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci D'Ovidio, Naccari, Segre, Peano, Foà, Guidi, Mattirolo, Grassi, Panetti, che entra a seduta già aperta;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci S. E. Boselli, De Sanctis, Stampini, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Prato, Cian, Pacchioni, Valmaggi, Faggi, Luzio e Vidari, che funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Jannaccone e Sacco.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Presidente apre la votazione per il conferimento del premio Gautieri in base alle proposte della Commissione giudicatrice presentate nella precedente adunanza. Il risultato della votazione è il seguente: votanti 23, 22 sì, una scheda bianca.

Il Presidente proclama vincitori del premio Gautieri per le Scienze storiche i signori R. Caggese e A. Comandini.

Il Presidente invita il Socio Tesoriere Prato a dare all'Accademia il rendiconto finanziario dell'esercizio 1922.

Il Socio Prato legge e illustra con commenti orali le varie voci della parte passiva e dell'attiva del bilancio 1922.

Il Presidente apre la discussione sulla relazione finanziaria; ma nessuno prende la parola, onde egli dichiara approvato il rendiconto dell'esercizio 1922. Viene pure approvato il rendiconto della gestione dei premii per l'esercizio 1922.

Si passa all'esame del Bilancio preventivo 1923. Il Socio Tesoriere illustra largamente tutte le parti del bilancio, segnalando le benemerenze acquistate, per varii titoli, dai Soci Einaudi, Panetti, Guidi.

Il Presidente mette in votazione il bilancio preventivo, che viene approvato. Trae infine argomento dalla relazione Prato per ringraziare dell'opera data agli interessi finanziarii dell'Accademia i Soci Einaudi, Panetti, Guidi, Prato.

Il Presidente rivolge infine un saluto e un augurio di buone ferie accademiche ai Soci, e scioglie l'adunanza.

Gli Accademici Segretari
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari

INDICE
DEL VOLUME LVIII.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Tip. Vincenzo Bona – Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIX, Disp. 1ª, 1923-1924

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1924

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1923-924

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1923 - 18 novembre	1923 - 25 novembre
» - 2 dicembre	» - 9 dicembre
» - 16 »	» - 23 »
» - 30 »	1924 - 13 gennaio
1924 - 20 gennaio	» - 27 »
» - 3 febbraio	» - 10 febbraio
» - 17 »	» - 24 »
» - 2 marzo	» - 9 marzo
» - 16 »	» - 23 »
» - 6 aprile	» - 13 aprile
» - 27 »	» - 8 maggio
» - 15 maggio	» - 22 »
» - 5 giugno	» - 12 giugno
» - 19 »	» - 26 »
» - 2 luglio	» - 9 luglio

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME CINQUANTANOVESIMO

1923-1924

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1924

PRESIDENTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

dalla sua fondazione

ELEZIONE	PRESIDENTI PERPETUI (*)
1783, 25 luglio	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Giuseppe Angelo). Offrì le dimissioni dalla carica e furono accettate (7 settembre 1788) conferendogli il titolo di *Presidente emerito.*
„ „	**La Grange Tournier** (Giuseppe Luigi), *Onorario.*
1788, 30 novembre	**Morozzo di Bianzé** (conte Carlo Lodovico).
1801, 24 gennaio (4 piovoso a. IX)	**Saluzzo** (cittad. Angelo Giuseppe) ex-conte di Monesiglio.
1801, 15 febbraio	Col Regolamento del 26 piovoso anno IX (15 febbr. 1801) essendosi stabilito che l'Accademia Nazionale rinnovata col *Decreto della Commissione esecutiva del Piemonte* del 22 nevoso anno IX (17 gennaio 1801) non avesse più che due presidenti di classe, cessarono queste funzioni del Saluzzo.
1804, 25 febbraio (5 ventoso a. XII)	**Bonaparte** (Napoleone) primo console della Repubblica Francese, *Onorario.*
1815, 25 novembre	**Balbo di Vinadio** (conte Prospero).
1837, 26 „	**Lascaris di Ventimiglia** (marchese Agostino).
1838, 18 „	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Alessandro).
1851, 18 dicembre	**Plana** (barone Giovanni).
1864, 1° maggio	**Sclopis di Salerano** (conte Federigo).

(*) Dal volume *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783-1883).* Torino, 1883, pag. 141.

ELEZIONE	PRESIDENTI TRIENNALI (*)
1879, 9 marzo	**Ricotti** (Ercole).
1882, 12 febbraio	**Ricotti** (Ercole) rieletto.
1883, 6 maggio	**Fabretti** (Ariodante).
1885, 12 aprile	**Genocchi** (Angelo).
1888, 8 „	**Genocchi** (Angelo) rieletto.
1889, 28 „	**Lessona** (Michele) termina il 2° triennio iniziato dal GENOCCHI.
1891, 24 maggio	**Lessona** (Michele).
1894, 24 giugno	**Lessona** (Michele) rieletto, † 20 luglio 1894.
1895, 13 gennaio	**Carle** (Giuseppe).
1898, 9 „	**Carle** (Giuseppe) rieletto.
1901, 13 „	**Cossa** (Alfonso) † 23 ottobre 1902.
1902, 14 dicembre	**D'Ovidio** (Enrico) termina il triennio iniziato dal COSSA.
1904, 21 febbraio	**D'Ovidio** (Enrico).
1907, 17 marzo	**D'Ovidio** (Enrico) rieletto.
1910, 24 aprile	**Boselli** (Paolo).
1913, 18 maggio	**Boselli** (Paolo) rieletto.
1916, 28 „	**Camerano** (Lorenzo) † 22 novembre 1917.
1918, 3 febbraio	**Naccari** (Andrea) continua il triennio iniziato dal CAMERANO.
1919, 27 aprile	**Naccari** (Andrea).
1922, 7 maggio	**Ruffini** (Francesco).

(*) A norma dell'art. 3 dello *Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, approvato con R. Decreto 2 febbraio 1882, il Presidente dura in carica un triennio e può essere rieletto per un altro triennio.

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1923

NB. — *Negli elenchi degli Accademici la prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Ruffini (Francesco), Senatore del Regno, Professore ordinario di diritto ecclesiastico nella R. Università di Torino, Grand' Uff. ❋ e ♔. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

Eletto alla carica il 7 maggio 1922 per il triennio dal 20 aprile 1922 al 19 aprile 1925.

VICE-PRESIDENTE

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Professore ordinario di Geologia nella R. Università di Torino, già Rettore della R. Università. Comm. ❋ e ♔.

Eletto alla carica il 7 maggio 1922 per il triennio dal 20 aprile 1922 al 19 aprile 1925.

TESORIERE

Prato (Giuseppe), Professore ordinario di Economia politica e Scienza delle finanze nel R. Istituto superiore di Studi commerciali di Torino, ♔. — *Via Bertola, 37.*

Rieletto alla carica il 9 luglio 1922 per il triennio dal 1° luglio 1922 al 30 giugno 1925.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Segre (Corrado), Professore ordinario di Geometria superiore nella R. Università di Torino, ✻ e Comm. ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 85.*
Eletto alla carica l'11 aprile 1920 per il triennio dal 9 febbraio 1920 all'8 febbraio 1923.

Segretario

Mattirolo (Oreste), Professore ordinario di Botanica nella R. Università di Torino, ✻ e Comm. ♔. — *Torino, Orto Botanico (al. Valentino).*
Eletto alla carica il 25 giugno 1922 per il triennio dall'11 giugno 1922 al 10 giugno 1925.

ACCADEMICI RESIDENTI

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Professore emerito di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✻ e ♔. — *Torino, Via Sebastiano Valfrè, 14.*
29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), Professore emerito della R. Università di Torino, Comm. ✻ e ♔. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*
5 dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Segre (Corrado), *predetto.*
10 febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Professore ordinario di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, ✻ e Comm. ♔. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*
25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Guidi (Camillo), Professore ordinario di Statica grafica e Scienza delle costruzioni, Uff. ✻, Gr. Uff. ♔. — *Torino, Corso Valentino, 7.*
31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), *predetto.*
15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), *predetto.*
10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica nel R. Politecnico di Torino, Uff. ✻, Comm. ♔. — *Torino, Via Cernaia, 40.*
9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Professore ordinario di Fisica matematica nella R. Università di Torino, Preside della Facoltà di Scienze, Comm. ✻ e ♔. — *Corso Vinzaglio, 75.*
5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Panetti (Modesto), Professore ordinario di meccanica applicata alle macchine e di Costruzioni Aeronautiche nel R. Politecnico di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻ e ♔. — *Via S. Francesco da Paola, 36.*
24 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915. — Pensionato 27 aprile 1919.

Ponzio (Giacomo), Professore ordinario di chimica generale nella R. Università di Torino, ♔. — *Torino, Corso Massimo d'Azeglio, 48.*
10 marzo 1918 – 21 marzo 1918. — Pensionato 28 ottobre 1923.

Sacco (Federico), Prof. ordinario di Geologia applicata nel R. Politecnico, Comm. ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele II, n° 18.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918.

Majorana (Quirino), Professore ordinario di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna, Comm. ✻ e ♔. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918.

Herlitzka (Amedeo), Professore ordinario di Fisiologia nella R. Università di Torino, ♔. — *Torino, Corso Re Umberto, 60.*
25 gennaio 1920 – 19 febbraio 1920.

Pochettino (Alfredo), Professore ordinario di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, ✻ e ♔. — *Torino, Via Giuria, 1.*
25 gennaio 1920 – 19 febbraio 1920.

Zambonini (Ferruccio), Professore ordinario di chimica generale nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Via Mezzocannone A.*
5 marzo 1922 – 30 marzo 1922

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Professore ordinario di Fisica matematica nella R. Univ. di Roma, ☼, ❋, Gr. Cord. ▭, Croce di Guerra. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895.

Bianchi (Luigi), Professore ordinario di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, ☼, ❋, ▭. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Professore Emerito di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Gr. Cord. ❋, Gr. Cord. ▭ Cav. ☼. — *Pavia, Corso Vitt. Eman. 77.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Bertini (Eugenio), Professore emerito della R. Università di Pisa, Uff. ❋, Comm. ▭. — *Pisa, Lungarno Mediceo, 7.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Romualdo), Professore ordinario di Botanica nell'Università di Roma, ☼, Gr. Uff. ▭. — *Roma (3), Via Milano, 41, Istituto Botanico.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Rosa (Daniele), Professore ordinario di Zoologia ed anatomia comparata nella R. Università di Modena, ▭. — *Modena, R. Università.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Levi-Civita (Tullio), Professore ordinario di meccanica razionale nella R. Università di Roma, ☼. — *Roma, Via Sardegna, 50.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Cantone (Michele), Professore ordinario di fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, Comm. ▭. — *Napoli, Istituto fisico, Via A. Tari, 3.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Grassi (Giambattista), Professore di anatomia comparata nella R. Università di Roma, Senatore del Regno,
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Göttingen.
10 gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Thomson (John Joseph), Professore nella Università di Cambridge. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Rutherford (Sir Ernesto), Professore di fisica sperimentale nell'Università di Cambridge.
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Hale (Giorgio), Astronomo. — *Pasadena, Mount Wilson Observatory (California).*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Kamerlingh Onnes (Heike), Professore di fisica nell'Università di Leida.
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Picard (Emilio), Segretario perpetuo per le scienze matematiche dell'Accademia delle Scienze di Parigi. — *Parigi (6), Quai Conti, 25.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Geikie (Arcibaldo), Geologo e Mineralogo. — *Surrey, Sheperd's Down, Haslemere.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Michelson (Alberto), Professore di fisica nell'Università di Chicago. — *Chicago, Kimbark Avenue, 5756.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Lorentz (Enrico), Professore di fisica teoretica nell'Università di Leida. — *Harlem, Juliana straat, 49.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore all'Università di Stoccolma. — 12 gennaio 1896.
Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.
Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.
Berzolari (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — 24 febbr. 1918.
Marcolongo (Roberto), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Pincherle (Salvatore), Professore nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Ricci-Curbastro (Gregorio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
Severi (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Appell (Paul Emile), Professore di meccanica analitica alla Sorbona, Parigi. — 11 giugno 1922.
Borel (Emile), Professore di calcolo delle probabilità e di fisica matematica, Parigi. — Id. id.
Loria (Gino), Professore di geometria superiore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Study (Eduard), Professore di matematiche nell'Università di Bonn. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Edinburg. — 27 maggio 1894.
Cerulli (Vincenzo), Direttore dell' Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.
Boussinesq (Valentino), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — Id. id.
Albenga (Giuseppe), Professore nella R. Università di Bologna. — 24 febbraio 1918.
Colonnetti (Gustavo), Professore nel R. Politecnico di Torino, — Id. id.
Maggi (Gian Antonio), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Mesnager (Agostino), Professore nella Scuola Nazionale dei Ponti e Strade, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 29 dicembre 1918.
Fantoli (Gaudenzio), Professore di idraulica nel R. Istituto tecnico superiore di Milano. — 11 giugno 1922.
Planck (Max), Professore di fisica matematica nell'Università di Berlino. — Id. id.
Prandtl (Ludwig), Professore di meccanica applicata nell'Università di Gottinga. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Garbasso (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze. — 15 maggio 1910.
Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.
Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.
Corbino (Orso Mario), Professore nella R. Università di Roma. — 24 febbraio 1918.
Lombardi (Luigi), Professore nel Politecnico di Roma. — Id. id.
Marconi (Guglielmo), Dottore in scienze, Londra. — Id. id.
Palazzo (Luigi), Direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma. — Id. id.
Rizzo (Giovanni Batt.), Professore di fisica terrestre nella R. Università di Messina. — 11 giugno 1922.
Bragg (W. H.), Professore di fisica nel Collegio Universitario di Londra. — Id. id.
Perrin (Jean), Professore di chimica-fisica alla Sorbona, Parigi. — Id. id.
Laue (Max von), Professore di fisica teoretica nell'Università di Berlino. — Id. id.
Amerio (Alessandro), Professore di fisica sperimentale nella R. Università di Messina. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.
Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — Id. id.
Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.
Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — Id. id.
Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.
Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 maggio 1910.
Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.

Angeli (Angelo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento di Firenze. — 24 febbraio 1918.
Le Chatelier (Enrico Luigi), dell'Istituto di Francia, Parigi. — Id. id.
Nasini (Raffaele), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.
Piutti (Arnaldo), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Bruni (Giuseppe), R. Politecnico di Milano. — 15 giugno 1919.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 febbraio 1885.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.
Suess (Franc. Edoardo), Professore nella "Deutsche Technische Hochschule" di Praga. — Id. id.
Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
Kilian (Carlo Vilfredo), Membro dell'Istituto di Francia. Professore nella Università di Grenoble. — Id. id.
Artini (Ettore), Professore e Direttore del Museo Civico di Storia Naturale di Milano. — 24 febbraio 1918.
Brugnatelli (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Dal Piaz (Giorgio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
De Stefani (Carlo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Day (Arturo L.), Direttore del Laboratorio geo-fisico dell'Istituzione Carnegie, Washington, D. C. — 11 giugno 1922.
Washington (Enrico Stefano), Laboratorio geo-fisico di Washington. — Id. id.
Franchi (Secondo), Ingegnere, Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.
Gortani (Michele), Professore di geologia nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Novarese (Vittorio), Ingegnere, Professore; Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
De Vries (Ugo), Professore nella Università di Amsterdam. — 13 genn. 1918.
Bower (Federico Orpen), Professore nella Università di Glasgow. — 24 febbraio 1918.
De Toni (Giovanni Batt.), Prof. nella R. Università di Modena. — Id. id.

Chodat (Roberto), Professore di botanica nell'Università di Ginevra. — 25 giugno 1922.
Longo (Biagio), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Pisa. — Id. id.
Gola (Giuseppe), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Padova. — Id. id.
Warming (Eugenio), Professore di botanica nell'Univessità di Kopenhagen. — Id. id.
Massart (Giovanni), Professore nell'Università libera di Bruxelles. — Id. id.
Bois (Desiderato), Professore nel Museo di storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 febbraio 1898.
Boulenger (Giorgio Alberto), Giardino botanico dello Stato, Bruxelles. — 28 gennaio 1900.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.
Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 marzo 1905.
Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell'Università di Madrid. — 15 maggio 1910.
Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.
Albertoni (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella Università di Bologna. — 24 febbr. 1918.
Bovero (Alfonso), Professore alla Facoltà di Medicina, S. Paolo del Brasile. — Id. id.
Chiarugi (Giulio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento di Firenze. — Id. id.
Vialleton (L.), Professore di Anatomia Microscopica, Montpellier. — Id. id.
Bottazzi (Filippo), Professore di fisiologia sperimentale nella R. Università di Napoli. — 11 giugno 1922.
Cesaris-Demel (Antonio), Professore di anatomia patologica nella R. Università di Pisa. — Id. id.
Gley (E.), Prof. di biologia generale nel *Collège de France*, Paris. — Id. id.
Hamburger (H. J.), Professore di Fisiologia nella R. Università di Groningen. — Id. id.
Richet (Charles), Professore di fisiologia nell'Università di Parigi. — Id. id.
Sherrington (Ch. S.), Professore di fisiologia nell'Università di Oxford. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

De Sanctis (Gaetano), Professore ordinario di Storia antica nella R. Università di Torino, ❋, Gr. Uff. ♕, Cav. Gr. Cr. del S. M. O. del Santo Sepolcro. — *Torino, Corso Vittorio Em., 44.*
Eletto alla carica il 18 giugno 1922 per il triennio dal 20 aprile 1922 al 19 aprile 1925.

Segretario.

Vidari (Giovanni), Professore ordinario di Pedagogia nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ❋ e ♕. — *Torino, Via Valeggio, 15.*
Eletto alla carica il 18 giugno 1922 per il triennio dal 20 aprile 1922 al 19 aprile 1925.

ACCADEMICI RESIDENTI

Boselli (S. E. Paolo), Senatore del Regno, Socio effettivo dei Lincei, Primo Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano, ecc., Cav. Ord. Supr. SS. Annunziata, ✠, Gr. Cord. ❋ e ♕. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*
15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), *predetto.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), Professore ordinario di Letteratura latina nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ❋ e ♕. — *Piazza Vittorio Veneto, 10.*
20 maggio 1906 - 7 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

Brondi (Vittorio), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione e Rettore della R. Università di Torino, Comm. ❋, Gr. Uff. ♕. — *Torino, Via Montebello, 26.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato 4 febbraio 1917.

Einaudi (Luigi), Senatore del Regno, Professore ordinario di Scienza delle finanze e Diritto finanziario nella R. Università di Torino, Comm. ♔. — *Torino, Via La Marmora, 60.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 13 dicembre 1917.

Schiaparelli (Ernesto), Direttore del R. Museo di Antichità in Torino, Uff. ✻, Comm. ♔.
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 11 luglio 1918.

Patetta (Federico), Professore ordinario di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, ✻, Comm. ♔. — *Via S. Massimo, 44.*
3 maggio 1914 - 11 giugno 1914. — Pensionato 27 ottobre 1918.

Vidari (Giovanni), *predetto.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 23 febbraio 1920.

Prato (Giuseppe), *predetto.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 30 dicembre 1920.

Cian (Vittorio), Professore ordinario di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Comm. ♔. — *Piazza Statuto, 4.*
20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 2 ottobre 1922.

Pacchioni (Giovanni), Professore ordinario di diritto civile nella R. Università di Torino, ♔. — *Via Cibrario, 54.*
20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 7 ottobre 1923.

Valmaggi (Luigi), Professore ordinario di Grammatica greca e latina nella R. Università di Torino, Comm. ♔. — *Via S. Secondo, 31.*
20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 10 ottobre 1923.

Faggi (Adolfo), Professore ordinario di Storia della filosofia nella R. Università di Torino, Comm. ♔. — *Torino, Corso Re Umberto, 57.*
18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920.

Luzio (Alessandro), Sovrintendente del R. Archivio di Stato di Torino, ✻, Comm. ♔. — *Via Principe Tommaso, 4.*
18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920.

Mosca (Gaetano), Senatore del Regno, Professore ordinario di diritto costituzionale nella R. Università di Torino, Comm. ✻, Gr. Uff. ♔. — *Torino, Corso Re Umberto, 45.*
18 gennaio 1920 — 12 febbraio 1920.

Jannaccone (Pasquale), Professore ordinario di statistica nella R. Università di Torino, Comm. ♔. — *Torino, Via Principe Tommaso, 39.*
28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

Solari (Gioele), Professore ordinario di filosofia del diritto nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Maria Vittoria, 3.*
23 dicembre 1923.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell' Università di Pisa e del R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, ✠, Uff. ✻, Comm. ♛. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 marzo 1892 - 26 marzo 1892.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, ✠, Gr. Cr. ✻ e ♛. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Senatore del Regno, Professore emerito di Lingue e Letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, ✠, Gr. Uff. ✻ e ♛. — *Firenze (22), Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Senatore del Regno, Professore emerito di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, ✠, Uff. ✻, Comm. ♛, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Senatore del Regno, Professore emerito di Paleoetnologia nella R. Università di Roma, ✠, Comm. ✻, Gr. Uff. ♛. — *Roma, Via del Collegio Romano, 26.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore ordinario di Storia comparata delle letterature neo-latine nella R. Università di Napoli, ✠, Comm. ✻ e ♛. — *Napoli, Largo Latilla, 6.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Sabbadini (Remigio), Professore ordinario di Lingue e Letteratura latina nella Università di Milano, Comm. ♛. — *Milano (10), Foro Bonaparte, 52.*
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Salandra (S. E. Antonio), Deputato al Parlamento, Professore ordinario di Diritto amministrativo nella R. Università di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio straniera dell'Istituto di Francia, Cavaliere dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, ✠, Gr. Cr. ✻ e ♛, ecc. — *Roma, Via Girolamo Fracastoro, 7.*
22 dicembre 1918 - 12 gennaio 1919.

ACCADEMICI STRANIERI

Mercier (Sua Eminenza Desiderato), Arcivescovo di Malines.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Wilson (Woodrow Tommaso), già Professore e Rettore dell'Università di Princeton, già Presidente della Repubblica degli Stati Uniti d'America.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Nolhac (Pietro de), Professore nell'École pratique des hautes études di Parigi.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Marshall (Alfredo), già Professore nell'Università di Cambridge (Inghilterra).
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Hauvette (Enrico), Professore di lingua e letteratura italiana alla Sorbona, Parigi.
28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nella Scuola Politecnica di Parigi. — 15 marzo 1896.

Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — Id. id.

Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.

Gentile (Giovanni), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 maggio 1914.

Martinetti (Pietro). Prof. nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — Id. id.

Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.

Varisco (Bernardino), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 marzo 1886.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Brandileone (Francesco), Professore nella R. Università di Bologna. — 10 giugno 1906.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Senatore del Regno, Prof. emerito della R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — 17 maggio 1914.
Ranelletti (Oreste), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 23 giugno 1918.
Romano (Santi), Professore di diritto costituzionale nella R. Università di Pisa. — 28 maggio 1922.
Sella (Emanuele), Professore di economia politica nella R. Università di Parma. — Id. id.
Dallari (Gino), Professore di filosofia del diritto nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 marzo 1896.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — 17 maggio 1914.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.
Pareti (Luigi), Professore di storia antica nel R. Istituto di studi superiori di Firenze. — 28 maggio 1922.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano. — 14 marzo 1886.

Orsi (Paolo), Dirett. del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Halbherr (Federico), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Marucchi (Orazio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Paribeni (Roberto), Direttore del Museo Nazionale Romano (delle Terme). — Id. id.
Breccia (Evaristo), Direttore del Museo Greco-Romano di Alessandria di Egitto. — 28 maggio 1922.

Sezione di Geografia.

Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 31 maggio 1908.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Parodi (Ernesto Giacomo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.
Nallino (Carlo Alfonso), Professore nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Vacca (Giovanni), Professore di lingue e letterature dell'estremo Oriente nel R. Istituto di studi superiori di Firenze. — 28 maggio 1922.
Levi Della Vida (Samuele Giorgio), Professore di lingue semitiche nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Senatore del Regno, Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 marzo 1890.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio alle Querce in Firenze. — Id. id.
Vitelli (Gerolamo), Senatore del Regno, Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.
Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano — 26 febbraio 1911.
Rostagno (Enrico), Professore nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 23 giugno 1918.
Barbi (Michele), Professore nella R. Università di Messina (Taviano Pistoiese). — Id. id.
Galletti (Alfredo), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Scherillo (Michele), Professore di letteratura italiana presso la R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 28 maggio 1922.

Pascal (Carlo), Professore di letteratura latina nella R. Università di Pavia. — 28 maggio 1922.

Bassi (Domenico), Direttore dell'officina dei Papiri presso la Biblioteca nazionale di Napoli. — Id. id.

Sanesi (Ireneo), Professore di letteratura italiana nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Romagnoli (Ettore), Professore di letteratura greca nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Bignone (Ettore), Professore di letteratura greca nella R. Università di Palermo. — Id.

MUTAZIONI

avvenute nel Corpo Accademico

dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1923

ELEZIONI

SOCI

Luzio (Alessandro) .
Patetta (Federico) .
Prato (Giuseppe) . .
De Sanctis (Gaetano)
eletti a costituire la Commissione per il premio Gautieri di Storia (triennio 1919-1921) nella seduta del 18 febbraio 1923 della Classe di scienze morali.

Patetta (Federico) .
Valmaggi (Luigi) . .
Luzio (Alessandro) .
designati a comporre la Commissione accademica per la nuova edizione del *Ducange* nella seduta del 20 maggio 1923 della Classe di sc. morali.

Pochettino (Alfredo).
Parona (C. Fabrizio) .
Mattirolo (Oreste) .
Einaudi (Luigi). . -
De Sanctis (Gaetano)
Schiaparelli (Luigi) .
eletti nella seduta a Classi unite del 1° luglio 1923 a costituire la Commissione per il conferimento dei due premi Bressa (triennii 1915-18, 1919-22).

Solari (Gioele), eletto Socio nazionale residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nella seduta del 23 dicembre 1923.

MORTI

1° aprile 1916.

Willstätter (Richard), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche.

29 ottobre 1922.

Barnabei (Felice), Socio corrispondente della Classe di scienze morali.

10 febbraio 1923.

Röntgen (Guglielmo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche.

27 marzo 1923.

Dewar (Giacomo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche.

19 agosto 1923.

Pareto (Vilfredo), Socio straniero della Classe di scienze morali.

6 ottobre 1923.

Foà (Pio), Socio nazionale residente della Classe di scienze fisiche.

9 ottobre 1923.

Salvadori (Tommaso), Socio nazionale residente della Classe di scienze fisiche.

27 ottobre 1923.

Baudi di Vesme (Alessandro), Socio nazionale residente della Classe di scienze morali.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 18 Novembre 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci PARONA Vice Presidente, PEANO, GUIDI, SOMIGLIANA, PANETTI, SACCO, MAJORANA, POCHETTINO e il Segretario MATTIROLO.

Scusano l'assenza i Soci D'OVIDIO, NACCARI e SEGRE.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che viene approvato senza osservazioni.

Il Presidente dà comunicazione di una lettera del Presidente della *Société française de Physique*, che celebra il suo Cinquantenario il 30 novembre, e che rivolge gentile invito all'Accademia nostra di prendere parte o di farsi rappresentare alla solennità. L'Accademia delibera di dare incarico al nostro Socio straniero ÉMILE PICARD di rappresentarla.

Vengono in seguito presentati i doni seguenti:

Dalla Direzione dell'*Istituto Geografico militare di Firenze*:

1) *La Cartografia Ufficiale in Italia e l'Istituto Geografico militare.*

Il Presidente mette in rilievo l'importanza del ricco dono del volume splendidamente illustrato, che ha per la Storia della Cartografia italiana importanza eccezionale.

2) Dal Socio corrispondente L. VIALLETON, *Morphologie Générale, Membres et Ceintures des Vertébrés Tétrapodes. Critique morphologique du Transformisme.*

3) Dal Signor Giuseppe FAVARO la Commemorazione di Antonio FAVARO, seguìta da una accurata bibliografia, che ricorda le 524 pubblicazioni del compianto insigne Professore.

4) Dal Socio D'OVIDIO e nel nome del Dr Giuseppe BERNARDI, *Soluzionario di Esercizii di Trigonometria sferica.*

5) Dal Socio SACCO la Commemorazione di Arturo ISSEL nostro Socio corrispondente sino dall'anno 1903.

6) Dal Socio Segretario MATTIROLO, una Nota delle piante osservate in due escursioni fatte nel Gruppo del Moncenisio, in occasione della riunione delle Società botaniche di Francia e d'Italia il 26 e il 27 luglio 1920, pubblicata dalla *Société botanique de France.* A questa Nota ha collaborato il sig. E. FERRARI, conservatore del R. Orto botanico.

7) Dallo stesso, una Memoria *Sulla vegetazione del Fossato di Palazzo Madama in Torino.* In questo studio, iniziato nell'anno 1883 (nel quale per opera del compianto Architetto D'Andrade, dopo aver ripulito il fossato, fu messo a nudo il terreno sottostante per ridurlo a giardino), continuato sino al 1922, l'Autore, dopo essersi occupato delle condizioni ecologiche del fossato, ha ricercato le modalità colle quali le *141* specie vegetali, che oggi vi si ritrovano, vi furono introdotte, documentando così un caso rarissimo di rioccupazione naturale da parte della vegetazione di un'area abbandonata a se stessa, nel centro di una grande Città Industriale.

8) Il Socio SOMIGLIANA, anche a nome del Socio POCHETTINO, membri della *Reale Commissione per l'Edizione Nazionale delle Opere di Alessandro Volta,* presenta in dono all'Accademia il 2° volume della preziosa collezione che onora la scienza italiana.

Il Presidente ringrazia i donatori.

Si passa quindi alla presentazione di Note per gli *Atti* accademici.

Il Socio PEANO, nel nome del signor Ugo CASSINA, presenta una Nota dal titolo: *Risoluzione graduale dell'equazione cubica di Leonardo Pisano.*

Il Socio PEANO brevemente discorre del modo col quale il signor CASSINA ha interpretato il pensiero e i metodi del celebre Fibonacci, vissuto tra il XII e il XIII secolo.

Lo stesso Socio PEANO presenta un'altra Nota di Filippo SIBIRANI di Trieste, *Sulla sfera paraosculatrice ad una curva storta.*

Le Note sono accolte per gli *Atti.*

Il Socio SACCO presenta quindi un suo studio, *Nuovi Cenni di fossili cretacei negli Argillo-schisti dell'Appennino settentrionale.* Egli fa rilevare l'importanza scientifica e pratica che può avere la soluzione dell'importante e discusso problema relativo alla cronologia ed alla topografia di questi terreni che egli ritiene profondi. Riferisce in merito ai gravi risultati verificatisi, per quanto ha rapporto alla topografia di tali terreni assai mobili, nel traforo della grande galleria della linea Bologna-Firenze.

La Nota del Socio SACCO è accolta per gli *Atti.*

Dopo di che il Presidente riferisce in merito alla Relazione e al Progetto sulla *Protezione del lavoro scientifico,* di cui ebbe incarico dalla Società delle Nazioni.

La Relazione e il relativo Progetto, che egli presenta stampati, furono già discussi ampiamente a Ginevra e a Berna coi rappresentanti più autorevoli di tutte le Nazioni; e, su rapporto favorevole del Ministro e Delegato francese HANOTAUX, vennero approvati dalla Assemblea della Società delle Nazioni nel settembre con 24 voti favorevoli e 8 contrarii, per essere rinviati ai Rappresentanti delle Nazioni, nel caso intendessero ancora fare qualche osservazione o proposta.

Trattandosi ora, dopo la già avvenuta approvazione da parte

dei Giuristi, delegati dalle nazioni, di redigere il Progetto e la Relazione definitivi che dovranno preparare e illustrare la futura Convenzione internazionale, il Presidente esprime ai Soci il desiderio che essi, presa visione del suo Progetto e della sua Relazione, vogliano, ove lo credano opportuno, suffragare con esempi e con ragioni tecniche le ragioni giuridiche sulle quali è poggiato il suo lavoro.

Il Presidente espone quindi, a mo' di conclusione del suo discorso, i criterii principali che diressero e sui quali egli orientò l'opera sua, allo scopo di riescire ad integrare le Convenzioni internazionali che attualmente già proteggono l'opera e la proprietà artistica e letteraria e industriale, ma lasciano ancora indifesa e abbandonata l'opera scientifica.

Il Vice Presidente Parona fa rilevare tutta l'importanza dell'argomento, e presenta al Presidente le felicitazioni dell'Accademia per l'onorifico incarico affidatogli dall'altissimo consesso dei rappresentanti delle nazioni; incarico, che non solo onora la persona sua, ma per riflesso anche il paese nostro.

Il Presidente ringrazia; e prima di chiudere l'adunanza ricorda con parola commossa i recenti gravi lutti sofferti dalla Accademia nostra per la morte dei Soci Salvadori e Foà, dei quali egli accenna ai meriti e alle virtù; proponendo che i due Soci benemeriti sieno convenientemente ricordati. Egli ritiene adunque di affidare a Soci competenti le due commemorazioni; e a tale scopo dà incarico al Socio Herlitzka di commemorare il Socio Foà, e al Socio Rosa quello di ricordare il Socio Salvadori.

LETTURE

Sulla sfera paraosculatrice ad una curva storta

Nota di FILIPPO SIBIRANI

Presentata dal Socio nazionale residente Peano

1. — Sfera paraosculatrice è detta da G. LORIA (1) la posizione limite di una sfera tangente a quattro piani osculatori ad una linea storta al tendere di tre di essi al quarto. Codesta sfera è stata considerata per la prima volta da B. HOSTINSKY (2) e da lui detta sfera osculatrice di seconda specie.

Nel § 2 mostro con quale rapidità, usando del Calcolo vettoriale, si può giungere alla determinazione del centro e raggio della sfera paraosculatrice e alla condizione perchè una curva abbia la sfera paraosculatrice fissa, nel qual caso dirò che la curva è parasferica. Nel § 3 determino le equazioni intrinseche delle curve sferiche-parasferiche. Nel § 4 mostro che la congiungente i due centri delle sfere paraosculatrice ed osculatrice non può avere direzione costante, a meno di non essere fissa, ciò che avviene solo per le curve sferiche-parasferiche, e non può formare una superficie sviluppabile a meno che la curva non sia sferica o parasferica. Nel § 5 è mostrato che una retta per il centro della sfera paraosculatrice parallela ad una direzione rigidamente connessa al triedro fondamentale della curva non può generare una sviluppabile, a meno che la curva non

(1) *Applicazioni geometriche di una formola di F. Sciacci.* " Bollettino dell'Unione Matematica Italiana ", 1923.

(2) *Sur les propriétés de la sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une surface développable.* " Comptes Rendus du Congrès international des Mathématiciens " (Strasbourg, 22-30 septembre 1920). Toulouse, E. Privat, 1921.

sia parasferica; una simile retta condotta per il centro della sfera osculatrice non genera una sviluppabile, a meno che la curva non sia sferica od una particolare elica cilindrica. Nel § 6 determino le equazioni intrinseche delle curve ogni punto delle quali ha distanza costante dai due centri delle sfere osculatrice e paraosculatrice. Nel § 7 determino le equazioni intrinseche delle curve per le quali le due sfere osculatrice e paraosculatrice sono tangenti, e dimostro che in codesta famiglia ogni curva sferica è parasferica e viceversa.

2. — Il punto $P(s)$ descriva una curva, di cui s è l'arco; $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ rappresentano vettori unitari nelle direzioni della tangente, normale principale e binormale. Il piano osculatore in P ha l'equazione

$$(P-Q)\times \boldsymbol{b}=0,$$

Q essendo il punto corrente. Se poniamo

$$P_i=P(s+h_i)\,,\qquad \boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}(s+h_i)\,,\qquad (i=1,2,3)$$

gli 8 centri delle 8 sfere tangenti ai 4 piani osculatori in $P(s)$, P_1, P_2, P_3 sono i punti C che soddisfano agli 8 sistemi di 3 equazioni

$$(1)\qquad (C-P)\times \boldsymbol{b}=\pm(C-P_1)\times \boldsymbol{b}_1=\pm(C-P_2)\times \boldsymbol{b}_2= =\pm(C-P_3)\times \boldsymbol{b}_3\,,$$

giacchè il valore assoluto della distanza di un punto C dal piano osculatore in P è dato dal valore assoluto di $(C-P)\times \boldsymbol{b}$.

Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned}(C-P_1)\times \boldsymbol{b}_1-(C-P)\times \boldsymbol{b}&=0\,,\\(C-P_2)\times \boldsymbol{b}_2-(C-P)\times \boldsymbol{b}&=0\,,\\(C-P_3)\times \boldsymbol{b}_3-(C-P)\times \boldsymbol{b}&=0\,.\end{aligned}$$

Con un ragionamento comunissimo in siffatte ricerche e d'altra parte semplicissimo, si vede che il punto C, al tendere di P_1, P_2, P_3 a P, tende al punto che soddisfa alle tre equazioni

$$(2)\qquad \frac{d}{ds}[(C-P)\times \boldsymbol{b}]=0\,,\qquad \frac{d^2}{ds^2}[(C-P)\times \boldsymbol{b}]=0\,,\qquad \frac{d^3}{ds^3}[(C-P)\times \boldsymbol{b}]=0\,,$$

cioè alle

$$(C - P) \times \boldsymbol{n} = 0\,, \qquad (C - P) \times \left(\frac{\boldsymbol{t}}{\rho} + \frac{\boldsymbol{b}}{\tau}\right) = 0\,, \tag{3}$$
$$(C - P) \times \left(\frac{\rho'}{\rho^2}\,\boldsymbol{t} + \frac{\tau'}{\tau^2}\,\boldsymbol{b}\right) = -\frac{1}{\rho}$$

(indicando con un accento la derivazione rispetto ad s).

La soluzione di queste equazioni è

$$C = P - \frac{\frac{\rho}{\tau}}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'}\,\boldsymbol{t} + \frac{1}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'}\,\boldsymbol{b}\,. \tag{4}$$

Qualunque altra scelta di segni nelle (1), cioè qualunque altro sistema, porta, anzichè alle (2), alle

$$(C - P) \times \boldsymbol{b} = 0\,, \qquad \frac{d}{ds}\left[(C - P) \times \boldsymbol{b}\right] = 0\,,$$
$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(C - P) \times \boldsymbol{b}\right] = 0\,,$$

cioè a

$$(C - P) \times \boldsymbol{b} = 0\,, \qquad (C - P) \times \boldsymbol{n} = 0\,, \qquad (C - P) \times \boldsymbol{t} = 0\,,$$

evidentemente soddisfatte solo da $C = P$.

Dunque delle 8 sfere, 7 si riducono, al tendere dei piani osculatori in P_1, P_2, P_3 al piano osculatore in $P(s)$, al punto P ed una alla sfera che ha il centro C dato dalla (4) ed il raggio $\left|\frac{1}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'}\right|$.

Dalla (4), ma già dalle (3), si vede che C descrive lo spigolo di regresso della sviluppabile rettificante.

Poichè

$$C' = \frac{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)''}{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'^2}\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\tau} - \frac{\boldsymbol{b}}{\rho}\right],$$

si vede che C è punto fisso se e solo se

$$\frac{\rho}{\tau} = as + c \tag{5}$$

con a, c costanti arbitrarie, ma $a \neq 0$, altrimenti la curva sarebbe un'elica cilindrica, per la quale C è improprio. Quando valga la (5), il raggio della sfera paraosculatrice è $\frac{1}{a}$. La (5) è l'equazione in termini finiti rapporto a ρ e τ equivalente all'equazione differenziale trovata da Hostinsky, la quale più semplicemente può scriversi $\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'' = 0$.

Diremo parasferica una curva per la quale la sfera paraosculatrice è fissa.

3. — Determiniamo le equazioni intrinseche delle curve sferiche-parasferiche. Queste debbono soddisfare alle due equazioni

$$\frac{\rho}{\tau} = as + c\,, \qquad \frac{\rho}{\tau} + (\tau\rho')' = 0\,. \tag{6}$$

Si ricava

$$(\tau\rho')' = -(as + c)$$

da cui

$$\tau\rho' = h - \left(a\frac{s^2}{2} + cs\right),$$

e per la prima delle (6)

$$\rho\rho' = (as + c)\left[h - \left(a\frac{s^2}{2} + cs\right)\right],$$

ed infine

$$\rho^2 = -\frac{a^2 s^4}{4} - cas^3 + (ah - c^2)\,s^2 + 2chs + k \tag{7}$$

con h, k nuove costanti sottoposte alla condizione

$$h^2 + k > 0\,,$$

perchè il quadrato del raggio della sfera osculatrice è appunto $h^2 + k$.

La (7) e la prima delle (6) costituiscono le richieste equazioni intrinseche delle curve sferiche-parasferiche.

4. — La retta congiungente i due centri delle sfere osculatrice e paraosculatrice non può mantenere una direzione costante, a meno che la curva non sia sferica-parasferica, nel qual caso la retta è fissa.

Se diciamo K il centro della sfera osculatrice, come è noto

$$K = P + \rho\boldsymbol{n} - \tau\rho'\boldsymbol{b}.$$

Orbene, perchè la retta KC abbia direzione costante deve essere

$$(K - C) \wedge (K - C)' = 0\,,$$

ossia

$$-\rho\left[\frac{\rho}{\tau} + (\tau\rho')' - \frac{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)''}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'^2}\right]\boldsymbol{t} +$$

$$+\left[\frac{\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{\rho}{\tau}\right)''}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'^2}\tau\rho' + \frac{\frac{\rho}{\tau}}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'}\left\{\frac{\rho}{\tau} + (\tau\rho')'\right\}\right]\boldsymbol{n} + \frac{\frac{\rho^2}{\tau}\left(\frac{\rho}{\tau}\right)''}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'^2}\boldsymbol{b} = 0$$

e ciò esige che sia

$$\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'' = 0\,, \qquad \frac{\rho}{\tau} + (\tau\rho')' = 0\,,$$

cioè che la curva sia sferica-parasferica.

Ricerchiamo se la retta CK può formare una sviluppabile. Per questo occorre che sia [1]

$$C' \times (C - K) \wedge (C - K)' = 0.$$

ossia, eseguendo i calcoli,

$$\frac{\rho^2}{\tau}\frac{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)''}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'^2}\left(\frac{\rho}{\tau} + (\tau\rho')'\right) = 0.$$

Da ciò si vede che per nessuna curva può accadere che la retta CK formi una sviluppabile, a meno che, com'è ovvio, la curva non sia o sferica o parasferica, nei quali casi le sviluppabili sono coni.

---

[1] Cfr. ad es. F. Sibirani, *Elementi di Geometria differenziale*, Milano, Hoepli, pag. 115.

5. — Una retta, la cui direzione sia invariabilmente connessa al triedro fondamentale di una curva, condotta per il centro della sfera paraosculatrice non può generare una superficie sviluppabile a meno che la curva non sia parasferica.

Se α, β, γ sono tre costanti, la direzione di $\alpha \boldsymbol{t} + \beta \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{b}$ è invariabilmente connessa al triedro fondamentale della curva. La rigata luogo delle rette per C che hanno l'indicata direzione è descritta dal punto

$$Q = C + u(\alpha \boldsymbol{t} + \beta \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{b}),$$

u parametro. Perchè la rigata sia sviluppabile occorre e basta che sia

$$C' \times (\alpha \boldsymbol{t} + \beta \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{b}) \wedge (\alpha \boldsymbol{t} + \beta \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{b})' = 0,$$

ossia

$$\frac{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)''}{\rho \left(\frac{\rho}{\tau}\right)'^2} \left[\left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2 (\beta^2 + \gamma^2) + 2 \frac{\rho}{\tau} \alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2\right] = 0.$$

Non potendo la curva essere un'elica cilindrica, la condizione precedente si riduce a

$$\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'' = 0,$$

la quale ci dice che la curva deve essere parasferica.

Il punto di contatto della sfera paraosculatrice col piano osculatore in P è il punto

$$H = P - \frac{\frac{\rho}{\tau}}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'} \boldsymbol{t};$$

nel caso di una curva parasferica,

$$H = P - \left(s + \frac{c}{a}\right) \boldsymbol{t}$$

ed H descrive una evolvente della curva descritta da P. Dunque il luogo delle rette condotte per il centro C della sfera para-

osculatrice parallele alla binormale è il cono che proietta da C l'anzidetta evolvente.

Perchè la rigata luogo delle rette per il centro K della sfera osculatrice, la cui direzione è ancora la precedente, sia sviluppabile occorre e basta che sia

$$K' \times (\alpha \boldsymbol{t} + \beta \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{b}) \wedge (\alpha \boldsymbol{t} + \beta \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{b})' = 0$$

ossia

$$\left\{ \frac{\rho}{\tau} + (\tau \rho')' \right\} \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\rho} + \frac{\alpha\gamma}{\tau} \right) = 0 \, .$$

La curva dunque deve essere o sferica o l'elica cilindrica per cui

$$\frac{\rho}{\tau} = - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\gamma} \, .$$

6. — Determiniamo le equazioni intrinseche delle curve ogni cui punto ha distanza costante tanto dal centro della sfera osculatrice quanto dal centro della sfera paraosculatrice.

Se indichiamo con $\frac{1}{a}$ la distanza di P, punto generico della curva, da C, centro della sfera paraosculatrice, deve essere

$$\frac{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'^2} = \frac{1}{a^2} \, , \tag{8}$$

e d'altra parte la curva deve esse sferica, cioè

$$\frac{\rho}{\tau} + (\tau \rho')' = 0 \, . \tag{9}$$

Dalla (8) si deduce integrando

$$\frac{\rho}{\tau} = - \operatorname{sh}(as + c) \tag{10}$$

a, c costanti arbitrarie. È questa un'equazione intrinseca a cui debbono soddisfare le curve ogni cui punto ha distanza $\frac{1}{a}$ dal centro della sfera paraosculatrice.

Dalle (9) e (10) si trae

$$(\tau \rho')' = \operatorname{sh}(as + c)$$

da cui

$$\tau\rho' = \frac{1}{a}\,\mathrm{ch}\,(as+c) + h$$

ed anche

$$(11)\qquad \rho\rho' = -\frac{1}{a}\,\mathrm{ch}\,(as+c)\,\mathrm{sh}\,(as+c) - h\,\mathrm{sh}\,(as+c).$$

Si deduce

$$\rho^2 = -\frac{1}{a^2}\,\mathrm{ch}^2\,(as+c) - \frac{2h}{a}\,\mathrm{ch}\,(as+c) + k \qquad (k>0).$$

La (11) in unione colla (10) sono le equazioni intrinseche richieste.

Se

$$h^2 + k = \frac{1}{a^2}$$

i centri delle sfere osculatrice e paraosculatrice hanno la stessa distanza costante da P.

7. — Determiniamo le equazioni intrinseche delle curve per le quali avviene che la sfera osculatrice è tangente alla sfera paraosculatrice.

Dalla espressione di K e C, centri rispettivamente della sfera osculatrice e paraosculatrice, si deduce

$$K - C = \frac{\frac{\rho}{\tau}}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'}\,\boldsymbol{t} + \rho\,\boldsymbol{n} - \left\{\tau\rho' + \frac{1}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'}\right\}\boldsymbol{b}$$

e

$$\mathrm{mod}\,(K-C) = \sqrt{\left\{\frac{\frac{\rho}{\tau}}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'}\right\}^2 + \rho^2 + \left\{\tau\rho' + \frac{1}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'}\right\}^2}.$$

Indicando con ϵ l'unità preceduta dal segno di $\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'$, la somma dei raggi delle due sfere è

$$\sqrt{\rho^2 + (\tau\rho')^2} + \frac{\epsilon}{\left(\frac{\rho}{\tau}\right)'},$$

e questa sarà eguale a mod $(K - C)$ se

$$4\rho^2\left(\frac{\tau}{\rho}\right)'^2 + 4\tau\rho'\left(\frac{\tau}{\rho}\right)' - 1 = 0.$$

Poniamo

$$\frac{\tau}{\rho} = u, \qquad \rho^2 = v.$$

Con ciò l'equazione precedente diviene

$$v' + \frac{2u'}{u}v - \frac{1}{2uu'} = 0,$$

dalla quale

$$v = \frac{1}{u^2}\left[h + \frac{1}{2}\int \frac{u}{u'}\,ds\right],$$

e quindi, essendo u funzione arbitraria di s, le equazioni intrinseche cercate sono date da

$$\rho^2 = \frac{1}{u^2}\left[h + \frac{1}{2}\int \frac{u}{u'}\,ds\right]$$
$$\tau = \rho u.$$

Fra le curve di questa famiglia, ogni curva sferica è parasferica e viceversa. Invero la condizione

$$\frac{\rho}{\tau} + (\tau\rho')' = 0,$$

necessaria e suffciente perchè la curva sia sferica, si trasforma per una curva della famiglia indicata in

$$\left(\frac{u}{u'}\right)^2 + 2\int \frac{u}{u'}\,ds = 0,$$

la cui soluzione è

$$u = \frac{1}{as + c};$$

ma allora è

$$\frac{\rho}{\tau} = as + c,$$

cioè la curva è parasferica.

Risoluzione graduale dell'equazione cubica di Leonardo Pisano

Nota di UGO CASSINA
Presentata dal Socio nazionale residente Peano

Nella presente Nota, premesse alcune notizie storiche intorno all'equazione cubica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, risolta da LEONARDO FIBONACCI da Pisa intorno al 1225, mi occupo della sua *risoluzione graduale.*

Il PEANO (1) ha dato il nome di *risoluzione graduale* d'una equazione numerica ad un particolare procedimento in cui si abbreviano le operazioni trascurando sistematicamente le cifre decimali di ordine superiore ad un numero intero n, fissato all'inizio, e che suol dirsi il *grado* della risoluzione.

Io qui modificherò alquanto il metodo di PEANO, e fonderò la risoluzione dell'equazione di LEONARDO sopra una nuova semplice proposizione che stabilisco al n° 2.

Di questo argomento mi sono occupato anche in una mia recente opera litografata sul *Calcolo numerico* (2).

*
* *

1. — GIOVANNI DA PALERMO, filosofo di FEDERICO II della casa di Svevia, si incontrò intorno al 1225 (3) con LEONARDO

---

(1) G. PEANO, *Risoluzione graduale delle equazioni numeriche* (" Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. LIV, 1919).

(2) U. CASSINA, *Calcolo numerico, con numerosi esempi e note storiche originali* (Un vol. di pag. 537 in lit.; Libreria Perotti, Torino, 1923).

(3) LEONARDO disse che s'incontrò con GIOVANNI DA PALERMO nel quarto mese del 1225, allorquando FEDERICO II venne per la prima volta a Pisa. I biografi dell'imperatore affermano invece che FEDERICO andò per la prima

FIBONACCI da Pisa — il celebre autore del *Liber Abaci* (1202) — ed a questi propose, fra le altre, la questione seguente:

Ut inveniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent viginti.

(LEONARDO PISANO, *Scritti*, pubblicati da B. Boncompagni, Roma, 1862, t. II, p. 228).

Tale problema fa parte di un opuscolo di LEONARDO conosciuto sotto il nome di *Flos*, dedicato al cardinale Raniero Capocci, cardinale diacono di S. M. in Cosmitin, e venne così denominato in onore di Sua eminenza, " raggiante d'un'eloquenza fiorita fra i dotti „ (*florida clericorum elegantia radiantibus*), ed anche " perchè diversi problemi, quantunque spinosi, sono esposti in modo fiorito; ed allo stesso modo che le piante avendo le radici in terra s'innalzano e mostrano al giorno dei fiori, così da queste questioni se ne deducono innumerevoli altre „ (*Scritti*, op. cit., t. II, p. 227).

Questo opuscolo venne scoperto insieme a due altri (il *Liber quadratorum* e il *De modo solvendi questiones avium et similium*) dal principe BALDASSARRE BONCOMPAGNI, nella Biblioteca Ambrosiana di Milano.

Il principe pubblicò una prima volta questi lavori sotto il titolo: *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni* (Firenze, 1854); e poi li riunì alle altre opere del Pisano, che pubblicò sotto il titolo: *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo, pubblicati da B. Boncompagni* (vol. I, *Liber Abaci*, Roma, 1857; vol. II, *Pratica Geometriae* ed *Opuscoli*, Roma, 1862).

Nel linguaggio moderno, il problema di LEONARDO PISANO può enunciarsi così:

---

volta in questa città nel luglio 1226. Ma non vi è contraddizione fra queste due affermazioni, perchè il calendario pisano, di quel tempo, differiva da quello comune (giuliano) di 1 anno, 2 mesi, 25 giorni, cominciando, come quello di Firenze e di altre città toscane, il 25 marzo (giorno dell'Incarnazione), e in più era in ritardo di un anno su quello fiorentino.

Vedi: *Cronografia generale dell'Era volgare di* G. CESARE CARRARESI (Firenze, 1874); M. LAZZARINI, *Leonardo Fibonacci, le sue opere e la sua famiglia* (" Bollettino di bibliogr. e storia delle scienze matem. di G. Loria „, a. VI, 1903 e a. VII, 1904).

" *Trovare il numero positivo* x *tale che*

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \text{ ''}. \tag{1}$$

Leonardo, dopo aver studiato accuratamente il X libro di Euclide, dimostra che la radice di quest'equazione non può essere nè un numero intero, nè una frazione, nè nessuna delle rimanenti quantità composte mediante radicali quadratici studiate da Euclide nel suo libro X.

La dimostrazione di Leonardo occupa sei grandi pagine di stampa dell'edizione del Boncompagni. Ed una sua versione, nel linguaggio algebrico attuale, venne pubblicata da F. Woepke nel 1854 ([4]).

Allora, siccome nessuna delle quantità considerate da Euclide può risolvere l'equazione proposta, Fibonacci calcola la radice dell'equazione (1) per approssimazione:

" Ergo linea .ab., ut demonstratum est, non est aliqua ex " quindecim lineis, de quibus fit mentio in X° euclidis, ut pre- " dixi. Et quia hec questio solvi non potuit in aliquo supra- " scriptorum, studui solutionem eius ad propinquitatem reducere. " Et inveni unam ex .X. radicibus nominatis, scilicet numerum " .ab., secundum propinquitatem, esse unum et minuta .XXII. " et secunda .VII. et tertia .XLII. et quarta .XXXIII. et quinta " .IIII. et sexta .XL. " (*Scritti*, t. II, p. 234) ([5]).

Dal passo riportato risulta dunque che il valore approssimato della radice dell'equazione (1), dato da Leonardo, è:

$$x = 1^{P}\,22'\,7''\,42'''\,33^{IV}\,4^{V}\,40^{VI} = 1 + 22/60 + 7/60^2 + \\ + 42/60^3 + 33/60^4 + 4/60^5 + 40/60^6. \tag{2}$$

La comparsa degli scritti di Leonardo, pubblicati per cura del principe Boncompagni, è accompagnata da una fioritura di

---

([4]) F. Woepke, *Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenue dans un ouvrage de Léonard de Pise découvert par M. le prince Balthasar Boncompagni* (" Journal de Mathématiques ", t. 19, a. 1854, pp. 401-406).

([5]) Una breve traduzione in linguaggio moderno del X libro di Euclide venne pubblicata dal Peano, *Sommario del libro X di Euclide* (" Rivista di matem. ", vol. II, 1892, p. 7).

studi, intrapresi dai matematici e storici di quel periodo, per commentare, interpretare e divulgare la grande opera del PISANO.

Di numerose pubblicazioni fu frutto specialmente l'equazione cubica, perchè il risultato ottenuto da LEONARDO è invero meraviglioso se si rammenta che è stato ottenuto intorno al 1225, cioè più di tre secoli prima della risoluzione algebrica delle equazioni di 3° grado e dei primi metodi a noi noti di calcolo approssimato delle radici delle equazioni algebriche (CARDANO 1545, VIETA 1595, OUGHTRED 1652, NEWTON 1669, ecc.); e se si rammenta ancora che gli Arabi, maestri di LEONARDO, erano in quei tempi soltanto in grado di risolvere graficamente le equazioni di 3° grado mediante l'intersezione di due coniche (OMAR ALKHAYYAMI, poeta e matematico arabo del 1000) [6].

E così abbiamo, a pochi mesi di distanza, i lavori di WOEPKE (1854), di LEBESGUE (1855), di GENOCCHI (1855), di TERQUEM (1856) [7].

Dopo un po' di tempo se ne occuparono HANKEL (1874) e CANTOR (1892) nei loro libri di storia della matematica [8]. Il CANTOR ritenne prive di fondamento tutte le varie ricostruzioni del calcolo di LEONARDO tentate dagli autori precedenti (LEBESGUE, GENOCCHI, HANKEL).

Lo studio dell'equazione leonardiana fu di nuovo ripreso nel 1893, in Danimarca, da H. G. ZEUTHEN e da J. P. GRAM [9].

---

(6) O. ALKHAYYAMI, *L'algèbre*, ed. F. Woepke, Paris, 1851.

(7) LEBESGUE, *Sur un problème traité par Léonard de Pise dans son Flos, et relatif à une équation de troisième degré* (" Annali di scienze mat. e fisiche di B. Tortolini ", t. VI, 1855, p. 155); A. GENOCCHI, *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da B. Boncompagni, Note analitiche* (" Annali di scienze mat. e fisiche di B. Tortolini ", t. VI, 1855, p. 161); O. TERQUEM, *Sur Léonard Bonacci de Pise et sur trois écrits de cet auteur publiés par Balthasar Boncompagni* (" Annali di scienze mat. e fisiche di B. Tortolini ", t. VII, 1856, p. 106; la stessa nota nei " Nouvelles annales de Mathématiques ", Paris, 1855-56).

(8) H. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (1874, p. 293); M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (II Bd. Von 1200 bis 1668, I Aufl., 1892, p. 42).

(9) H. G. ZEUTHEN, *Sur la résolution numérique d'une équation de 3e degré par Léonard de Pise* (" Oversigt over K. Danske Videnskabernes Selskabs ", Kjöbenhavn, 1893-94, pp. 1-17); J. P. GRAM, *Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation* $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ (" Oversigt over K. Danske Vidensk. Selsk. ", Kjöbenhavn, 1893-94, pp. 18-28).

Il GRAM, fondandosi su alcune considerazioni dello ZEUTHEN e dietro suo consiglio, riuscì a fare una ricostruzione del calcolo di LEONARDO che è veramente notevole. Infatti, fondandosi soltanto su proprietà note a LEONARDO e facendo uso di operazioni che non è possibile imaginare non ben familiari al PISANO, giunse al suo stesso valore (2), ed a dare una ragione del perchè il PISANO abbia troncato il suo calcolo ai sesti, e non prima e non dopo. Cosicchè, giunti alla fine della nota di GRAM, si è costretti a riconoscere che se LEONARDO non ha in realtà seguito il procedimento ivi spiegato, certo avrebbe potuto benissimo adoperarlo. E ciò è quanto può pretendere il restitutore d'un calcolo andato smarrito.

Un solo punto mi pare un po' debole della ricostruzione del GRAM. Ed è proprio la prima ipotesi, di supporre cioè che LEONARDO sostituisca all'equazione cubica generale (1) l'equazione:

$$(1') \qquad (x + 2/3)^3 + (8 + 2/3)\,x = 20 + 8/27,$$

che è ottenuta dalla (1) tentando di sostituire al suo primo membro un cubo perfetto; perchè, in fondo, ciò equivale a far sparire il termine di 2° grado nell'equazione completa di 3° grado [10].

Sarebbe mio desiderio di riportare qui, in parte, il calcolo del GRAM, perchè, essendo stato pubblicato in una Raccolta poco diffusa in Italia, credo che non sia tanto noto; ma lo spazio me lo vieta. Quindi passo senz'altro alla risoluzione graduale dell'equazione di LEONARDO [11].

---

[10] H. G. ZEUTHEN, *Tartalea contra Cardanum* (" Oversigt over K. D. Vidensk. Selsk. ", Kjöbenhavn, 1893-94, p. 303).

[11] L'equazione cubica di LEONARDO PISANO trovasi riportata anche nei seguenti libri: J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik in systhematischer Darstellung* (I Aufl., 2 vol., 1902-903; II verbesserte und sehr vermehrte Auflage, III Bd., 1922, p. 81); F. CAJORI, *A History of elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching* (I ed. New-York, 1897; revised and enlarged edition 1917, p. 120); S. GÜNTHER, *Geschichte der Mathematik*, I Tl. *Von den ältesten Zeiten bis Cartesius* (1908, p. 265); G. A. MILLER, *Historical Introduction to Mathematical Literature* (1916, p. 132).

2. — Per stabilire il teorema fondamentale che porrò a base della risoluzione graduale delle equazioni numeriche, ho bisogno di richiamare le definizioni di alcuni simboli, già abbastanza usati nella teoria delle Approssimazioni numeriche, ma ancora poco noti.

$\mathrm{V}a =$ *valore intero*, o *parte intera*, di a, cioè $\mathrm{E}a$ del *Formulario* di G. Peano [12].

$\mathrm{X} =$ dieci, base della numerazione.

$$a \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, q \,\epsilon\, \mathrm{n} \,.\, \supset .\, \mathrm{V}_q a = \mathrm{X}^{-q} \mathrm{V}\, \mathrm{X}^q a \,. \qquad (\alpha)$$

$$\mathrm{M}_q a = a - \mathrm{V}_q a \,. \qquad (\beta)$$

Cioè: " Essendo a una quantità reale, positiva o negativa, e q un intero con segno, allora $\mathrm{V}_q a$ che può leggersi " valore con q decimali di a „ e " $\mathrm{M}_q a$ „ che può leggersi " mantissa di a dopo p decimali „ sono definiti dalle eguaglianze scritte.

Mi propongo ora di calcolare l'errore che si commette nel calcolo di ax^r, ove a ed x sono numeri reali ed r un numero intero, quando si sostituisce ad a un suo valore abbreviato.

Per la (α) e (β) ho:

$$a = \mathrm{V}_q a + \mathrm{M}_q a \,,$$

da cui moltiplicando per x^r,

$$ax^r = \mathrm{V}_q a \times x^r + \mathrm{M}_q a \times x^r.$$

Se x è minore di un'unità decimale di ordine p, cioè se $x \,\epsilon\, \theta\, \mathrm{X}^{-p}$, e pongo $n = pr + q + 1$, ho:

$$\mathrm{M}_q a \times x^r < \mathrm{M}_q a \times \mathrm{X}^{-pr} = (\mathrm{X}^{q+1}\, \mathrm{M}_q a)\, \mathrm{X}^{-n}.$$

Dirò di spingere il calcolo di ax^r fino alle cifre decimali di ordine n, se scelgo il q in modo che $pr + q + 1 = n$.

---

(12) G. Peano, *Formulario Mathematico* (ed. V, Torino, 1908).

Allora, sostituendo ad a il suo valore a q decimali $V_q a$, nel calcolo di ax^r si commette l'errore $\theta\,(X^{q+1} M_q a)\, X^{-n}$. Cosicchè, in definitiva, si ha la proposizione:

$$(3)\quad a, x \,\epsilon\, q \,.\, r, p, n \,\epsilon\, n \,.\, x \,\epsilon\, \theta\, X^{-p} \,.\, q = n - pr - 1 \,.\, \supset .$$
$$ax^r \,\epsilon\, V_q a \times x^r + \theta\, (X^{q+1} M_q a)\, X^{-n} \quad (^{13}).$$

Od anche:

Se a ed x indicano dei numeri reali qualunque, ed r, p ed n dei numeri interi, ed inoltre x è una frazione dell'unità decimale di ordine p, allora, se nel calcolo di " ax^r " voglio spingermi fino alle cifre decimali di ordine n, basta che sostituisca ad a, $V_q a$ ove $q = n - pr - 1$.

Così facendo commetto un errore che è una frazione dell'unità decimale di ordine n moltiplicata per la prima cifra di a che è stata cancellata, presa però in eccesso, cioè questa cifra senz'altro se essa non è seguìta da altre cifre significative, ovvero questa cifra aumentata di 1, se è seguìta da altre cifre significative.

Infatti $X^{q+1} M_q a$ è sempre minore od eguale della cifra di a di grado decimale $p + 1$ (cioè della prima cifra di a cancellata) presa in eccesso, come risulta dai seguenti esempi [14]:

$a = 3{\cdot}1415 \ldots \supset . \; V_2 a = 3{\cdot}14 \,.\, X^3 M_2 a = 1{\cdot}5 \ldots < 2 =$ (prima cifra cancellata di a) $+ 1$;

$a = 7{\cdot}253 \quad \supset . \; V_2 a = 7{\cdot}25 \,.\, X^3 M_2 a = 3 =$ prima cifra trascurata di a.

3. — Fondandosi su di una proposizione analoga alla (3) PEANO ha modificato il metodo di RUFFINI-HORNER per la risoluzione delle equazioni algebriche numeriche, in modo da trascurare tutte le operazioni superflue e da renderlo semplice e spedito anche nei casi in cui il metodo originale di quegli autori è impraticabile. Questo metodo è stato detto dal PEANO " risoluzione graduale delle equazioni numeriche ". Io lo spiegherò risolvendo l'equazione (1) di LEONARDO PISANO.

---

(13) Si confronti la proposizione qui stabilita con il § 3 della Nota di PEANO sulla risoluzione graduale delle equazioni numeriche (op. cit. nella postilla (1), p. 8).

(14) V. anche PEANO, (1), p. 7.

Il calcolo è interamente riportato, e di ogni linea è data la spiegazione.

Si vuol dunque risolvere l'equazione (1), cioè posto:

$$fx = x^3 + 2x^2 + 10x - 20,$$

calcolare la radice positiva dell'equazione $fx = 0$.

Farò la risoluzione di grado 15.

L'equazione (1) ammette una sola radice reale, e poichè $f1 \times f2 < 0$, la *radice richiesta è compresa fra* 1 *e* 2.

Allora se x è una quantità, calcolo $f(1+x)$ con la regola di RUFFINI-HORNER, dando al calcolo la disposizione adottata da PEANO. Questo calcolo è eseguito nelle linee 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, di cui ora passo a dare la spiegazione per disteso.

Linea 1. — Scrivo i coefficenti di f. Allora:

$$f(1+x) = (1+x)^3 + 2(1+x)^2 + 10(1+x) - 20.$$

„ 2. — Moltiplico il primo coefficente (da sinistra a destra) della linea precedente per 1, e scrivo il prodotto spostandolo di un posto verso destra.

„ 3. — Sommo ed ottengo $(1+x) + 2 = x + 3$, e quindi:

$$f(1+x) = [(x+3)(1+x) + 10](1+x) - 20.$$

„ 4. — Moltiplico i numeri scritti nella linea 3 per 1 e scrivo i risultati spostandoli di un posto verso destra.

„ 5. — Sommo, ed ottengo $(x+3)(1+x)+10 = x^2+4x+13$, e quindi:

$$f(1+x) = (x^2 + 4x + 13)(1+x) - 20.$$

„ 6. — Moltiplico i coefficenti di $x^2+4x+13$ per 1 e scrivo i risultati spostandoli di un posto verso destra.

„ 7. — E sommo. Avrò infine:

$$f(1+x) = x^3 + 5x^2 + 17x - 7 = \varphi x\,.$$

Linea	Radice	Risoluzione graduale dell'equazione $fx = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$				Errori in θX^{-15}
1		1·	2·	10·	—20·	
2	1·		1·			
3		1·	3·			
4			1·	3·		
5		1·	4·	13·		
6			1·	4·	+13·	
7		1·	5·	17·	—7·	
8	3 X^{-1}		·3			
9		1·	5·3			
10			·3	1·59		
11		1·	5·6	18·59		
12			·3	1·68	+5·577	
13		1·	5·9	20·67	—1·423	
14	6 X^{-2}		·06			
15		1·	5·96			
16			6	·3576		
17		1·	6·02	20·6276		
18			6	·3612	+1·237656	
19		1·	6·08	20·9888	—·185344	
20	8 X^{-3}		·008			
21		1·	6·088			
22			8	·048704		
23		1·	6·096	21·037504		
24			8	48768	+·168300032	
25		1·	6·104	21·086272	—·017043968	

26	8 X^{-4}		8			
27		1·	6·1048			
28			8	488384		
29		1·	6·1056	21·09115584		
30			8	488448	+ ·016872924672	
31		1·	6·1064	21·09604032	— · 171043328	1
32	0 X^{-5}					
33	8 X^{-6}			488512		
34			6·1064	21·096089171|2		2
35				488512	+ X^{-15} 16876871 3368	
36			6·10|64	21·09613802|22	— X^{-15} 2274614632	7
37	1 X^{-7}			61		3
38			6·10	21·09613863		
39				61	+ X^{-15} 2109613863	1
40			6·|10	21·0961392|4	— X^{-15} 165000769	4
41	0 X^{-8}		|6·	21·096139|2	— X^{-15} 165000769	1
42	7 X^{-9}				147672973	2
43				|9	— 17327796	9
44	8 X^{-10}				16876904	
45				|3	— 450892	3
46	2 X^{-11}				421922	
47				|1	— 28970	1
48	1 X^{-12}				21096	
49				|6	— 7874	6
50	3 X^{-13}				6327	
51				|9	— 1547	9
52	7 X^{-14}				1470	
53				21·	— X^{-15} 77	49

54 $x \in \theta X^{-14} . \supset . f(1{\cdot}36880\,81078\,2137 + x) \in 21x - 77X^{-15} + \theta 49 X^{-15}$.

Ora divido il termine noto della linea 7 per il coefficente di x: ottengo $4X^{-1}$; ma poichè

$$f(1+4X^{-1}) > 0 + 5\times 16X^{-2} + 17\times 4X^{-1} - 7 = {}^{\cdot}8 + 6{\cdot}8 > 0,$$

si deduce che il termine di grado decimale 1 della radice è minore di $4X^{-1}$. Provo allora $3X^{-1}$, e calcolo $f(x+1{\cdot}3) = \varphi(x+{}^{\cdot}3)$, con il metodo precedente, nelle linee 8, 9, 10, 11, 12, 13. Cioè:

Linea 8. — Moltiplico il primo coefficente della linea 7 per $3X^{-1}$ e scrivo il prodotto spostandolo di un posto verso destra.

„ 9. — Sommo ed ottengo $({}^{\cdot}3+x)+5 = x+5{\cdot}3$, e quindi:

$$f(x+1{\cdot}3) = \varphi(x+{}^{\cdot}3) = [(x+5{\cdot}3)(x+{}^{\cdot}3)+17](x+{}^{\cdot}3)-7.$$

„ 10. — Moltiplico i numeri della linea 9 per $3X^{-1}$ e scrivo i risultati spostandoli di un posto verso destra.

„ 11. — Sommo ed ottengo $(x+5{\cdot}3)(x+{}^{\cdot}3)+17 = x^2 + 5{\cdot}6x + 18{\cdot}59$, e quindi:

$$f(x+1{\cdot}3) = \varphi(x+{}^{\cdot}3) = (x^2+5{\cdot}6x+18{\cdot}59)(x+{}^{\cdot}3)-7.$$

„ 12. — Moltiplico i numeri della linea precedente per $3X^{-1}$ e scrivo i prodotti spostandoli di un posto verso destra.

„ 13. — E sommo. Avrò infine:

$$f(x+1{\cdot}3) = \varphi(x+{}^{\cdot}3) = x^3+5{\cdot}9x^2+20{\cdot}27x-1{\cdot}423 = \psi x.$$

Ponendo in questa $x=0$ si ha $f1{\cdot}3 < 0$ e quindi, poichè abbiamo già visto che $f1{\cdot}4 > 0$, si conclude che *la cifra dei decimi della radice è* 3.

Divido il termine noto della 13 per il coefficente di x: ottengo $7X^{-2}$. Ma

$$f1{\cdot}37 > 5\times 49X^{-4} + 20\times 7X^{-2} - 1{\cdot}423 = {}^{\cdot}0245 + 1{\cdot}40 - 1{\cdot}423 > 0,$$

quindi il termine di grado decimale 2 della radice è minore di $7X^{-2}$. Provo allora $6X^{-2}$, e calcolo $f(x+1{\cdot}36) = \psi(x+7X^{-2})$, con la regola precedente, nelle linee 15, 15, 16, 17, 18, 19. Ed ho:

Linea 19. $f(x+1{\cdot}36) = \psi(x+6X^{-2}) = x^3 + 6{\cdot}08x^2 +$
$+ 20{\cdot}9888x - {\cdot}185344.$

E poichè $f1{\cdot}36 < 0$, si conclude che *la cifra dei centesimi della radice è* 6.

Ora divido il termine noto della linea 19 per il coefficente della x, ho $8X^{-3}$, che sarà eguale al termine seguente della radice, o ne sarà maggiore. Calcolo $f(1{\cdot}368 + x)$, con il metodo precedente, nelle linee 20, 21, 22, 23, 24, 25. Ed ho:

Linea 25. $f(1{\cdot}368 + x) = x^3 + 6{\cdot}104x^2 +$
$+ 21{\cdot}086\,272x - {\cdot}01704\,3968.$

Poichè $f1{\cdot}368 < 0$, mentre invece $f1{\cdot}369 > 0$, si conclude che *la cifra dei millesimi della radice richiesta è* 8.

Divido il termine noto per il coefficente di x ed ottengo $8X^{-4}$, che sarà il termine seguente della radice, o un numero più grande. Calcolo $f(1{\cdot}3688 + x)$, con la regola precedente, nelle linee 26, 27, 28, 29, 30, 31, ed ho:

Linea 31. $f(1{\cdot}3688 + x) = x^3 + 6{\cdot}1064x^2 +$
$+ 21{\cdot}09604\,032x - {\cdot}00017\,10433\,28.$

Poichè $f1{\cdot}3688 < 0$, mentre $f1{\cdot}3689 > 0$, si conclude che *la cifra dei decimillesimi della radice è* 8.

Divido il termine noto della 31 per il coefficente della x ed ho *il termine seguente della radice* $0X^{-5}$.

Il calcolo, fino a questo punto, è spiegato nei trattati di Aritmetica o di Algebra; salvochè la disposizione è un po' varia nei vari trattati; spesso si indicano dei calcoli più laboriosi di quelli che risultano dalla regola di Ruffini qui adoperata. Siccome il cubo della radice 1·36880 ha 15 cifre decimali, oltre cui non vogliamo andare, ora incomincia l'abbreviazione dei calcoli.

Allora, poichè nella linea 32 la x è minore di X^{-5} e voglio spingermi fino alle cifre di grado decimale 15, per il teorema del numero 2, ove ora $n = 15$, $p = 5$ ed $r = 3$, basta che io prenda il coefficente di x^3 con $q = 15 - 5 \times 3 - 1 = -1$ cifre decimali; quindi cancello il termine in x^3. Così facendo commetto

un errore che è una frazione di X^{-15} moltiplicato per la prima cifra trascurata del coefficente di x^3, cioè un errore eguale a θX^{-15}, che scrivo nella colonna degli errori.

I coefficenti di x^2 e di x li lascio invece inalterati; ottengo così:

$$x \in \theta X^{-5} . \supset . f(1{\cdot}36880 + x) \in 6{\cdot}1064\, x^2 + \\ + 21{\cdot}09604\,032\, x - {\cdot}00017\,10433\,28 + \theta X^{-15},$$

e la funzione è ora di secondo grado.

Divido il termine noto per il coefficente di x: ottengo $8X^{-6}$, che è il termine seguente della radice, o un numero più grande. Calcolo allora $f(1{\cdot}36880\,8 + x)$, con il metodo già visto, nelle linee 33, 34, 35, 36, ed ho:

Linea 35. — Taglio l'ultima cifra del coefficente di x, perchè basta che io prenda questo coefficente con $15 - 5 \times 1 - 1 = 9$ cifre decimali, e scrivo l'errore $2\,\theta X^{-15}$ nella colonna degli errori.

„ 36. — Dice che:

$$x \in \theta X^{-5} . \supset . f(1{\cdot}36880\,8 + x) \in 6{\cdot}1064\, x^2 + \\ + 21{\cdot}09613\,80222 - X^{-15}\,22746\,14632 + 3\,\theta X^{-15}.$$

Di qui risulta che $f\,1{\cdot}36880\,8 < 0$, e quindi *il termine di grado decimale* 6 *della radice è* $8X^{-6}$.

Ora poichè, proseguendo il calcolo, la nuova $x < X^{-6}$, per il teorema del n° 2, ove ora $n = 15$, $p = 6$ ed $r = 2$ od 1, posso prendere il coefficente di x^2 con $q = 15 - 6 \times 2 - 1 = 2$ cifre decimali, ed il coefficente di x con $q = 15 - 6 \times 1 - 1 = 8$ cifre decimali. E poichè, così facendo, le prime cifre trascurate della linea 36 sono rispettivamente un 6 ed un 2, e dopo di esse vi sono delle altre cifre, commetto un errore eguale a $\theta\,[(6 + 1) + (2 + 1)]\,X^{-15} = \theta\,(7 + 3)\,X^{-15}$, che scrivo nella colonna degli errori. Si ha dunque:

$$x \in \theta X^{-6} . \supset . f(1{\cdot}36880\,8 + x) \in 6{\cdot}10\, x^2 + \\ + 21{\cdot}09613\,802\, x - X^{-15}\,22746\,14632 + 13\,\theta X^{-15}.$$

Procedo come prima. Divido il termine noto per il coefficente della x ed ottengo $1X^{-7}$, che sarà il termine seguente

della radice, o un termine maggiore. Calcolo $f(1{\cdot}36880\,81 + x)$, con la regola già più volte adoperata, nelle linee 37, 38, 39, 40, ed ho:

Linea 40. $x \in \theta X^{-6} . \supset . f(1{\cdot}36880\,81 + x) \in 6{\cdot}10\,x^2 +$
$+ 21{\cdot}09613\,924x - X^{-15}\,16500\,0769 + 13\,\theta X^{-15}$.

E poichè $f\,1{\cdot}36880\,81 < 0$, si conclude che $1X^{-7}$ è *il termine di grado decimale* 7 *della radice.*

Proseguendo il calcolo, poichè ora la $x < X^{-7}$, applicando il teorema del n° 2, in cui ora $n = 15$ e $p = 7$, prendo il coefficente di x^2 con $q = 15 - 7 \times 2 - 1 = 0$ cifre decimali ed il coefficente di x con $q = 15 - 7 \times 1 - 1 = 7$ cifre decimali. E poichè, così facendo, le prime cifre trascurate della linea 40 sono rispettivamente un 1 ed un 4, e dopo di esse non vi sono altre cifre non nulle, commetto un errore eguale a $\theta\,(1 + 4)\,X^{-15}$, che scrivo nella colonna degli errori.

Si ha dunque:

$$x \in \theta X^{-7} . \supset . f(1{\cdot}36880\,81 + x) \in 6\,x^2 +$$
$$+ 21{\cdot}09613\,92\,x - X^{-15}\,16500\,0769 + 18\,\theta X^{-15}.$$

Divido il termine noto per il coefficente di x ed ho $0\,X^{-8}$ *come termine seguente della radice.*

Poichè ora, proseguendo il calcolo, $x < X^{-8}$ prendo il coefficente di x^2 con $q = 15 - 8 \times 2 - 1 = -2$ cifre decimali e il coefficente di x con $q = 15 - 8 \times 1 - 1 = 6$ cifre decimali. Cancello dunque il termine in x^2 e così commetto un errore eguale a θX^{-15}, e prendo il coefficente di x con 6 cifre decimali commettendo così un errore di $2\,\theta X^{-15}$. Scrivo gli errori nella colonna apposita, ed ho:

Linea 41. $x \in \theta X^{-8} . \supset . f(1{\cdot}36880\,810 + x) \in 21{\cdot}09613\,9\,x -$
$- X^{-15} 16500\,0769 + 21\,\theta X^{-15}$,

e la funzione è ora di primo grado.

Divido il termine noto per il coefficente di x e trovo $7\,X^{-9}$, che è il termine seguente della radice, o ne è maggiore.

Linea 42. — Moltiplico il coefficente della x per $7\,X^{-9}$ e scrivo il risultato spostandolo di un posto verso destra.

Linea 43. — Sommo ed ho:

$$x \varepsilon \theta X^{-8} . \supset . f(1{\cdot}36880\,8107 + x) \varepsilon 21{\cdot}09613\,9\,x -$$
$$- X^{-15}\,17327\,796 + 21\,\theta X^{-15}.$$

Se si fa $x = 0$, questo $f < 0$, se invece si fa $x = X^{-9}$ questo $f > 0$. Si conclude dunque affermando che *il termine di grado decimale* 9 *della radice è* $7X^{-9}$.

Poichè, proseguendo il calcolo, la $x < X^{-9}$, prendo il coefficente di x con $15 - 9 \times 1 - 1 = 5$ cifre decimali; taglio dunque l'ultima cifra di questo coefficente, commettendo così un errore eguale a $9\,\theta X^{-15}$, che scrivo nella colonna degli errori. Così ho:

$$x \varepsilon \theta X^{-9} . \supset . f(1{\cdot}36880\,8107 + x) \varepsilon 21{\cdot}09613\,x -$$
$$- X^{-15}\,17327\,796 + 30\,\theta X^{-15}.$$

Ora divido il termine noto per il coefficente di x e trovo $8X^{-10}$, che è il termine successivo della radice, o un numero più grande.

Linea 44. — Procedo come prima. Moltiplico il coefficente della x della linea precedente per $8X^{-10}$ e scrivo il risultato spostandolo di un posto verso destra.

" 45. — Sommo, taglio l'ultima cifra del coefficente di x e tengo conto dell'errore. Ho:

$$x \varepsilon \theta X^{-10} . \supset . f(1{\cdot}36880\,81078 + x) \varepsilon 21{\cdot}0961\,x -$$
$$- X^{-15}\,45089\,2 + 33\,\theta X^{-15}.$$

Di qui risulta che *il termine di grado decimale* 10 *della radice è* $8X^{-10}$.

E così di seguito.

Linea 54. — Essa dice che:

$$x \varepsilon \theta X^{-14} . \supset . f(1{\cdot}36880\,81078\,2137 + x) \varepsilon 21x - 77X^{-15} + \theta 49X^{-15}.$$

Se qui si fa $x = X^{-14}$ si ha $f(1{\cdot}36880\,81078\,2137 + X^{-14}) > 0$, come già si sapeva; se si fa $x = 0$ si ha $f 1{\cdot}36880\,81078\,2137 \varepsilon - 77X^{-15} + \theta 49X^{-15}$, e qualunque sia θ, questo $f < 0$. Dunque:

$$V_{14}\ \textit{radice} = 1{\cdot}36880\,81078\,2137.$$

Si può proseguire il calcolo nella

Linea 55:

$x \epsilon \theta X^{-15} . \supset . f(1{\cdot}36880\ 81078\ 21373 + x) \epsilon 21x - 14X^{-15} + \theta 49X^{-15}.$

Se si fa $x = X^{-15}$ questo $f > 0$; se si fa $x = -X^{-15}$ il segno di f è incerto; il segno di f è pure dubbio per $x = 0$. Quindi la quindicesima cifra della radice è incerta. Essa può essere un 3, od un 2, od un 1.

Così si è calcolato la radice dell'equazione di LEONARDO PISANO con 14 cifre decimali esatte, facendo uso di numeri con non più di 15 cifre decimali. La parte intera e 5 cifre della radice si sono trovate mediante un'equazione di 3° grado; poi altre 3 cifre mediante un'equazione di 2° grado; ed infine altre 6 cifre della radice mediante un'equazione di 1° grado (cioè con una *divisione graduale*).

OSSERVAZIONE. — Proseguendo i calcoli trovo:

(4) $\quad \textit{radice} = 1{\cdot}36880\ 81078\ 21372\ 63522\ 7\ldots,$

cifre che mi risultano anche da un calcolo parallelo eseguito facendo uso contemporaneo del metodo della *corda* (o delle *parti proporzionali* o di *doppia falsa posizione*) e del metodo delle *tangenti* (o di NEWTON-FOURIER), ed eseguendo operazioni graduali.

Trasformando in decimali il valore (2), dato da LEONARDO, si ha:

(2') $\quad x = 1{\cdot}36880\ 81078\ 5\ldots,$

quindi il valore del PISANO differisce da quello esatto per circa $3X^{-11}$ in eccesso: cioè egli dà 10 cifre decimali esatte.

Mettendo invece la radice sotto forma sessagesimale si ha:

(4') $\quad x = 1^{p}\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33_{IV}\ 4^{V}\ 38^{VI}\ 30^{VII}\ 50^{VIII}\ 15^{IX}\ 42^{X}\ 45^{XI}\ldots,$

da cui risulta che il valore di LEONARDO è errato in eccesso di circa $1{\cdot}5^{VI}$.

Torino, *R. Università*, ottobre 1923.

Nuovi cenni di fossili cretacei negli Argilloschisti dell'Appennino settentrionale

Nota del Socio nazionale residente FEDERICO SACCO

Nel 1888, pubblicando una nota sopra " Le Ligurien „ osservavo a pag. 228 che, come il nome di Flysch, *le nom de Ligurien doit être aboli, ou appliqué seulement dans le sens d'indiquer un facies spécial, facies qui, dans la région tipique de la Ligurie, se déreloppe entre le Crétacé ou entre le Parisien inférieur et le Bartonien*, facendo inoltre osservare che tale facies sembra già cominciare talora nel Cretaceo.

Nel 1889, descrivendo, nel lavoro sopra *Il Bacino terziario del Piemonte*, il Liguriano come formazione costituita da banchi calcarei ed arenacei superiormente e da argilloschisti ed argille scagliose ofiolitifere in basso, indicavo, a pag. 51, che " per me il *Liguriano* di Mayer non rappresenta altro che una facies speciale del *Parisiano* (largamente inteso), se pure non si estende anche al Cretaceo in qualche punto dell'Appennino ligure „; alla fine del lavoro stesso a pag. 932, riparlando del Liguriano, indicavo che " l'incontro di fossili caratteristici, alcuni fenomeni stratigrafici, ecc. mi fanno abbracciare l'ipotesi che gran parte delle Argille scagliose e di altre formazioni incluse nel Liguriano e credute eoceniche, appartengano invece già al Cretaceo „, aggiungendo, a pag. 933, che " i miei recenti studi mi porterebbero a collocare nel Cretaceo quasi tutte le cosidette Serpentine eoceniche, come cercherò di dimostrare in una prossima pubblicazione „.

Infatti nel 1891, con una nota speciale sopra *L'âge des formations ophiolitiques récentes*, esponevo una serie di dati litologici, stratigrafici e paleontologici (Cicadeoidee, Radiolarie, Hemi-

pneusti, Inocerami, Ammoniti di varii generi [*Acanthoceras, Schloenbachia, Hamites, Turrilites, Scaphites,* ecc.], Pticodi ed Ittiosauri) secondo cui la formazione delle Argille scagliose e degli Argilloschisti galestrini, con Calcari Alberesi, Pietraforte e colle relative Pietre Verdi (Serpentine, Diabasi, Lherzoliti, ecc.), era logico si dovesse attribuire al Cretaceo. Poco dopo, nel 1893, pubblicavo una *Contribution à la connaissance paléontologique des Argiles écailleuses et des Schistes ophiolitiques de l'Apennin septentrional,* elencando ed in parte descrivendo i numerosissimi fossili caratteristicamente cretacei fin allora segnalati da varii autori e da me in dette Argille scagliose e negli schisti ofiolitiferi dell'Appennino, figurandone una ventina di nuovi o poco noti.

Più tardi, nel 1905, in una nota sopra *Les formations ophitifères du Crétacée,* passando in rassegna numerose regioni della Terra ove furono già riconosciute formazioni ofitiche nei terreni cretacei, presentavo, con relativa illustrazione fotografica, nuovi fossili di tipo cretaceo (numerosi Inocerami, Hamiti, Acantoceratidi, Pachidischi, molti Pticodi, Odontaspidi, Scapanorinchi, Oxirine, ecc. ecc.), facendo inoltre una rassegna dei fossili cretacei finallora trovati nelle Argille scagliose e negli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino settentrionale.

Intanto dal 1890 al 1898 andavo rilevando al 25.000 od al 50.000 e pubblicando al 100.000 la carta geologica di tutto l'Appennino settentrionale, accompagnata da sezioni geologiche e da volumi illustrativi (" L'Appennino settentrionale 1891, L'Appennino dell'Emilia 1892; L'Appennino della Toscana 1895; L'Appennino della Romagna 1899 „) in modo da corroborare con studi geologici e tettonici sul terreno i dati paleontologici, riassumendo il tutto nel lavoro generale sopra " L'Appennino settentrionale e centrale, 1904 „ con carta geologica complessiva al 500.000.

Ricordo infine come interessante e parmi probativo della tesi, direi cretacea, da me sostenuta, il fatto che i fossili cretacei (numerose Cycadeoidee, centinaia di Inocerami, parecchie diecine di Ammoniti, denti di Pticodi, ecc.) trovati da tante persone diverse, in diversi tempi, in luoghi svariati quanto fra loro lontani, e senza segni di rimaneggiamento, si raccolsero in quelle regioni appunto dove nei miei rilevamenti eseguiti dal 1890 al

1898 riconobbi, per caratteri litologici e tettonici, come cretacee, quasi sempre senza sapere che eranvisi rinvenuti tipici fossili cretacei, che anzi spesso furono solo raccolti o pubblicati più tardi.

Contuttociò è talmente radicata fra i geologi italiani l'idea che le Argille scagliose, i Galestri e consimili Argilloschisti ofitiferi siano eocenici, che si continuò generalmente a porre nell'Eocene tali formazioni, nè io più me ne occupai per quasi un ventennio, salvo quando, spinto da un sentimento di dovere cittadino, davo nel 1908 " Un allarme di Geologia applicata alle Direttissime Bologna-Firenze e Genova-Milano ", quando cioè la questione dell'età relativa delle Argille scagliose, dei Calcari a fucoidi e delle Arenarie (Macigno), uscendo dal puro campo scientifico, diventava disastrosamente pratica; giacchè è facile comprendere quale differenza vi sia nella esecuzione di lunghe e profonde gallerie attraverso l'Appennino secondo che le formazioni argillose vi giacciono in sinclinale, ingracilendosi quindi verso il basso, fra anticlinali di Calcari e di Arenarie, come generalmente tuttora si crede, oppure se esse vi affiorano per anticlinali, estendendosi quindi sempre più in profondità, come io penso; si tratta di differenze equivalenti praticamente a centinaia di milioni, come per esempio mostra ora purtroppo, nella costruzione della linea ferroviaria Bologna-Firenze, il pozzo-discenderia spinto inconsultamente in piena formazione di Argilloschisti presso Castiglione dei Pepoli e come mostrerà pure, in qualche tratto, la grande galleria di valico che riserva non solo sorprese per chi crede che gli Argilloschisti stiano sopra al Macigno, ma purtroppo anche gravissimi inconvenienti ed enormi spese ben superiori alle preventivate.

Del resto, quando si considera che fossili caratteristici del Cretaceo, se trovati in terreni che si vogliono ritenere eocenici, si battezzano coi nomi nuovi di *Inoceramus eocenicus, Inoc. relictus*, *Ammonites eocenicus*, ecc., oppure si determinano come denti di *Gavialis* quelli così tipici di *Ichthyosaurus*, o quando si afferma che gli *Ptychodus* si svilupparono anche nell'Eocene e nel Miocene, o si dicono rimaneggiati fossili che non hanno nessun carattere di rimaneggiamento, o si sostiene che una formazione deve esser eocenica perchè così ritenuta da tanto tempo, ecc., e quando si vede che estese e potenti formazioni (per esempio in certe vaste aree del Bacino di Firenze), dove da oltre un

secolo si raccolgono centinaia di esemplari di specie diverse di Inocerami e di Ammoniti riferibili ai generi *Turrilites*, *Acanthoceras*, *Pachydiscus*, *Puzozia*, *Peroniceras*, *Schlömbachia*, *Mortoniceras*, *Heteroceras*, *Crioceras*, *Toxoceras*, *Bostrycoceras*, *Scaphites*, ecc., tutti del Cretaceo, regolarmente intercalati fra terreni che da un trentennio collocai nel Cretaceo, dopo apposito rilevamento di cui pubblicai nel 1895 la Carta geologica; quando si vede, ripeto, che tali formazioni sono attribuite ancora all'Eocene nel recente foglio al 100.000 di *Firenze* della Carta ufficiale del Regno d'Italia, allora vien fatto veramente di disperare della Paleontologia e della Geologia, o meglio del buon senso, riguardo a questa importantissima questione della Geologia appenninica (1).

Nello scorso anno, avendo dovuto nuovamente occuparmi della Geologia dell'Appennino settentrionale, per incarico ministeriale, circa le sue regioni eventualmente petroleifere, ebbi di nuovo a raccogliere numerosi dati stratigrafici, paleontologici, ecc. comprovanti l'età cretacea della complessa formazione argilloschistosa ofitifera; rinviando ad altro lavoro (richiedente carte, tavole di sezioni, ecc.) i dati geologici, ricordo qui ora semplicemente alcuni nuovi o non ancora illustrati rinvenimenti paleontologici, che del resto collimano perfettamente con quelli caratteristici già sovraccennati (2).

Andando per ordine sistematico, debbo anzitutto ricordare l'interessante lavoro di G. Steinemann, *Ueber Tiefenabsätze des Ober Jura im Appennin* (" Vortr. d. Geol. Verein in Marburg, Wien ", 1913), il quale, studiando le Radiolariti racchiuse nei depositi argilloso-calcarei, di tipo abissale, di Figline di Prato, dove detti argilloschisti sono, come di solito, connessi con Eu-

(1) L'età cretacea di potenti formazioni argilloschistose (*Flysch*) con Pietre verdi (Serpentine, Peridotiti, Gabbro, ecc.) analoghe a quella dell'Appennino italiano si va sempre più riconoscendo (per studi tettonici, per rinvenimento di Inocerami, ecc.) in tutte le parti del mondo, dai Pirenei all'Himalaja, al Giappone, a Borneo, alla California, ecc.

(2) Colgo l'occasione per ringraziare gli amici Prof. P. Vinassa (nonchè l'egregio suo aiuto Dott. Anelli) Direttore del Museo geologico di Parma, ed il Prof. L. Colomba Direttore del Museo geologico di Modena per gli interessanti fossili cortesemente affidatimi in esame.

fotidi, Serpentine, Oficalci (il cosidetto Verde Prato) e che egli indica come di facies lepontinica, precisa che tale fauna radiolaritica corrisponde perfettamente a quella cosidetta *titoniana* e conchiude quindi nel ritenere tale formazione come appartenente al Giura superiore. Detta interpretazione cronologica delle Radiolarie incluse fra gli Argilloschisti ofitiferi di tipo abissale che io riferisco al Cretaceo fu già indicata, oltre che dal Rust, dal Neviani e dal Vinassa de Regny (" Boll. Soc. geol. it. ", XIX, 1900); ma, data la semplicità organica delle Radiolarie, credo che non se ne debba esagerare il valore stratigrafico, pur segnalandone, nel caso in questione, l'indicazione prevalentemente mesozoica (1).

Quanto all'indicazione fatta dallo Steinemann della *Calpionella alpina* Lorenz (fossile che egli ritiene assolutamente caratteristico del Giura sup. e del Cretaceo inf.) nel Calcare alberese di Figline, credo pure che non se ne debba esagerare il valore cronologico, giacchè essa, oltre che trovarsi nel Giura, deve risalire certamente al Cretaceo sup., se pure non ancora nell'Eocene inf. Nella regione in questione si vede che fra gli schisti grigio-bruni ofitiferi del Cretaceo si intercalano strati e lenti di Calcari alberesi; ma verso l'alto della formazione argilloschistosa cominciano ad apparire Calcari schistosi che iniziano la vera serie eocenica sviluppantesi poi in alto verso Nord colla potente tipica pila delle arenarie (*Macigno*).

Nello stesso lavoro lo Steinemann riferisce il *Macigno* al Turoniano o al Senoniano, ciò che credo un'altra esagerazione, giacchè in tale famosa serie arenacea è noto che si trovarono caratteristiche Nummuliti, nonchè Molluschi di tipo persino miocenico; ma ad ogni modo credo che essa sia riferibile all'Eocene.

Ricordo infine che lo Steinemann nel lavoro in esame ritiene che nella costituzione dell'Appennino vi è una parte autoctona ed una parte alloctona sovrapposta alla prima con facies

---

(1) Il Prof. C. De Stefani con uno scritto *Su una Nota di Steinemann intorno alle roccie di Prato in Toscana* (" Rend. R. Accad. Lincei ", XXIII, 1914) replicò riferendo, come di solito, all'Eocene superiore dette formazioni argilloschistose con roccie eruttive, diaspri e Radiolarie, tronchi silicizzati di *Cuprexylon*, denti di *Ptychodus latissimus*, ecc., e ricordando anche il rinvenimento di Inocerami indubbiamente eocenici!

lepontinica e che rappresenta l'Appennino schistoso; ciò verificasi realmente per alcune zone in cui la formazione argilloschistosa del Cretaceo va a sovrapporsi per rovesciamento a quelle calcaree od arenacee dell'Eocene, anzi talora persino del Miocene, come già accennai in una nota sopra *Una placca isolata di Cretaceo sul Miocene* (" Rend. R. Accad. Lincei „, 1923); ma anche qui non bisogna esagerare il fatto, che pur troppo già tanto contribuì a far porre finora, dalla maggioranza dei geologi, gli schisti cretacei nell'Eocene superiore, vedendosene la frequente sovrapposizione tettonica, senza tener conto dei fossili.

Ancor più esagerata è la teoria dello S. Lencewics che nei suoi " *Profile geologiczne przez Apenin Toskanski* (Warszawa, 1917) interpretò l'Appennino tosco-emiliano con dei ricoprimenti di una grandiosità che non credo ammissibile, potendosi interpretare invece questa regione in modo assai più naturale e relativamente semplice (malgrado molti e forti corrugamenti ed anche rovesciamenti e trasgressioni), come mostrerò in altri lavori di carattere geologico.

Continuando l'indicazione sistematica dei fossili raccolti ultimamente nelle Argille scagliose, ricordo l'interessante *Rinvenimento di* Uintacrinus *nell'Appennino settentrionale*, che per la sua speciale importanza già segnalai l'anno scorso negli "Atti della R. Accad. Sc. Torino „, LVIII, 1922; trattasi infatti di un genere finora riscontrato solo nel Cretaceo superiore del Kansas, della Westfalia e dell'Inghilterra, e di cui fu raccolto dall'ing. C. Ponci un caratteristico lungo braccio impigliato in una delle solite lastre calcaree alternantesi colle Argille scagliose del fianco destro di Val Dordone sopra S. Andrea di Medesano.

Ma le forme che più frequentemente si incontrano sugli strati arenaceo-calcarei alternantisi cogli schisti argillosi sono gli Inocerami allo stato di impronte interne od esterne, generalmente frammentate per frattura della lastra che le accoglie, ma senza cenni di rotolamento, il che esclude il rimaneggiamento e ci indica che questi depositi (come del resto suggerisce anche la stessa natura arenacea) non sono tanto profondi quanto parrebbero invece indicare le vere Argille scagliose.

Non è il caso di presentare qui la descrizione e determinazione specifica di questi Inocerami (in gran parte riferibili al gruppo dell'*Inoc. Cripsii*), trattandosi di impronte incomplete e

di forme alquanto variabili; tale studio si potrà fare con utilità quando si potranno avere sott'occhio quasi tutti gli esemplari (o relative fotografie) di Inocerami dell'Appennino settentrionale, ora sparsi nei diversi Musei di Parma, Modena, Bologna, Firenze, ecc.

Basterà qui per ora segnalarli, illustrarli, almeno in parte, ed indicarne la località di rinvenimento, ciò che ha tanta importanza per la questione geologica sovraccennata.

Già antecedentemente ebbi a ricordare un Inoceramo trovato presso Casola di Ravarano in Val Baganza; ora dal Museo di Parma ebbi in gentile comunicazione due esemplari di tale

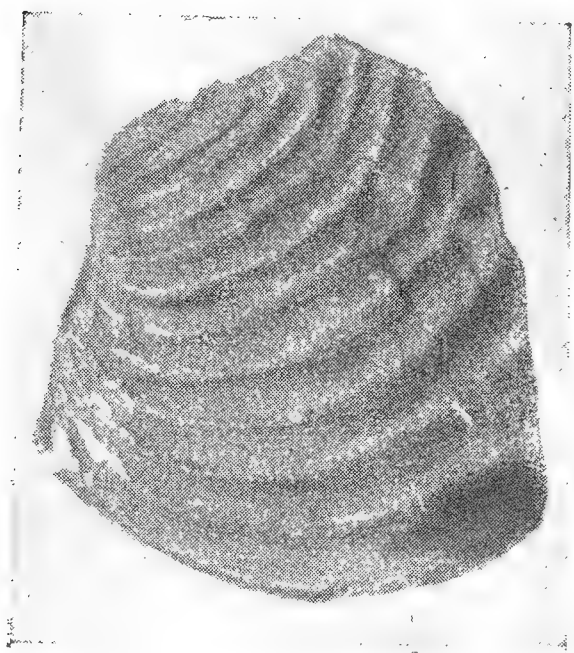



Fig. 1 (2/3 gr. nat.).

Fig. 2 (2/3 gr. nat.).

località, cioè un frammento di arenaria presentante l'impronta ben netta (fig. 1) di un Inoceramo affine all'*I. Cripsii*, con l'indicazione aggiunta di “ Sopra le Vigne „; l'altro esemplare, pure su lastra di arenaria ed affine all'*I. Crispii* (fig. 2), è indicato come raccolto anticamente a Casola “ vicino a Baganza „. Questa località di Casola (ad ovest di Calestano) è molto interessante, giacchè quivi verificasi una bella, stretta, anticlinale di tipiche argille scagliose che sviluppasi per oltre 10 chilom. dalla Valle del Taro (dove è riccamente ofitifera) sino alla Valle del Parma, separando così due caratteristiche sinclinali di Calcari eocenici costituenti i gruppi di M. Croce e M. Vitello a Nord, di M. Cassio e Montagnana a Sud.

Un altro Inoceramo, pure affine all'*I. Cripsii* (fig. 3), conservato nel Museo geologico di Parma, giace sopra una lastrina di arenaria raccolta in Val Ceresola presso Casalino (Reggio Emilia) dove appunto affiorano in vario modo gli argilloschisti sopra i Gessi del Trias e sotto le formazioni marnoso-arenacee dell'Eocene.

Dal Museo di Modena ebbi in esame diversi Inocerami; uno purtroppo di località imprecisata dell'Appennino modenese, per cui, per quanto conservato sulle solite lastre arenaceo-calcaree alternanti colle Argille scagliose, non se ne può qui tener conto.

Un altro frammento di Inoceramo proviene da Casellano, località pure dell'Appennino modenese che non seppi individuare.

Fig. 3 (gr. nat.).

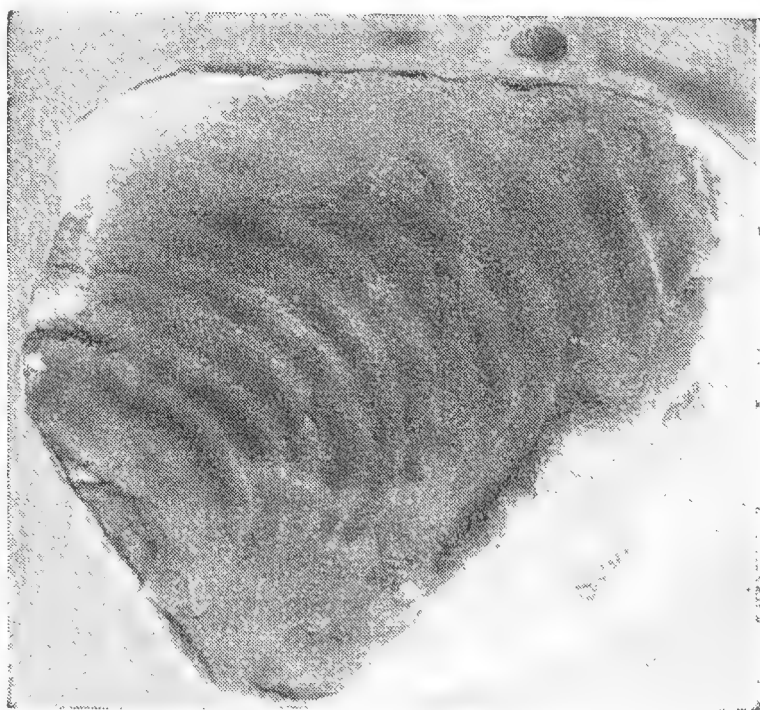



Fig. 4 (1/2 gr. nat.).

Una impronta di Inoceramo (fig. 4) fu raccolta a Monte dell'Evangelo dove sviluppasi una larga e complicata zona anticlinale di tipiche Argille scagliose (alternate mille volte con straterelli calcareo-arenacei, grigi con frequenti iciniti svariate), zona vasta ed importantissima che si estende quasi ininterrotta nella regione preappenninica dal Piacentino al Bolognese.

Interessantissimo è l'Inoceramo di Barigazzo già segnalatovi molto tempo fa dal Lotti e da me, poichè in quella località dell'Appennino modenese i terreni sono tettonicamente molto conturbati e contorti per modo che strette anticlinali di argilloschisti del Cretaceo vengono ad affiorare fra marne ed arenarie calcaree dell'Eocene, e quindi schisti con Inocerami in-

contransi a pochi metri di distanza (1) da strati con Lucine, Nummuliti ed altri fossili eocenici.

Quanto all'Inoceramo di Costa dei Grassi (fig. 5) esso fa parte di quel gruppo di fossili tipicamente cretacei (*Inoc.* cfr. *Monticuli*, *Pachydiscus* cfr. *galicianus*, ecc.) che si raccolsero già da tempo in quella estesa zona di argilloschisti che avviluppa il grande affioramento triasico dell'alta Val Secchia, venendo a lor volta coperti qua e là da placche più o meno estese di calcari marnosi dell'Eocene.

Fig. 5 ($^1/_2$ gr. nat.).

Ricordo anche frammenti di Inocerami raccolti dal Dottore Anelli (*Cenni geol. dint. Traversetolo*, 1915) nelle solite Argille scagliose di Masdone (Bassa Val Parma), dove esse si liberano dal mantello miocenico presentando le caratteristiche acque salsojodiche nella vicina località detta appunto di Lesignano Bagni.

Infine debbo accennare al fatto interessante che il Dottore E. Fossa-Mancini, incaricato, nella scorsa primavera, di uno studio geologico dettagliato della regione modenese di Monfestino in Serramazzoni, dove una vastissima, digitata, zona di Calcari marnosi dell'Eocene giace, in generale suborizzontale o con poca inclinazione (salvo presso certi margini), sopra la potente formazione delle Argille scagliose qua e là ofitifere, durante il suo paziente, minuto ed oculato lavoro di rilevamento, trovò su lastre arenaceo-micacee ben cinque esemplari di Inocerami (riferibili essenzialmente all'*I. Cripsii*) presso Valle, a N. E. di Monfestino; cioè appunto nella regione di passaggio dalle marne calcaree eoceniche (quivi inclinate di 30°-40° verso S. O. circa) ai soggiacenti argilloschisti del Cretaceo supe-

(1) Ricordo che un fatto analogo, il passaggio cioè rapidissimo dagli strati cretacei con Inocerami a quelli eocenici con Nummuliti, talora quasi a contatto od a pochi metri di distanza, ebbi pure a constatare nei Pirenei (Vedi F. Sacco, *Osservazioni geologiche comparative sui Pirenei*, "Atti R. Acc. Sc. Torino „, XXXVI, 1900).

riore, con interstraterelli arenaceo-calcarei spesso fortemente drizzati, contorti ed arricciati come di solito; gli Inocerami, come mi scrisse cortesemente il Fossa-Mancini, si trovano " alla superficie superiore del gruppo prevalentemente argilloso che Lei pose nel Cretaceo „, riferendosi naturalmente alla mia Carta geologica (al 100.000) dell'Appennino dell'Emilia pubblicata nel 1892.

Un altro Inoceramo il Fossa-Mancini osservò nel Rio di Spezzano al passo di Varana, ed anche qui in piena zona di argilloschisti inglobanti i grossi affioramenti di Serpentina a cui si appoggiano i casolari della Borgata Varana; zona argilloschistosa cretacea che soggiace appunto, verso Sud, alla grande formazione calcareo-marnosa eocenica suborizzontale (però con forti drizzamenti nella sua zona marginale, come sotto i Bortolacelli) di Monfestino e verso Nord alla zona di Calcari marnosi eocenici, piegati forse in sinclinale coricata, pendenti specialmente verso il N. N. O. circa, costituenti per la loro compattezza relativa il rilievo detto il Monte.

Altri Inocerami il Fossa-Mancini rinvenne infine nel letto del Rio Cervaro presso il Molino del Poggio a S. O. di Monfestino, sempre nella zona di passaggio dagli argilloschisti cretacei alla serie marnoso-calcarea dell'Eocene.

Quanto a Cefalopodi indico un'Ammonite, giacente inglobata in una delle solite lastre calcaree alternantisi colle Argille scagliose, raccolta nella tipica regione argilloschistosa della destra di Val Dordone (Parmense); sgraziatamente la lastra, oltre che screpolata per gli sforzi orogenici subiti anticamente (rimanendo anche spaccato il fossile), dovette restare lungamente esposta alle intemperie per cui l'Ammonite rimase corrosa ed alterata, tanto che la sua determinazione riesce incerta; sembra una *Schloembachia* (fig. 6).

Diverse impronte di *Hamites*, assieme a numerose Icniti svariatissime, potei raccogliere su lastre arenaceo-calcaree alternantisi regolarmente con schisti argillosi, 4 chilometri (in linea d'aria) ad O. S. O. di Pellegrino parmense nella dorsale depressa di C. Barillini; quivi si vede nettamente che tali argilloschisti grigio-brunastri, disposti in anticlinale, sfasciantisi in grandiose frane verso Nord e verso Sud (Val Cenedola), soggiacciono ad Ovest alle marne calcaree grigiastre, eoceniche, del M. Castellaro

e immergonsi verso Est sotto ad argilloschisti rossigni, che interpreterei come il deposito superiore del Cretaceo e che soggiacciono alla loro volta alla potente serie dei Calcari marnosi grigio-chiari che formano l'ampio ed elevato gruppo del Monte di S. Cristina. È questa una delle tante località appenniniche dove si può esaminare bene il passaggio graduale, per quanto rapido, dal Cretaceo all'Eocene.

Fig. 6 (gr. nat.).

Quanto a denti di Pesci, di cui già descrissi e figurai numerose forme tipicamente cretacee nel sovraccennato lavoro nel 1905, è da indicarsi come assai importante lo studio di G. Canestrelli sopra *Denti di* Ptychodus *nel territorio dell'App. tosco-romagnolo* (" Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. ", Memorie, XXVI, Pisa, 1910), in cui sono descritti e figurati diversi denti di questi tipici fossili cretacei che è opportuno ricordare.

Un dente di *Ptychodus latissimus* Ag. fu raccolto dal sig. Gasprini nella potente serie dei galestri multicolori, connessi a calcare alberese, di Poggio al Pino presso Strada nel Chianti; l'A. indica questo terreno come eocenico, ma trattasi dei soliti argilloschisti ofitiferi del Cretaceo della grande zona di Firenze-Greve-Radda, ecc., che presso Poggio al Pino passa, con intermezzo di calcari nummulitici, alla potente serie del Macigno eocenico disposto in pieghe multiple allineate da N. O. a S. E. circa.

Il dente di *Ptychodus decurrens* (*Pt. polygyrus* secondo il Cocchi che ne parlò sin dal 1866 nel suo lavoro *Sulla geologia dell'Alta Val di Magra*) trovato a Resti nel Vallone di Mommio, fu raccolto in quegli schisti rossigni e variegati che là affiorano tra i Calcari giurassici ed il Macigno eocenico; tale fossile anzi ha contribuito a far includere giustamente nel Cretaceo detti schisti rossi, già creduti eocenici, e che in parecchi punti dell'Appennino (per esempio tra la Garfagnana e Pievepelago) veggonsi con-

nettersi strettamente coi soliti argilloschisti ofitiferi che ancora oggi vogliónsi attribuire all'Eocene.

Due denti di *Ptychodus latissimus* (già indicati nel 1885 come *Pt. polygyrus* dal De Stefani nei suoi *Studi paleozool. sulla Creta dell'App. Sett.*) provengono dal T. Diaterna confl. del Santerno presso Firenzuola. Gli autori indicano che questi denti possono provenire dall'Eocene o dal Miocene dei dintorni di Firenzuola; ma trattasi invece di un vastissimo bacino di argilloschisti ofitiferi del Cretaceo (dai quali quindi è logico supporre derivino i denti sovraccennati) affioranti in anticlinale arricciata, circondata da vaste e potenti zone, specialmente arenacee, di Eocene; non vi esiste assolutamente alcuna zona miocenica.

Presso Montese (Prov. di Modena) il Mazzetti raccolse molti anni fa diversi denti di *Ptychodus*, che il Canestrelli determinò come *Pt. polygyrus* per gli esemplari provenienti da S. Martino di Salto, Montespecchio e Ca di Mattiozzo, mentre indicò come *Pt. decurrens* l'esemplare trovato alla Costa del Castelletto di S. Martino; la regione è indicata come dell'Eocene superiore, ma trattasi invece della solita formazione delle Argille scagliose calcarifere tanto sviluppate, specialmente ad Ovest di Montese, la cui età cretacea è anche provata dal rinvenimento di Inocerami (*In. Monticuli* ed *In. Cripsii*).

Uno *Ptychodus decurrens* Ag. di Sarzano in Prov. di Reggio è indicato dal Canestrelli come proveniente dal Miocene medio; ma tale fossile, dell'antica raccolta Doderlein, è ben più probabile che provenga dalle solite Argille scagliose largamente affioranti presso tale borgata sulla sinistra del T. Tassobbio.

Presso Montagnana (Prov. di Modena) nel Torr. Grizzaga lungo la via Giardini furono già raccolti tre denti di *Ptychodus decurrens* (indicati come *Pt. polygyrus* dal Pantanelli) (1) che il Canestrelli dice provenire dall'Eocene sup. o dal Miocene; siccome detta borgata è costruita sopra un lembo di marne sabbiose grigio-biancastre del Miocene poggiate sopra una estesissima zona di franosissime Argille scagliose, è ben più probabile

---

(1) Pantanelli D., *Denti di "Ptychodus" nell'App. mod.* ("Atti Soc. tosc. Sc. Nat.", 1904); Id., *Ancora su i resti di denti di "Ptychodus" nell'App. modenese* ("Atti Soc. Natur. di Modena", XXXVIII, 1905).

che tali denti derivino da questi terreni cretacei, tanto più che gli esemplari non presentano resti di marna aderente.

Un grosso esemplare di *Ptychodus latissimus* Ag., come vennemi determinato dal Prof. G. D'Erasmo, che sono lieto di qui ringraziare, fu rinvenuto nelle vicinanze di Rocca S. Maria (pure in prov. di Modena), paesello situato sopra una zona di marne sabbiose grigie mioceniche sotto cui affiorano largamente, verso Sud e verso Nord, le solite Argille scagliose grigio brune e variegate del Cretaceo; invece il Canestrelli scrisse che questo fossile (da lui determinato come *Pt. polygyrus* e dal Pantanelli come *Pt. decurrens*) proveniente dalla vecchia collezione Doderlein, deriva dal Miocene.

Del resto, malgrado che tutte queste specie di Pticodi per unanime consenso di tutti i Paleontologi siano proprie del Cretaceo superiore ed abbondanti particolarmente nel Senoniano (per es. nella *Scaglia* veneta, ecc.), il Canestrelli terminò il suo sovraccennato lavoro concludendo alla estensione assicurata degli *Ptychodus* all'Eocene ed al Miocene!

I frequenti rinvenimenti di denti di Pticodi risultano anche dagli *Appunti sulla Ittiofauna foss. dell'Emilia conservata nel Museo geol. dell'Univ. di Parma* (" Boll. Soc. geol. ital. ", XXXI, 1912) del Prof. G. De Stefano; egli infatti ebbe in esame ben tredici denti di questo genere provenienti dai dintorni, sia di Mulazzano (credo presso Lesignano Bagni) dove appare infatti una grande zona di Argille scagliose del Cretaceo coperte a Nord dalle sabbie e marne del Miopliocene ed a Sud dal Calcare marnoso dell'Eocene, sia di Vigoleno (presso Salsomaggiore) dove le formazioni marnoso-arenacee del Pliocene si appoggiano ad una vastissima zona di Argilloschisti costellati di affioramenti ofitici e che già presentarono, in varii punti, interessanti denti di varii generi di Pesci, tipici del Cretaceo, ricordati altrove (F. Sacco, *Format. ophitif. du Crétacé*, 1905).

Il De Stefano figura denti di *Ptychodus latissimus* Ag. (due esemplari), di *Pt. polygyrus* Ag. (quattro esemplari di Mulazzano e Vigoleno), di *Pt. decurrens* Ag. (tre denti), e di *Pt. mammillaris* Ag. (numerosi esemplari).

Nè posso dimenticare che il Dott. L. Pieragnoli, trattando di *Selaci eocenici di Toscana* (" Riv. it. Paleont. ", XXII, 1916), oltre agli *Ptychodus* già sopra ricordati di Mommio e di Poggio

al Pino presso Strada in Chianti, accenna che un altro dente di *Ptychodus* fu recentemente raccolto nella formazione argillosa di quest'ultima località, che contuttociò continua a riferire con certezza all'Eocene superiore.

Chiudo infine questi cenni di fossili cretacei degli Argilloschisti dell'Appennino ricordando l'interessante Memoria di V. Simonelli *Sopra un avanzo di Ittiosauro trovato nell'Appennino bolognese* (" Mem. Ist. Bologna ", 6ª serie, VII, 1910) e precisamente ad Olmo poco a Nord-Est di Castelluccio (Porrettano), cioè in quella potente formazione di argilloschisti (1), galestri ed alberesi con Ftaniti, Eufotidi, Oficalci, ecc. che da oltre trent'anni nella Carta geologica dell'Appennino dell'Emilia, pubblicata nel 1892, segnai ivi sviluppatissima, attribuendola al Cretaceo.

Sono quindi già tre resti di Ittiosauri che, assieme ad una trentina di denti di Pticodi, ad una cinquantina di Ammoniti, ad un centinaio di Inocerami, ecc. ecc., parmi dovrebbero bastare per convincere i geologi dell'età cretacea, non eocenica, degli Argilloschisti ofitiferi dell'Appennino settentrionale.

---

(1) Nelle colline di Castelluccio questi schisti argillosi, con calcare alberese, grugni ofitici (come presso detto paese), ecc., malgrado le frequenti contorsioni, inclinano in complesso a S.O., andandosi così ad immergere sotto la potentissima serie degli strati e banchi di *Macigno*, che però sono spesso anche ribaltati ed ampiamente contorti, come vediamo chiaramente sul fianco del M. Grande sopra Pianaccio, sul fianco occidentale del M. Granaglione, ecc.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LIX, DISP. **2**ª, **3**ª E **4**ª, **1923-1924**

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1924

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1923-924

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1923 - 18 novembre	1923 - 25 novembre
» - 2 dicembre	» - 9 dicembre
» - 16 »	» - 23 »
» - 30 »	1924 - 13 gennaio
1924 - 20 gennaio	» - 27 »
» - 3 febbraio	» - 10 febbraio
» - 17 »	» - 24 »
» - 2 marzo	» - 9 marzo
» - 16 »	» - 23 »
» - 6 aprile	» - 13 aprile
» - 27 »	» - 8 maggio
» - 15 maggio	» - 22 »
» - 5 giugno	» - 12 giugno
» - 19 »	» - 26 »
» - 2 luglio	» - 9 luglio

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 2 Dicembre 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Segre, Peano, Guidi, Sacco, Herlitzka, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza il Presidente Ruffini e i Soci Naccari e Grassi.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio Herlitzka ringrazia l'Accademia per l'onorevole incarico affidatogli di commemorare il Socio Foà.

Il Presidente porge al Socio Guidi le congratulazioni dell'Accademia per l'insigne onore accordatogli dalla Società Nazionale degli Ingegneri, la quale attribuivagli la 1ª Medaglia di Benemerenza. Il Socio Guidi ringrazia.

Il Presidente comunica quindi una lettera del nostro Socio straniero Émile Picard, il quale ringrazia per l'incarico conferitoglio di rappresentare l'Accademia al Cinquantenario della Società francese di Fisica.

Con lettera il Socio Rosa ringrazia per l'incarico di commemorare il suo Maestro e nostro Socio anziano Tommaso Salvadori.

L'Accademia Polacca di Scienze e Lettere presenta pure ringraziamenti per i voti e gli augurii che il nostro Sodalizio le ha rivolto nell'occasione del suo Cinquantenario.

Nel nome del figlio del compianto Socio Foà il Presidente fa omaggio all'Accademia dei fascicoli IV, X e XI del grandioso Trattato italiano di Anatomia patologica. Questi fascicoli contengono rispettivamente lavori dei Prof.: Cevedali, *I veleni quali fattori di malattia*; B. De Vecchi, *Teratologia generale*; P. Guizzetti, *Sistema nervoso*.

Il Socio Herlitzka fa omaggio di un volume da lui pubblicato nella Serie medica delle attualità scientifiche di Bologna dal titolo: *Fisiologia ed Aviazione.*

Il Presidente ringrazia i donatori.

Viene quindi approvata per gli *Atti* una Nota del nostro Socio Daniele Rosa, *Sulla necessità di carte anadiomeniche e catabaptiche in sussidio della biogeografia.*

LETTURE

Sulla necessità di carte anadiomeniche e catabaptiche in sussidio della biogeografia

Nota del Socio nazionale DANIELE ROSA

Chiamo " anadiomenica „ una carta di una qualsiasi regione terrestre dalla quale appaia l'epoca relativa dell'emersione (ultima) delle varie parti della regione stessa, una carta dunque in cui sia indicato (con tinte o tratteggiature più o meno intense) quali di queste parti sono emerse senza discontinuità solo, poniamo, dal pleistocene, quali già dal pliocene, dal miocene e così via.

Chiamo " catabaptica „ la carta di un mare dalla quale appaia analogamente l'età relativa delle singole parti di esso.

Mi tratterrò solo sulle carte anadiomeniche.

Non è a mia conoscenza che di simili carte già ne esistano, eppure esse avrebbero per i biogeografi un'utilità grandissima.

Le solite carte geologiche hanno dal punto di vista biogeografico ben scarso interesse.

Esistono bensì serie di carte paleogeografiche indicanti la configurazione successivamente presentata da una stessa regione in varie epoche (1) ma, quali sono, esse non rispondono bene al nostro scopo, sia perchè sono complicate da dati riguardanti terre che furono altra volta emerse ma che oramai sono sommerse, sia perchè il ricavare i dati che ci servono dal confronto di più carte riferentisi ad epoche successive è lavoro lungo e faticoso, sia sopratutto perchè una regione segnata su due carte imme-

(1) In questo scritto intendo il termine " epoca „ nel senso volgare, non nello stretto senso geologico.

diatamente successive come emersa può benissimo, senza che ciò consti al biogeografo, essere stata nell'intervallo sommersa. È tuttavia in base a serie di carte di questo tipo che si può costruire per ciascuna regione una carta anadiomenica corrispondente alla definizione che ne ho data in principio.

Sarebbe desiderabile che per ciò che riguarda i terreni più recenti queste carte fossero, dal lato cronologico, un po' dettagliate, mentre i terreni più antichi, quelli, per es., il cui attuale stato emerso data già da epoche preterziarie, potrebbero senza inconveniente essere indicati complessivamente con una medesima tinta o tratteggiatura.

Noto espressamente che le terre che furono sepolte sotto i ghiacci devono, durante questo periodo, essere considerate come terre sommerse.

Forse non tutti i biogeografi sentono fin d'ora di quale utilità sarebbero loro codeste carte, ma lo sentirebbero certo tosto che esse ci fossero, perchè da esse ricaverebbero subito che fra i fattori che determinano il carattere faunistico o floristico di una regione, quello dell'antichità (intesa nel senso qui indicato) ha importanza grandissima. Cito solo un paio d'esempii.

Tutta l'Europa settentrionale, al di là di una linea sinuosa che giunge sino al cuore della Germania, manca di forme proprie (endemiche) di lombrichi. Ora il Michaelsen ha spiegato bene questa singolarità notando che quella linea coincide quasi esattamente con quella che segna il limite delle terre che nel periodo glaciario rimasero interamente coperte dalle nevi e dai ghiacci. Evidentemente le terre a Nord di questa linea avevano, durante questo periodo, perduto i loro lombrichi e, dopo la loro riemersione, furono invase da quelli delle regioni limitrofe; perciò esse mancano di lombrichi endemici mentre questi nel resto dell'Europa sono numerosissimi.

Nel fatto qui citato si tratta di " emersione „ dai ghiacci, ma fatti ugualmente eloquenti e che si riferiscano invece all'epoca relativa dell'ultima emersione dal mare se ne possono facilmente citare in gran numero.

È un fatto ben noto quello dello speciale carattere biogeografico delle isole di emersione relativamente recente, come pure quello della localizzazione di certe forme antiche su taluni nuclei (asili) di antica emersione, del quale ultimo fatto ci dà un bel-

l'esempio un geco (*Phyllodactylus europaeus*) che da noi non si trova che in Sardegna (terra in buona parte emersa fin dal paleozoico) e poi sul Monte Argentaro (parimente paleozoico).

Ma ci son pure già noti molti fatti più imponenti, fra i quali molto degni di nota sono quelli recentemente messi in luce dal Colosi (1) riguardo alla distribuzione geografica dei potamonidi, gruppo affatto cosmopolita, del quale ci è esempio ben noto il nostro granchio d'acqua dolce (*Potamon edule* o *Thelphusa fluviatilis*).

Il Colosi ha trovato che, fra questi potamonidi, i tricodrilini occupano aree che " corrispondono perfettamente alle terre che nell'America centrale e meridionale si trovavano emerse durante il cretaceo e che non subirono ulteriori immersioni ", che invece i pseudotelfusini abitano in America le terre emerse dopo il cretaceo e che molti fatti analoghi ci sono presentati da altri gruppi di potamonidi anche nelle altre parti del globo.

Il riconoscimento di simili rapporti fra il carattere faunistico o floristico di una regione e l'antichità di questa come terra ininterrottamente emersa è di capitale importanza perchè sul campo della biogeografia si trovano ora di fronte due tesi fondamentali e diametralmente opposte.

Abbiamo in fatti, da un lato, la solita tesi dei " centri di creazione o di apparizione " (col relativo corteo di fantastiche migrazioni e di creazioni di continenti) e, dall'altro, la nuova tesi del cosmopolitismo originario delle forme più semplici e primitive e della successiva localizzazione delle specie procedente di pari passo col moltiplicarsi e l'evolversi di queste, tesi, quest'ultima, che è stata quasi contemporaneamente enunciata da me (" Boll. Museo Zoolog. ", Torino, 1909) e da H. B. Guppy (" Petermann's Mitteilungen ", 1910) e che io ho poi ampiamente svolta nella mia " Ologenesi " (2) [Vedi anche Willis (3)].

---

(1) Colosi G., *La distribuzione geografica dei " Potamonidae "* (" Rivista di Biologia ", vol. III, fasc. III, Roma, 1921).

(2) Rosa D., *Ologenesi, nuova teoria dell'evoluzione e della distribuzione geografica dei viventi* (Firenze, ed. Bemporad, 1918).

(3) Willis J. C., *Age and Area*... with chapters by Hugo de Vries, H. B. Guppy, E. M. Reid, James Small (Cambridge University Press, 1922) (V. recensione in " Rivista di biologia ", vol. IV, fasc. VI, Roma, 1922).

Come ho spiegato nel mio volume, noi, partendo dalla seconda di queste due tesi, siamo necessariamente condotti a porre le migrazioni da terra a terra in seconda linea ed a ritenere che " la prima base delle concordanze o delle differenze biogeografiche fra due terre è data dalla maggiore o minore concordanza dell'epoca della loro emersione „. Il verificare dunque se i fatti sono veramente quali la nostra teoria li prevede ci darebbe modo di decidere fra le due opposte tesi.

Tale decisione interessa i biogeografi e, in generale, i biologi, ma deve pure interessare gli stessi geologi, i quali, se vince la nuova tesi, saranno finalmente liberati dalle insistenze della biogeografia ortodossa che continuamente li assedia con richieste, spesso terribilmente indiscrete, per ottenere che le vengano concesse tutte quelle passate connessioni e sconnessioni fra le terre o fra le acque che le tornano comode per salvare i suoi principii.

Forse talune carte anadiomeniche interesseranno un poco anche gli antropologi. Ho in memoria una certa seduta nella quale un valente antropologo aveva rilevato come fatto singolare la mancanza di traccie dell'uomo paleolitico nella pianura del Po. Un geologo che si trovava presente gli ricordò che ai tempi dell'uomo paleolitico la pianura del Po era ancora in buona parte sepolta sotto le acque.....

Modena, R. Istituto zoologico, novembre 1923.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Dicembre 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Guidi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Presidente Senatore Ruffini.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio D'Ovidio fa omaggio all'Accademia nel nome dell'autore Prof. Giuseppe Bernardi di due suoi lavori, dai seguenti titoli:

1° *Tre teoremi notevoli, dei quali il primo di Trigonometria e gli altri di Poligonometria;*

2° *Soluzionario di Esercizi di Trigonometria piana*; e ne discorre brevemente.

Il Presidente interessa l'Accademia a due opuscoli del Prof. Carlo Bertone, di cui uno è dedicato alla memoria del nostro compianto Presidente Michele Lessona, e l'altro a ricordo di Frate Paolo Sarpi, considerato come anatomico e fisiologo.

Dal Socio Sacco si fa omaggio dell'annata XII[a] dell'*Urania* e di una sua Memoria: *Una placca isolata di cretaceo sul Miocene nell'Appennino reggiano*, che l'A. ritiene dovuta ad una ripiegatura e ad un rovesciamento.

Lo stesso Socio Sacco presenta per la pubblicazione negli *Atti* accademici un suo recentissimo studio dal titolo: *I fenomeni selenologici in rapporto colla gravità e l'attrazione.*

Il Socio Sacco brevemente accenna all'importanza della gravità e della attrazione geosolare sulla luna nella spiegazione dei grandiosi e così accentuati fenomeni di ribollimento e connessi, che si osservano sulla superficie della Luna.

LETTURE

I fenomeni selenologici in rapporto colla gravità e l'attrazione

Nota del Socio nazionale residente prof. FEDERICO SACCO

Nello studio e nell'interpretazione della superficie lunare, lasciando da parte le teorie di turbini, di sprofondamenti, di precipitazioni meteoritiche e simili, pare più logico e naturale di adottare l'idea di un particolare vulcanismo o meglio di una specie di ribollimento un po' analogo a quello che presentano oggi sulla terra i Vulcani hawaiani, come cercai di dimostrare in un mio " Essai schématique de Sélénologie „ (1907); rimane però sempre aperto il problema riguardante la grandiosità straordinaria di tale fenomeno selenologico, avendo i Circhi lunari diametri di diecine ed anche centinaia di chilometri, come pure sono di dimensioni gigantesche le così dette raggiere o zone brillanti, i corrugamenti della superficie dei *Maria*, le fratture con enormi spostamenti verticali, la elevazione veramente straordinaria delle montagne lunari, ecc.

Già nel sovracitato " Essai de Sélénologie „ per spiegare tali fenomeni avevo accennato alla *minor forza di gravità* alla superficie lunare rispetto a quella verificantesi alla superficie terrestre, cioè $^1/_6$ circa, in causa sia del minor volume ($^1/_{49}$), sia della minor densità del globo selenico (3,4) rispetto a quello geico (5,6); ma tale fatto, per quanto certamente importante, non basta per spiegare la straordinaria grandiosità di detti fenomeni selenologici.

La *mancanza di atmosfera* sulla Luna rappresenta pure, rispetto alla Terra, una pressione minore ed anche un ostacolo minore per la produzione di certi fatti esistenti sulla superficie lunare, come per es. le raggiere luminose; ma tale mancanza ha un'importanza relativamente piccola.

Di un altro fatto importante, già accennato dal Faye (C. R. Ac. Sc. Paris, 1858, e Ann. Long. 1881, secondo calcoli di Newton e Lagrange), devesi tener conto per tale spiegazione, cioè della forte *attrazione geo-solare sulla Luna*. Infatti noi sappiamo quanta influenza abbia l'attrazione luni-solare sulla Terra, specialmente sulle masse acquee come generatrice di marea, tanto più quando, nei periodi di sizigie, le due influenze (che stanno fra loro come *7* e *3* circa) si sommano, producendo un sollevamento che teoricamente sarebbe anche solo minore di un metro ma che in realtà, per cause diverse, è spesso di varii metri, anche di oltre una ventina in certe regioni.

Inoltre dalle ricerche recenti sappiamo come, in causa dell'at trazione lunare, si verifichi pure una specie di marea litosferica che in periodi di congiunzione può essere anche di quasi $^1/_2$ metro nelle regioni equatoriali, malgrado la rigidità che ha ormai acquistato la crosta terrestre; ed è facile comprendere quante importanti azioni meccaniche (p. es. di compressione, di stiramento, ecc.) possano esser prodotte dalla somma degli sforzi che deve quindi subire la Litosfera.

È probabile che, come pensano Mesnard e Berget, l'attrazione lunisolare, producendo movimenti alternati di sollevamento e di abbassamento della crosta terrestre, possa facilitare o provocare i terremoti; giacchè le statistiche indicano che i terremoti sono specialmente frequenti all'epoca degli equinozi, cioè delle grandi maree. Inoltre, siccome tale attrazione può verificarsi anche sulle masse magmiche giacenti, a varia profondità, sotto la crosta terrestre, questa, specialmente là dove è fratturata od altrimenti indebolita, deve risentirne gli effetti con speciali movimenti sismici o simili; del resto parecchi studiosi, come Perry, Falb, Vogler, ecc., ammettono una certa influenza dell'attrazione lunare sul vulcanismo terrestre.

Stabilita ad ogni modo una notevole influenza dell'attrazione lunisolare sulla Terra, specialmente sulle sue masse liquide, naturalmente devesi ammettere un'influenza ben maggiore del globo terrestre sulla Luna, considerando la sua massa tanto maggiore.

Orbene calcoli, per quanto solo approssimativi (per i quali ebbi gentile aiuto dai colleghi professori Silva e Roggero, che cordialmente ringrazio), indicherebbero che il valore del rapporto

tra la diminuzione della gravità in un punto della Terra per effetto dell'attrazione lunisolare e la diminuzione della gravità in un punto della Luna per effetto dell'attrazione geosolare sarebbe ad un dipresso (in casi di *maximum*) come **1** a **15**; per cui, tenendo anche conto che la gravità sulla Luna è circa $^1/_6$ di quella sulla Terra, tale rapporto diventa addirittura di **1** a **90** circa, il che servirebbe già abbastanza a gettar molta luce sulla produzione dei fenomeni selenologici.

Ma un'altra importante considerazione è ancora da farsi sull'argomento in questione. È noto come, secondo gli studi di parecchi fisici ed astronomi, con a capo G. Darwin, la Luna, staccatasi dalla Terra, sia poi andata a poco a poco allontanandosene; io credo che questo distacco siasi verificato in un'epoca molto anteriore a quella generalmente indicata da alcuni studiosi ed in uno stato piuttosto gasoso che non magmico quale molti credono; ma ad ogni modo si può ben ammettere che il globo lunare siasi trovato ancora in stato magmatico quando la sua distanza dal globo terrestre era minore che non oggi.

Orbene noi sappiamo che l'azione perturbatrice di un astro sopra un altro è in ragione inversa del cubo della distanza tra di loro; così per esempio se la Luna si trovasse a metà dell'attuale sua distanza dalla Terra, la sua forza generatrice della marea sul globo terrestre sarebbe 8 volte maggiore che non oggi.

Ciò posto, se il globo lunare fosse per esempio a metà distanza, dell'attuale, dal globo terrestre (sempre considerando il caso, direi, massimo, di sizigie e di posizione zenitale), il rapporto tra l'azione lunisolare attuale sulla Terra e l'azione geosolare d'allora sulla Luna sarebbe, non più semplicemente di **1** a **15** come oggi, ma bensì come **1** a **120** circa; ciò che, moltiplicato per 6 (minor gravità lunare rispetto alla terrestre, in rapporto colla relativa massa), ci dà la notevole cifra di rapporto come **1** a **720** circa.

Ma anche considerando i casi non massimi e che la distanza tra Terra e Luna non fosse la metà ma solo un po' minore dell'attuale, come è probabile si verificasse in un'epoca astrale non molto lontana (quando il globo lunare era ancora magmatico o solo parzialmente incrostato alla superficie), noi possiamo razionalmente ammettere che l'azione gravitazionale sulla super-

ficie lunare fosse allora qualche centinaia di volte minore che non quella che siamo abituati a considerare come normale, cioè quella verificantesi oggi sulla superficie terrestre.

Allora i problemi riguardanti molti dei fenomeni selenologici si rischiarano di nuova e viva luce e ne risulta una grande semplificazione nella loro spiegazione.

Allora infatti comprendiamo facilmente come sulla superficie della Luna abbia potuto verificarsi un fenomeno così generale e così intenso di ebollizione da assumere quel carattere di grandiosità che ci mostra oggi la sua irrigidita superficie (1).

Comprendiamo come per lo stesso motivo i rilievi esterni ed interni dei circhi, crateri, ecc. prodotti da questi ribollimenti sulla superficie lunare abbiano potuto raggiungere altezze relativamente assai notevoli, anche di 6-7 e più mila metri.

Comprendiamo varii fenomeni dei circhi e crateri, anche in rapporto ad antiche maree magmatiche subcrustabili, quando essi erano ancora attivi, rappresentando fori di comunicazione fra l'interno e l'esterno della crosta lunare.

Comprendiamo come per la stessa causa, unita alla quasi mancanza di atmosfera sulla Luna, abbiano potuto prodursi quelle lunghissime zone chiare, luminose (irradiantisi sulla superficie lunare per centinaia ed anche per oltre un migliaio di chilometri dal punto di origine), dovute (per esplosione vulcanica) a violente proiezioni di fini ceneri con Cloruri, Solfuri, ecc., zone analoghe alle tristamente famose *Nuées denses* o *ardentes* così ben descritte dal Lacroix per la terribile eruzione della Montagne Pelée alla Martinica nel 1902.

Comprendiamo come abbiano potuto prodursi certi speciali forti spostamenti di crosta lunare (nonchè certi *efforts de soulèvement* di cui spesso parlano nei loro studi i signori Loewy e Puiseaux), che dovettero a loro tempo originare fortissimi sele-

(1) Ricordiamo in proposito la legge fisica che la tensione o forza elastica del vapore che si svolge da un liquido in ebollizione è eguale alla pressione che esso sopporta; ciò che ci spiega, per es., il noto fatto che, mentre l'acqua bolle a 100° a pressione ordinaria, bolle già a 84° sulla cima del M. Bianco (4810 m. s. l. m.), e bolle anche a 50° se portata alla pressione di solo più 9 centim. di mercurio.

nomoti; quantunque però gran parte delle fratture con scorrimento siano invece collegate a sprofondamenti.

Nella stessa causa, cioè una relativamente debole forza di gravità sulla Luna, e fors'anche negli antichi suoi movimenti grandiosi di maree, possiamo trovare una delle ragioni per cui si poterono costituire quelle curiose, interessantissime, forti rughe ondulate che (un po' analogamente a quelle che formansi d'estate sui nostri pavimenti di asfalto) vediamo svilupparsi su quasi tutti i *Maria* lunari (vedi la Carta selenologica nel libro sopracitato), più o meno numerose, più o meno alte, estese anche centinaia di chilometri, fra loro distinte o raggruppate, spesso ramificate o contorte, disposte in vario senso, ma, in complesso, allineate prevalentemente da Nord a Sud ad un dipresso; quasi immense onde irrigidite della antica pasta magmica del globo lunare (allora forse più rapidamente ruotante che non oggi attorno al suo asse polare); ciò ricorda certi giganteschi allineamenti montuosi, pure di andamento talora submeridiano (per es. quello grandioso americano) e specialmente tante collane o ghirlande (per es. quelle della Polinesia e Melanesia, delle Aleutine, delle Antille, delle Sandwich meridionali, ecc.) che sono così caratteristiche dell'Orogenia terrestre.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Dicembre 1923

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Guidi, Grassi, Panetti, Sacco, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Socio Somigliana.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio Sacco presenta e fa omaggio all'Accademia di due lavori del D[r] Adriano Gianelli dai titoli: *Meccanismo d'azione dei Fermenti. — Catalisi e Catalizzatori.*

Il Segretario Mattirolo a nome del Socio Naccari presenta una Nota del D[r] Felice Capra, *Sulla Fauna della Grotta del Pugnetto in Val di Lanzo.* Il D[r] Capra, unitamente ad altri naturalisti, ha durante alcuni anni ripetutamente esplorata la detta Grotta, raccogliendovi notevole materiale zoologico che egli descrive nella sua Nota, avendo specialmente riguardo ai coleotteri anoftalmi, tra i quali egli descrive un nuovo Sottogenere la *Della Beffaella* ed una specie la *Della Beffaella Roceae* che descrive minutamente. Il lavoro del D[r] Capra è accolto per la pubblicazione negli *Atti*.

Il Vice Presidente presenta quindi una Nota sua dal titolo: *Osservazioni sopra alcune specie della Fauna a rudiste del Colle di Medea (Friuli)*, che viene accolta per gli *Atti*.

Il Vice Presidente, osservando che la presente adunanza chiude l'anno 1923, presenta ai Colleghi augurii cordiali di buon anno.

LETTURE

Osservazioni sopra alcune specie della fauna a rudiste del Colle di Medea (Friuli)

Nota del Socio nazionale residente C. F. PARONA

Da tempo mi proponevo la revisione della fauna a rudiste del Colle di Medéa presso Cormons (Udine), sulla base dei tipi della collezione che servì al PIRONA per la sua classica monografia (1). Ma ritardai troppo: l'incendio ed il saccheggio, durante la guerra, dell'Istituto Tecnico di Udine ebbero anche per conseguenza la perdita della preziosa collezione e quindi l'impossibilità di una revisione vera e completa della fauna. Le descrizioni dell'autore ed i disegni dei fossili lasciano spesso insolubili le incertezze riguardo ai caratteri sui quali sono ora essenzialmente fondate le diagnosi e le determinazioni generiche e specifiche, e di conseguenza sono scarsi gli elementi per l'esame critico e l'interpretazione di parecchie fra le forme distinte dal benemerito geologo e paleontologo friulano.

Dal compianto prof. TARAMELLI e dall'amico e collega DAL PIAZ ebbi in cortese comunicazione le collezioni dei musei di Pavia e di Padova, alle quali si aggiunse il materiale che il dott. E. FERUGLIO, accogliendo molto gentilmente e premurosamente una mia raccomandazione, volle raccogliere sul posto e inviarmi, accompagnandolo con uno schizzo stratigrafico dimostrativo. Se non che il giacimento è ormai spogliato dei fossili resi liberi, in stato di buona conservazione, dalla lenta e delicata azione meteorica, e l'estrazione diretta dal calcare compatto e

(1) G. A. PIRONA, *Le ippuritidi del Colle di Medea,* " Mem. d. R. Istit. Veneto ", XIV, 1869.

tenace dà un materiale frammentizio, poco utile per uno studio paleontologico di revisione. Devo dunque limitarmi a poche parziali osservazioni, e portare un ben modesto contributo allo studio della ricca, singolare e caratteristica fauna, non trascurando di ricordare che qualche sua specie fu oggetto di studio per parte di Douvillé, Toucas e Klinghardt e che la stratigrafia e l'età del giacimento fossilifero furono prese in considerazione dal Dainelli (1).

Ciò premesso, passo ad esporre l'elenco delle specie, nell'ordine adottato dal Pirona, aggiungendo per ciascuna di esse gli apprezzamenti suggeriti dall'esame che ne ho potuto fare.

Sauvagesia Meneghiniana Pir. — Pirona, 1869, pag. 14, tav. I, fig. 1, 2 (*Sphaerulites*); Toucas, 1907-09, pag. 90, tav. VII, fig. 9-13. Controllando il riferimento generico e specifico di una valva inferiore, del Museo di Pavia, ho notato che l'interfascia è ben distinta, perchè le costelline longitudinali sono appena percettibili, mentre sono marcati i solchi di accrescimento. Spetta al gruppo della *S. Sharpei*. Essa fu raccolta anche nel Carso istriano, e uno dei due esemplari di valva inferiore (Museo Civ. di Trieste), di statura corrispondente a quella dell'esemplare più grande (del giacimento di Medea) figurato da Toucas, presenta la fascia anteriore (E) in rialzo, a differenza del grande esemplare della tavola del Pirona.

Sphaerulites Visianica Pir. — Pirona, pag. 16, tav. II, fig. 1-7: specie imperfettamente sconosciuta, probabilmente *Sauvagesia*.

Sphaerulites Pasiniana Pir. — Pirona, pag. 18, tav. V, fig. 1-5. Toucas (op. cit., pag. 66) dice che questa forma sembra avvicinabile a *Rad. Sauvagesi* d'H. F.: io non ho esaminato esemplari della specie del Pirona, ma, a giudicare dalle figure del Taramelli, non risulta molto fondato questo ravvicinamento,

---

(1) H. Douvillé, *Sur quelques Rudistes à canaux*, " Bull. Soc. géolog. France ", IV, 1904. — A. Toucas, *Études sur la classif. et l'évolut. des Radiolitidés*, " Mém. Soc. géolog. France ", Paléontologie, N° 36, 1907-09. — G. Dainelli, *Introduz. allo Studio del Cretaceo friulano*, " Soc. tosc. Sc. Nat. ", Mem. XXVI-XXVII, 1911. — F. Klinghardt, *Neue Rudistenfauna a. d. Maastrichtien von Maniago (Friaul)*, " Archiv f. Biontologie ", Berlin, V, 1921.

non fosse altro perchè la forma di Medea ha la valva superiore alta e cupolare, mentre nel *R. Sauvagesi* è piana o leggermente convessa: spetta al gen. *Radiolites.*

Radiolites (Radiolitella) ***Guiscardiana*** Pir. — Pirona, pag. 19, tav. III, fig. 2-7 (*Sphaerulites*). Il Douvillé (op. cit., 1904, pag. 533), istituendo la sezione *Radiolitella*, fissa come tipo la *Radiolitella forojuliensis* Pir. e la figura in una tavola di riuscitissima riproduzione fotografica (fig. 1-3, tav. XIV): se non che, al semplice esame delle figure, risulta evidente che esse non corrispondono affatto alle figure della *Chama forojuliensis* del Pirona (tav. X, fig. 13-16); mentre la corrispondenza è assai più stretta, e potrei dire identità, colle figure della *R. Guiscardiana* e con parecchi esemplari del Museo di Torino, avuti da B. Gastaldi dal Pirona, e con altri del Museo di Pavia raccolti dal Taramelli: e tale corrispondenza si verifica nella forma conica a vaso della valva inferiore, in quella appiattito-depressa della valva superiore, nei caratteri ornamentali, nella conformazione dell'apparato sifonale, nonchè nello sviluppo, distintivo della sezione, dei canali poligonali entro le lamine esterne, sboccanti sul lembo dell'apertura. Nessun dubbio sul fatto che tipo della sezione *Radiolitella* non è la *Chama forojuliensis*, bensì la *Rad. Guiscardiana* Pir. Sta per altro l'affinità rilevata dal Douvillé fra *Chama forojuliensis* e *Sphaer. Massalongiana* Pir.; ed anche a questo riguardo è a deplorare che i tipi siano andati distrutti, e che non sia possibile di verificare direttamente se realmente esse siano *Radiolitella*, e se si tratti, come propendo a ritenere, di una sola e non di due forme specifiche. Posso soltanto notare che un esemplare, raccolto da Taramelli ed attribuibile alla *Sph. Massalongiana*, secondo la figura del Pirona (fig. 8, tav. III), presenta il margine d'apertura della valva inferiore, a pieghe ben marcate, senza traccia di apertura di canali. Toucas (op. cit., pag. 76, tav. XV) descrive la *R. Guiscardi* Pir. sp., ma non accenna a presenza di canali, e figura due esemplari tipici di Medea; e vi attribuisce anche due valve del Santoniano di Francia, che certamente appartengono ad altra specie. Nè parmi possa essere ritenuto esatto il riferimento a *Radiolitella forojuliensis* (secondo Douvillé) dell'esemplare con valva superiore ad alta cupola conica, illustrato dal Klinghardt (op. cit., pag. 31, tav. VIII, fig. 4). A giudicare

dall'abbondanza di frammenti di guscio a canali, la *Radiolitella Guiscardiana* è una delle specie più frequenti della fauna.

Sphaerulites Beaumonti Bayle? — PIRONA, pag. 20, tav. VI, fig. 1 e 2. — Descrizione e figure non dànno modo di controllare il riferimento dubbioso del PIRONA al *Radiolites Beaumonti*.

Sphaerulites ponsiana d'Arch.? — PIRONA, pag. 20, tav. II, fig. 8 e 9. — Le recenti descrizioni e le fotografie date da TOUCAS e DOUVILLÉ per il *Praeradiolites ponsanius* escludono evidentemente l'avvicinamento proposto con dubbio dal PIRONA; più probabile sembra il riferimento al *Rad. spinulatus* Par.

Sphaerulites medeensis Pir. — PIRONA, pag. 21, tav. VI, fig. 4-6. — Non conosco esemplari di questo *Radiolites*, nè ho elementi per giudicare della sua realtà come specie, che in ogni caso è imperfettamente conosciuta.

Sphaerulites Catulli Pir. — PIRONA, pag. 22, tav. VIII, fig. 15 e 16. — TOUCAS (op. cit., pag. 126) considera il frammento come indeterminabile. Si può trascurare anche perchè PIRONA ha messo in dubbio che provenga dal giacimento di Medea.

Sphaerulites ponderosa Pir. — PIRONA, pag. 23, tav. IV, fig. 1 e 2. — TOUCAS (ibid.) ha già notato come descrizione e figure non diano elementi sufficienti per la determinazione precisa del genere e per un sicuro confronto con specie presumibilmente affini.

Radiolites Zignana Pir. — PIRONA, pag. 25, tav. VII, fig. 1-11. — Questo radiolite, ben descritto e ben figurato nell'opera del nostro autore, non è da scambiare col *Rad. squamosus* d'Orb., al quale è attribuito dal TOUCAS (pag. 71, tav. XIII, fig. 12). Basta a contraddistinguerla la valva inferiore cilindroide, esile, lunghissima rispetto al tenue suo spessore, alquanto contorta, colla superficie del guscio pressochè liscia. La valva del Colle di Medea figurata dal TOUCAS (fig. 12) già si distingue dalla specie d'Orbignana per la sua lunghezza: ma nel confronto è necessario riferirsi al tipo, quale risulta dalla figura della maggiore valva nella tavola del PIRONA: sebbene incompleto, perchè spezzato alla base di attacco, esso ha una lunghezza di mm. 175, col diametro all'apertura di soli mm. 23. E le differenze mi sono confermate dall'esame diretto di parecchi esem-

plari; uno dei quali porta tracce di pieghe ottuse longitudinali, carattere eccezionale al quale non accenna l'autore.

L'esame della sezione trasversale (fig. 1), qualora non presentasse la piega legamentare (L), per quanto pochissimo sviluppata fra le tracce dell'apparato cardinale, suggerirebbe l'avvicinamento al gen. *Bournonia*, data la differenziazione sifonale per l'accentuata convessità della parete interna, fra due depressioni corrispondenti alle prominenti esterne fasce dei seni, similmente a quanto si nota nella *Bournonia excavata*. Ma i rari individui che hanno sufficientemente ben conservata la valva inferiore all'apertura e la valva superiore, meglio ancora quelli che hanno le due valve riunite e a posto, presentano una particolarità assai interessante sulla quale conviene soffermarci. Vi si osservano cioè due osculi evidenti ai punti di contatto del margine della valva superiore coi due prolungamenti, che le sporgenti e crestate fasce dei seni sopraelevano a guisa di cor-

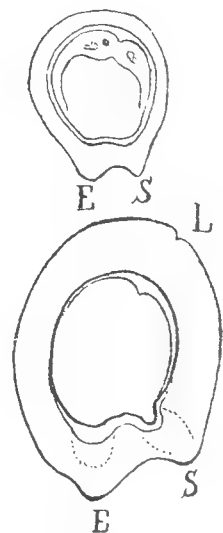



Fig. 1.

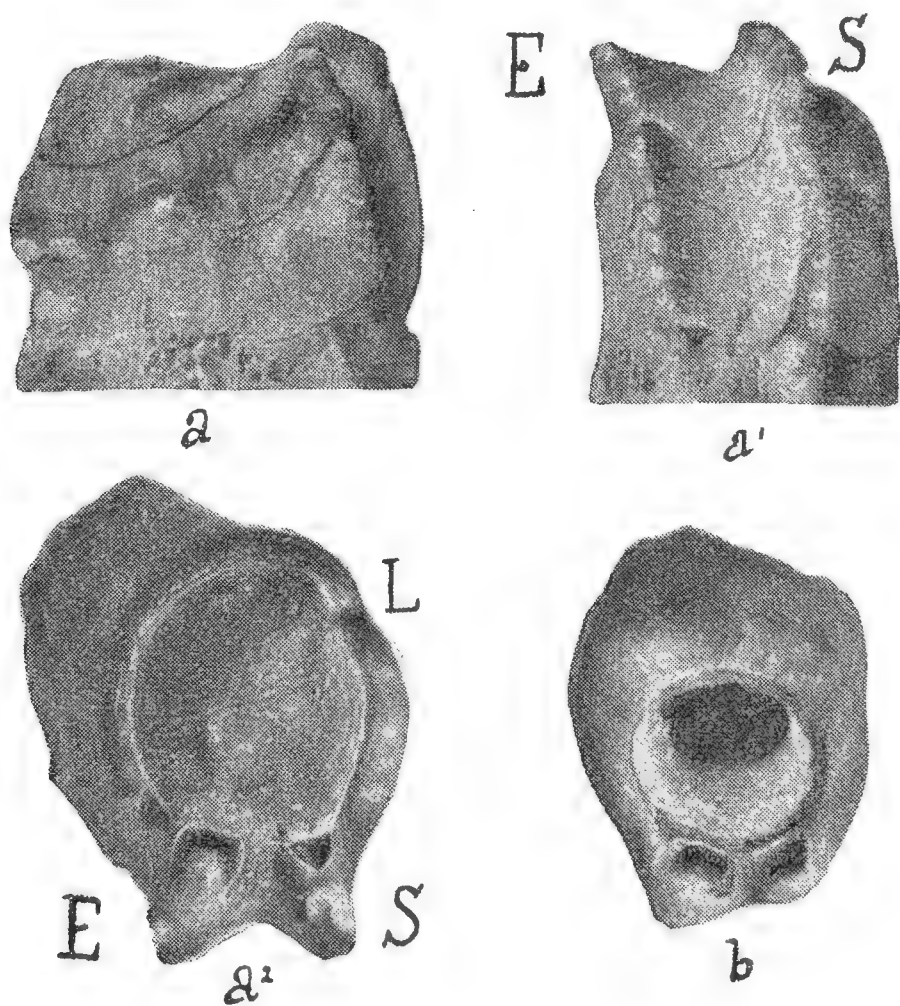



Fig. 2 $\left(\frac{2}{1}\right)$.

netti dal margine dell'apertura (fig. 2, *a*, *a*¹, *a*², *b*): più precisamente si rileva che una distinta cavità, alla base dell'uno e dell'altro cornetto, contribuisce a formare l'osculo. Nei campioni

in esame il margine della valva superiore non è conservato quanto sarebbe necessario per permetterci di verificare precisamente in che misura e come la valva superiore contribuisca a costituire gli osculi. Appare ben chiara per altro la conformazione delle cavità osculari dei cornetti: l'una e l'altra sono a nido di rondine: ad apertura triangolare quella corrispondente alla via d'uscita (S), più ampia e subtriangolare quella d'entrata (E).

Nei radiolitidi la presenza di osculi non è un fatto nuovo: ma, all'infuori di qualche accenno in poche forme del gen. *Sphaerulites*, soltanto il gen. *Lapeirousia* è caratterizzato da veri osculi nella valva superiore, corrispondentemente a protuberanze arrotondate interne della valva inferiore (pseudopilastri) (1). Per il gen. *Radiolites* l'esistenza di osculi non era stata finora avvertita, ed è nuova l'osservazione, che le vie di comunicazione, d'ingresso e d'uscita fra l'esterno e l'interno, siano, parzialmente o totalmente, scavate e a riparo nella base delle protuberanze a cornetto, che coronano le robuste ed eccezionalmente sporgenti fascie crestate dei seni. Qualora tale carattere si riscontrasse in altre forme, ed è probabile che ciò si verifichi ad es. nel *Rad. Gastaldiana* Pir., e quando più esattamente se ne potesse valutare l'importanza funzionale, si potrebbe pensare all'opportunità di istituire almeno un nuovo sottogenere (*Medeella*), considerando anche il fatto che nel complesso l'abito quasi liscio di questo radiolitide, dall'evidente solco esterno del legamento, è notevolmente diverso da quello ornato-costato delle forme del gen. *Radiolites*. Frequente nel giacimento di Medea, è fra le specie più caratteristiche della fauna, e si ripresenta in calcari dei dintorni di Gradisca (M. S. Michele) e di Trieste (Opcina, Grapada, ecc.).

Radiolites Gastaldiana Pir. — Pirona, pag. 27, tav. VIII, fig. 1-5. — Toucas (pag. 71) riunisce *R. Zignana* e *R. Gastaldiana* al *R. squamosus* d'Orb.: a questo riguardo occorre osservare, che se è evidente l'affinità dei due radioliti di Medea colla specie del D'Orbigny, in modo particolare per il

---

(1) H. Douvillé, *Étud. sur les Rudistes,* " Mém. Soc. géolog. France ", Paléontol., N° 41, 1910, pag. 25.

carattere delle lamine esterne, della valva inferiore, a margine rovesciato verso il basso e per l'ondulazione del margine dell'apertura, specificamente sono ben distinte; la *R. Zignana* per i caratteri già considerati, la *R. Gastaldiana* per la statura sempre piccola, la forma della valva inferiore sempre molto svasata e bassa e per le pieghe di accrescimento assai avvicinate. Nell'aspetto complessivo e nei caratteri della regione sifonale ricorda piuttosto assai da vicino il *Rad. Beaumonti* Bayle, dello stesso gruppo nella ripartizione delle specie secondo Toucas.

A questa forma del Colle di Medea, che dunque conviene di conservare distinta, spettano parecchi esemplari di valve inferiori provenienti dal calcare grigio, marnoso tra S. Croce e Prosecco presso Trieste, e dal calcare bianco-cinereo marnoso del M. Subiente presso Montana.

Radiolites lumbricalis d'Orb. — Pirona, pag. 28, tav. VIII, fig. 13 e 14. — La corrispondenza colla *Distefanella lumbricalis* d'Orb. non è affatto dimostrata.

Radiolites Taramellii Pir. — Pirona, pag. 29, tav. IX, fig. 1-7. — Toucas (pag. 126) dice, a torto, che le figure non permettono una determinazione nemmeno approssimativa; ma è da notare che la descrizione è chiara e particolareggiata e che la specie, frequente, è buona. Non appartiene al gruppo della *Durania cornupastoris* e non è una *Durania*; ha invece caratteri di affinità col *Rad. spinulatus* Par., già ricordato a proposito della *Sphaerul. ponsiana* d'Arch. in Pirona.

Eoradiolites fascicularis Pir. — Pirona, pag. 30, tav. VIII, fig. 6-12 (*Radiolites*). — Toucas (pag. 22, tav. I, fig. 13 e 14) attribuisce questa forma al gen. *Agria*; ma le osservazioni del Douvillé su questo genere e la illustrazione del suo n. g. *Eoradiolites* persuadono a ritenerla appartenente a quest'ultimo genere. Ciò risulta giustificato dai caratteri dell'apparato sifonale, che perfettamente corrispondono a quelli dell'*Eorad. Davidsoni* Hill, tipo del genere, dal quale non differisce molto nei caratteri ornamentali.

Biradiolites angulosus d'Orb. — Pirona, pag. 31, tav. IX, fig. 8-16 (*Radiolites*). — In considerazione della nuova illustrazione fatta dal Toucas di questa specie del Turoniano (angoumiano), propenderei ad eliminare il dubbio sul riferimento del Pirona, e a ritenere esatta l'attribuzione al *Biradiolites angulosus* d'Orb.

Radiolites Massalongiana Pir. — Pirona, pag. 32, tav. III, fig. 8-10. — Indiscutibilmente è una rudista, come mi risulta dall'esame di un esemplare, parzialmente infisso nel calcare compatto della collezione Taramelli nel Museo di Pavia. Non è una *Radiolitella*: è una forma subequivalve, colla valva inferiore quasi appiattita; la struttura del guscio non è evidente, senza canali manifesti, e nulla si conosce degli apparati cardinale e sifonale. L'interessante rudista resta quindi imperfettamente conosciuta.

Radiolites monoptera Pir. — Pirona, pag. 33, tav. VI, fig. 7-10. — Toucas (pag. 126) dice senz'altro che le figure sono indeterminabili: ma, considerando descrizione e figure, si può con fondamento ritenere che sia un *Biradiolites* del gruppo del *Bir. quadratus* d'Orb., e che probabilmente lo studio di buoni esemplari dimostrerà che questa forma di Medea è la stessa del D'Orbigny, che è angoumiana.

Radiolites trialata Pir. — Pirona, pag. 34, tav. VI, fig. 11 e 12. — A Toucas (pag. 126) sembra vicina al suo *Biradiolites angulosissimus* (santoniano). È effettivamente un *Biradiolites* ed è altra delle forme “ sub judice „ di Medea.

Biradiolites Stoppanianus Pir. — Pirona, pag. 35, tav. X, fig. 1-10 (*Synodontites*); Toucas, pag. 106, tav. XX, fig. 8 e 9 (*Biradiolites*). — L'assegnazione di questa rudista al gen. *Biradiolites* è giustificata dal complesso dei caratteri. È una delle forme più caratteristiche della fauna, ma i due soli esemplari incompleti di valva inferiore, che ho in esame, non mi concedono di aggiungere alcunchè per un più completo suo studio.

Chama forojuliensis Pir. — Pirona, pag. 37, tav. X, fig. 13-16. — Questa forma resta colle sue incertezze, specialmente riguardo ai caratteri del genere. Non conosco altri esemplari e non ripeto quanto già riferii a proposito della *Radiolit. Guiscardiana.*

Eoradiolites liratus Conrad. — Rappresentata da frammenti e da un esemplare di valva inferiore ben caratterizzato, raccolto dal Taramelli, fa parte della fauna di Medea anche questa specie della Siria, abbastanza frequente nel Turoniano dell'Appennino e che ho pure riconosciuto nel triestino (Gropada, Opcina).

Radiolites Trigeri Coq.? — Con qualche dubbio, non permettendo l'incompleta valva inferiore un esame esauriente, accenno alla presenza di questa specie turoniana, già segnalata per l'Istria.

Le rudiste ora ricordate non costituiscono da sole la fauna del Colle di Medea. Certamente essa ne comprende altre, che rimangono indeterminate, alle quali si accompagnano altri molluschi per quanto rari, oltre agli echinidi descritti dal Taramelli: infatti nel materiale inviatomi dal dott. Feruglio ho riconosciuto frammenti di una *Nerinea* e di una *Pleurotomaria*?, oltre numerosi foraminiferi, già notati dal Pirona; anzi il calcare può dirsi a miliolidi, con frequenza di grandi forme. Come si osserva, in generale, nei calcari a miliolidi, non mancano le alghe calcari.

Considerando l'elenco delle rudiste, risulta che gli elementi della fauna, più o meno apprezzabili e significativi per deduzioni cronologiche, sono i seguenti:

Eoradiolites liratus Conrad, *Eorad. fascicularis* Pir., *Radiolites Trigeri* Coq.?, *Radiol. Taramellii* Pir., *Rad. Pasiniana* Pir., *Rad. Zignana* Pir., *Rad. Gastaldiana* Pir., *Rad.* (Radiolitella) *Guiscardiana* Pir., *Sauvagesia Meneghiniana* Pir., *Biradiolites angulosus* d'Orb., *Birad. Stoppanianus* Pir.

A proposito dell'età della fauna di Medea, il Douvillé (1904, pag. 537) si riferisce all'opinione di Munier-Chalmas che l'attribuiva al Daniano inferiore, e cioè al Maestrichtiano; e maestrichtiana ritiene del pari il Klinghardt la fauna a rudiste di Maniago (Friuli), che comprenderebbe quattro specie di Medea. A. Toucas, che pure ebbe modo di considerare parecchie forme di Medea, ma di interpretarle, a mio avviso, non sempre felicemente, le giudicò alquanto più antiche, ma sempre senoniane e precisamente del Santoniano superiore. Il Dainelli, nella introduzione allo studio del Cretacico friulano, riferendosi specialmente ad appunti manoscritti del Taramelli sulla serie degli strati fossiliferi del Colle, nonchè alla presenza di talune specie, si crede autorizzato ad attribuire la zona dei calcari colla fauna di Medea al Turoniano superiore.

È caratteristica della fauna a radiolitidi di Medea l'associazione di parecchie forme particolari con poche altre più o meno lontanamente affini o sicuramente corrispondenti a specie

note di larga diffusione geografica, così da presentare un tipico esempio di localizzazione di forme, attribuibile presumibilmente a speciali condizioni d'ambiente e di vita. Ma qualche genere e qualche specie guidano alla determinazione dell'età del giacimento: il gen. *Eoradiolites* e la sua specie *liratus*, il *Radiolites Trigeri*, il *Biradiolites angulosus*, il gen. *Sauvagesia*, mentre dànno alla fauna un'impronta di antichità presenoniana, ne dimostrano l'età turoniana. Possiamo dunque concludere che era fondata ed esatta l'opinione del PIRONA (pag. 13), il quale riteneva doversi attribuire la fauna, da lui scoperta ed illustrata, al Turoniano inferiore.

Qualificando la fauna di Medea come accantonata non intendo per altro di confinarla al piccolo Colle: infatti, come risulta dalle notizie sulle singole specie, le più caratteristiche di esse si vanno scoprendo nel *carso* goriziano e triestino. La facies tutta propria di questa fauna turoniana appare tanto più notevole, se si considera quanto essa sia diversa, non solo dalla fauna a caprine del giacimento turoniano del Col dei Schiosi (Cansiglio), che similmente a questo di Medea fa seguito ad un orizzonte di calcari e scisti bituminosi ritenuti cenomaniani, ma anche, nella prevalenza delle specie, dalla fauna istriana, del pari a radiolitidi e turoniana, che dirò di Pisino, la quale caratterizza i calcari connessi ai depositi di bauxite e che sto studiando (1).

---

(1) Per le ricerche sulle rudiste istriane, posso approfittare anche del materiale del Museo Civico di Trieste, cortesemente inviatomi per studio dal Direttore sig. Dott. Mario Stenta, al quale esprimo vivi ringraziamenti.

Sulla fauna della Grotta del Pugnetto in Val di Lanzo

Nota del Dott. FELICE CAPRA
Presentata dal Socio nazionale residente A. Naccari.

La Grotta o " Borna del Pugnetto ", nota da molto tempo ai turisti (1), non è stata finora oggetto di alcun studio. Si apre a circa 825 metri s. m. nei calcescisti mesozoici (2) a circa 300 metri a S. della borgata Pugnetto sul versante N. E. della Punta delle Lunelle nella Val grande di Lanzo. È lunga parecchie centinaia di metri con un andamento vario, con frequenti diramazioni laterali; lo stillicidio delle acque la rende molto umida.

Le raccolte zoologiche, argomento di questa Nota, vennero fatte da me cogli amici prof. Giuseppe Della Beffa e Luigi Rocca in varie gite, in una delle quali (29 aprile 1923) a noi si unirono i Prof. G. Negri, Mario Bezzi e i Dott. Crida e Perez.

Le nostre ricerche, pur avendo fornito un numero limitato di specie, diedero dei risultati interessanti, specialmente per la scoperta di un Silfide e di un Isopodo, proprii di questa Grotta. Notevole la mancanza, od almeno l'estrema rarità, di miriapodi (così frequenti nelle grotte liguri), di molluschi, di lombrici, ecc.; ma forse nuove esplorazioni contribuiranno ad aumentare il numero delle specie.

Quanto alla flora, il prof. Negri raccolse sul legno fradicio alcuni micelii indeterminabili.

---

(1) Martelli e Vaccarone, *Guida delle Alpi Occid.* Vol. II. *Alpi Graie e Pennine,* Parte I, pag. 60, Torino 1889. — Rag. Guido Muratore, *Brevi cenni sulla G. d. P.-U. G. E. T.* " Boll. mens. ", N. 6, giugno 1923.

(2) *Carta geologica d'Italia al 100.000.* F. 55 (Susa), 1913.

Mammalia, Ordo *Chiroptera*.

Rhinolophus ferrum-equinum ferrum-equinum Schreber (gentilmente controllati dal dott. Moltoni), due esemplari raccolti dal Rocca il 3 novembre 1923. Nelle precedenti gite, pur avendone visto qualche esemplare, non ci riuscì a catturarne: il guano era piuttosto scarso. A quanto dissero le guide del paese, in certi anni i pipistrelli si radunano in gran numero a svernare.

Insecta.

Ordo *Coleoptera*, Fam. *Carabidae*.

Sphodropsis Ghilianii Schaum. — Alcuni adulti ed una larva lunga 9 mm. (1), sul fango e sotto i sassi. Citato di molte grotte delle Alpi Marittime e di Liguria; si trova raramente anche all'aperto sotto i sassi. Colgo l'occasione per segnalare una nuova località che ne estende maggiormente l'habitat: Alp Finestre, m. 1730 s. m., presso la Cima di Bo (Biellese), in un armadio ed in uno stanzino buio, dove lo *Sphodropsis* usciva dagli interstizii del pavimento. Credo che ad Alp Finestre questa specie possa trovare favorevoli condizioni di vita nelle parti profonde dei *ciapei* (detriti di falda) assai estesi, dove gli interstizii lasciati dai massi costituiscono delle microcaverne umide ed oscure e donde questi insetti salgono attirati dal cibo. Gli esemplari della Grotta del Pugnetto e di Alp Finestre, come gli esemplari liguri, presentano una notevole variabilità nella forma del pronoto e delle elitre.

Fam. *Silphidae*, Subfam. *Bathysciinae*.

Royerella nov. subg. Della Beffaella mihi. — Distinto dalle *Royerella* s. str. per le elitre striolate in traverso, per il II articolo delle antenne lungo come una volta e mezzo il III; per il I articolo dei tarsi posteriori lungo come II e III riuniti, per le

---

(1) Xambeau, *Description de la larve de "Sphodropsis Ghilianii"*. "Ann. Mus. Civ. Genova", serie III, vol. III (XLIII), 1907, pag. 324.

spine infero-interne delle tibie fittamente pettinate (9-10 dentelli) sui margini; per la carena mesosternale elevata e ad angolo ottuso.

Le *Royerella* s. str. (*R. Tarissani* Bed. e Var.; *R. Argodi* Fagn.; *R. Villardi* Bed.) (1) hanno invece le elitre punteggiate senza alcun ordine, il II articolo delle antenne lungo circa come il III; il I articolo dei tarsi posteriori sempre più breve dei due seguenti riuniti; le spine infero-interne con al più 3 spinule lunghe ed esili sui margini, la carena mesosternale assai bassa.

Ero propenso a considerare la specie del Pugnetto come tipo di un nuovo genere, ma il dott. Jeannel, profondo conoscitore delle *Bathysciinae*, ritiene debba ascriversi alle *Royerella*. Ad ogni modo i caratteri enunciati credo siano più che sufficienti ad autorizzarmi a creare questo nuovo sottogenere, che differisce per essi non solo dalle *Royerella*, ma da tutti gli altri generi della serie dei *Cytodromus*, le cui specie abitano in grotte del versante francese delle Alpi ed a gran distanza dalla Grotta del Pugnetto.

Royerella (Della Beffaella) Roccae n.sp. Lunghezza 2,7-3,6 mm. Ovale allungata, attenuata all'indietro; colore bruno ferruginoso; pubescenza dorata, lunga, depressa. Punteggiatura del protorace fitta, fine e leggermente a raspa, riunita in fitte striole trasversali sulle elitre; la superficie tra i punti assai finemente reticolata. Antenne lunghe, che non raggiungono la metà delle elitre, ad articoli allungati, un po' più brevi nella ♀.

L'articolo II più stretto ed un po' più lungo del I; lungo come una volta e mezzo il III; III, IV, V, VI cilindrici, i primi tre lunghi ugualmente, il VI un po' più breve del precedente; VII lungo come il V, a cono tronco; VIII subcilindrico, lungo come metà del VII, circa del doppio più lungo che largo; IX, X a cono tronco, lunghi il doppio della larghezza all'apice, il IX un po' più lungo del X; XI lungo una volta e mezzo il precedente, coll'apice un po' attenuato ed appiattito.

Protorace circa del doppio più largo che lungo, convesso,

---

(1) Ringrazio i signori Dr. R. Jeannel e Ch. Fagniez che mi hanno gentilmente procurato dei co-tipi di *R. Argodi* Fagn.; *R. Tarissani* subsp. *Hustachei* Fagn. e subsp. *ferrierensis* Fagn.; *R. Villardi* subsp. *Matheyi* Jeann.

un po' più largo delle elitre, a lati incurvati, ristretto alla base, specialmente nel ♂, base bisinuata, angoli posteriori salienti all'indietro, acuti.

Elitre circa del doppio più lunghe che larghe, più convesse nella ♀ che nel ♂, posteriormente declivi a partire dalla metà, senza traccia di coste longitudinali; massima larghezza presso la base, attenuate in leggera curva all'indietro, più nel ♂ che nella ♀, subtroncate all'apice, ogni elitra ha l'angolo apicale suturale largamente arrotondato. Doccia marginale stretta, giungente presso l'angolo posteriore esterno. Linea suturale intiera, ben marcata, un po' convergente colla sutura in avanti, massima distanza da essa nel primo terzo, subparallela nel tratto mediano, poi convergente all'indietro e tangente alla sutura poco prima dell'apice. Sutura non depressa anteriormente, non rilevata all'indietro. Carena mesosternale elevata, lamellosa, ad angolo ottuso, leggermente dentata, a margine anteriore convesso, a margine inferiore assai debolmente ed irregolarmente seghettato con corte setole dirette all'indietro, prolungata in piccola, breve, acuta apofisi tra le anche posteriori.

Pezzo metatergale (apofisi del metanoto) mediocremente sviluppato, simile a quello della *Bathysciola Aubei Kiesw.* (1).

Zampe allungate, solo i femori posteriori oltrepassano i margini del corpo. Tibie anteriori ricurve all'infuori, più larghe e più ricurve nel ♂, con breve frangia di peli sul margine interno e robuste spine all'apice; tibie medie mediocremente arcuate all'indentro, tibie posteriori diritte. Spine infero-interne di tutte le tibie fittamente pettinate sui margini, quelle delle tibie anteriori solo brevemente (2).

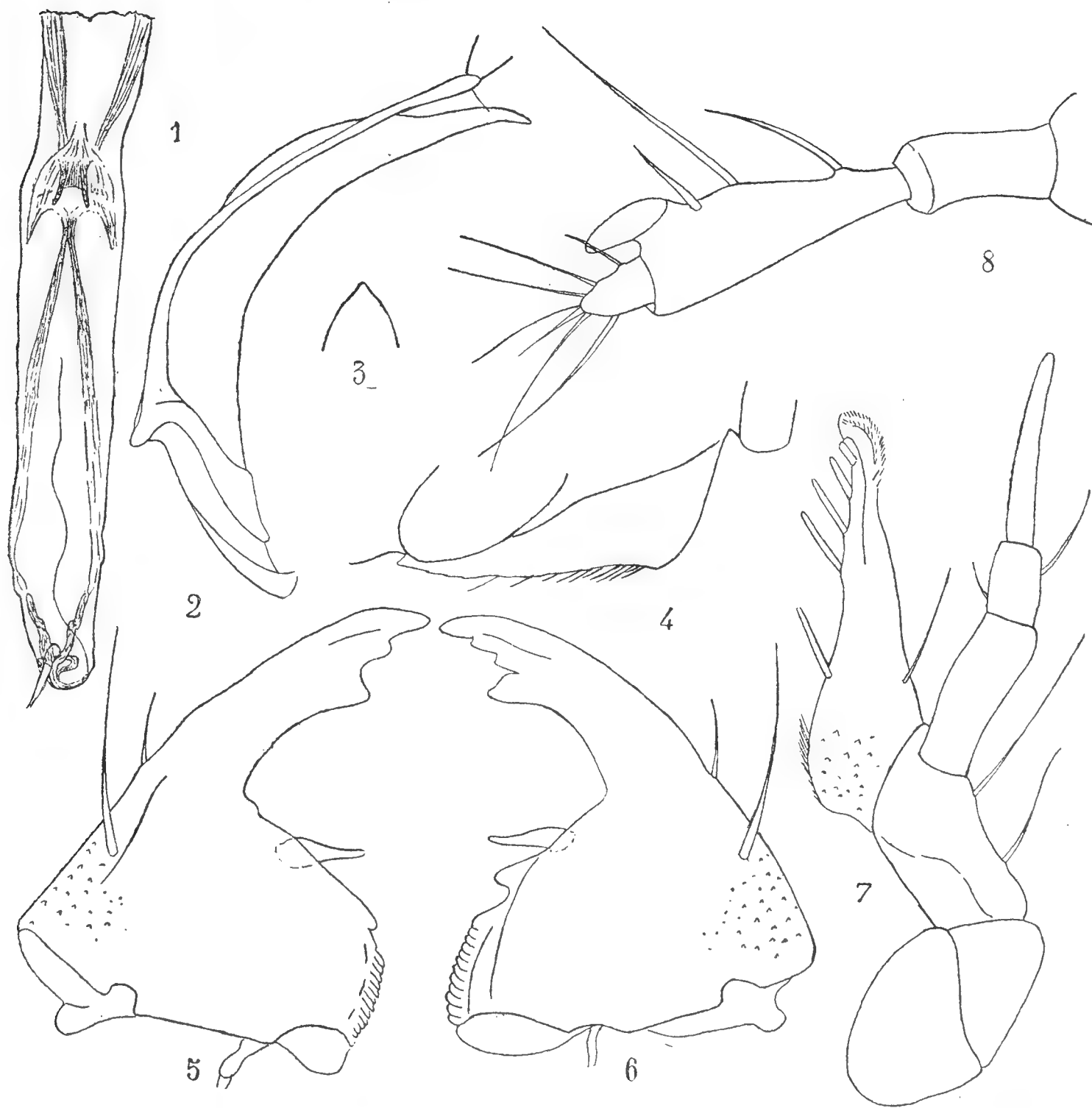
Tarsi posteriori lunghi come i tre quarti delle tibie corrispondenti, col I articolo lungo come i due seguenti assieme e come il V. Tarsi anteriori del ♂ pentameri, coi tre primi ar-

---

(1) Jeannel, *Revision des Bathysciinae.* "Arch. de Zool. exp. et gén. „ Paris 1911, serie 5ª, vol. VII, pag. 62, fig. XLV.

(2) Anche le spine supero-interne sono pettinate. — Jeannel, loc. cit., pag. 36 e 193, accenna solo alle spine infero-interne delle tibie medie e posteriori, ma in moltissime *Bathysciinae* (*Bathysciola, Royerella, Speonomus*, ecc.) anche le spine supero-interne sono denticolate più brevemente delle corrispondenti infero-interne.

ticoli dilatati, cordiformi, il I lungo come i due seguenti insieme e più largo che l'apice delle tibie; nella ♀ tetrameri.

Pene lungo circa un terzo della lunghezza del corpo, robusto, ricurvo, a faccia ventrale scavata a cucchiaio verso l'apice, a parte dorsale convessa nel mezzo, appiattito in senso dorso-ventrale nel terzo apicale. A visione dorsale leggermente atte-

Royerella (Della-Beffaella) Roccae — Adulto: 1. sacco intrapeniale; 2. pene visto di lato; 3. apice del pene; 4. carena mesosternale. — Larva: 5. mandibola sinistra; 6. mandibola destra; 7. mascella destra; 8. antenna sinistra.

nuato nella metà apicale, a punta in ogiva, base mediocremente lunga con margine ispessito e riflesso. Parameri un po' più brevi del pene, gracili, gradatamente attenuati, leggermente rigonfi all'estremità con tre brevi setole divergenti. A visione dorsale sono leggermente ripiegati in fuori a partire dalla metà

del pene, l'ingrossamento apicale è un po' concavo sulla faccia interna.

Il sacco intrapeniale nel terzo apicale presenta una placca munita di due brevi e gracili spine rivolte all'indietro e due brevi liste rivolte obliquamente all'indietro; inoltre vi sono due lunghe listerelle, quasi diafane nel tratto mediano, che si congiungono colle braccia pari del pezzo ad Y, questo grande a braccia lunghe e col braccio impari prolungato in un lungo ed esilissimo filamento.

Dalle *Royerella* s. str. note si distingue inoltre per la forma notevolmente più convessa; è poi distintissima da tutte le *Bathysciinae* italiane e si avvicina a certi *Speonomus* Jeann. nell'aspetto, per la striolatura delle elitre, per la forma dei tarsi posteriori.

Tipo: Numerosi esemplari nella parte profonda della grotta sul legno fradicio e sulle esche.

Larva: Cinque esemplari raccolti cogli adulti sotto le esche, lungh. 3,5-4,5 mm., corpo allungato, bianco gialliccio, con capo, zampe, antenne gialle, ultimo articolo delle antenne nerastro, a setole cupuliformi lunghissime (più lunghe che nella larva di *Breuilia triangulum* Sharp (1)). Capo grande, largo quasi come il protorace, col labbro superiore trasversale, leggermente ristretto all'indietro, a margine anteriore convesso prolungato nel mezzo in breve lobo troncato. Mandibole forti a punta larga ed appiattita, asimmetriche: la destra presenta l'apice a quattro denti, un retinacolo allungato, attenuato nella metà distale, diretto verso l'interno ed un dente tra esso e la mola, questa con dieci pieghe trasversali rivolte in avanti; la mandibola sinistra ha l'apice trifido, retinacolo simile al destro, ed un abbozzo di dente presso la mola, questa con 10 pieghe trasversali più gracili e rivolte all'indietro.

Mascelle col margine interno del lobo interno (lacinia) provvisto di alcuni corti peli alla base, e di 5 robuste spine, una prima della metà, le altre verso l'apice; la galea oltrepassa la lacinia sotto forma di doppia cresta frangiata.

Palpi mascellari ad ultimo articolo lungo, gracile; mediano

---

(1) Jeannel, loc. cit., Tav. XXIII, fig. 641.

lungo circa una volta e mezza la larghezza ed un po' più stretto del basale, questo lungo due volte e mezza la larghezza.

Labbro inferiore (labium) trasversale a margini anteriore e posteriore convessi, a linguetta di poco più breve dei palpi labiali, un po' strozzata nel quarto apicale e bifida. Palpi labiali gracili ad ultimo articolo un po' claviforme, poco più lungo della metà del precedente.

Antenne lunghe circa come la fronte con lunghe setole facilmente caduche.

Torace a segmenti trasversali; protorace del doppio più largo che lungo, con tre serie trasversali di setole cupuliformi; sul margine esterno vi sono quattro setole cupuliformi per lato, di cui la terza è la più lunga. Meso e metatorace più trasversali con solo due serie di setole cupuliformi e con due setole sul margine.

Addome a segmenti molto trasversali con quattro setole cupuliformi presso il margine posteriore dirette all'indietro, due sul margine laterale, una trasversale e l'altra diretta obliquamente all'indietro. Inferiormente le setole sono più numerose, di lunghezza diversa, disposte con minor ordine, solo sui lati cupuliformi, una delle quali, la più lunga, sporge obliquamente ai lati del corpo.

Nono segmento con una lunga setola semplice agli angoli posteriori ed una serie di setole sul margine inferiore. Cerci lunghi come i tre ultimi segmenti addominali, biarticolati, coll'ultimo articolo assai esile e non segmentato.

Pseudopodo anale saliente, troncato all'apice con due brevi setole cupuliformi sul lato dorsale. Zampe lunghe e gracili coi femori anteriori oltrepassanti di poco i margini laterali del corpo, i medi e posteriori sporgenti ai lati di metà della loro lunghezza.

Ordo *Diptera.*

Nematocera, Fam. *Rhyphidae.*

Trichocera (*Petaurista*) *maculipennis* Meigen, 1818. — Numerosi esemplari sulle pareti della grotta. Il prof. Bezzi, che volle gentilmente studiare i ditteri raccolti e che qui ringrazio, così mi scrive: “ Questa specie, a larga distribuzione geografica, una volta ascritta alla fam. dei Tipulidi, fu trovata abbastanza

frequentemente nelle grotte dell'Olanda, della Germania, della Stiria e della Balcania. In Italia fu rinvenuta al Covolo di Costozza ed in qualche altra grotta. Non è però un vero troglobio, trovandosi anche all'aperto, ma però rara „.

Athericera, Fam. *Phoridae.*

Parastenophora (Pseudostenophora) antricola Schmitz. — Tijdschr v. Entom, LXI, 1918, pag. 233. — Un piccolo numero d'esemplari ♂ e ♀ sulle pareti e sul fondo. “ Descritta della Balcania su esemplari riferiti da prima ad *aptina* Schiner; ma parecchi dei reperti riferiti da me, come *aptina* di caverne dell'Italia e della Francia, devono appartenere a questa specie, il cui ♂ non fu ancora descritto. Gli esemplari del Pugnetto furono visti dallo Schmitz e così determinati da lui. Come per la *aptina* si tratta di un troglobio tipico, non ancora trovato fuori delle grotte „ (Bezzi).

Pupipara, Fam. *Nycteribiidae.*

Nycteribia (Stylidia) biarticulata Hermann, 1804. — Parassita del *Rhinolophus.*

Ordo *Hymenoptera*, Fam. *Formicidae.*

Myrmica rubra L. subsp. *laevinodis* Nylander, 1846. — Alcune operaie nel terriccio sotto un'esca alla biforcazione fra la galleria principale e la galleria della Consolata, quasi al fondo della grotta (Prof. Della Beffa det.).

Aracnida.

Ordo *Araneae*, Fam. *Argiopidae.*

Leptyphantes pallidus Cbr. — Quattro esemplari in più riprese su un asse fradicio ad un centinaio di metri dall'ingresso. Specie troglofila (Dr. L. di Caporiacco det.).

Crustacea.

Ordo *Isopoda*, Fam. *Trichoniscidae.*

Trichoniscus (Trichoniscoides) Caprae n. sp. Colosi. — Specie notevolmente affine a *T. Mancinii* Brian delle grotte delle Alpi Apuane.

" Corpo bianco, ovale-allungato, lungh. mm. 10 (compresi gli uropodi); largh. mm. 3,5. Occipite e tergiti del torace abbondantemente tubercolati; solo i tubercoli presso il margine posteriore di ciascun tergite toracico sono allineati; una linea di tubercoli minori sul primo segmento pleonale; granuli radi nel secondo e terzo segmento pleonale. Capo con lobi laterali piccoli, attenuati, granulosi. Antenne lunghe poco più che un terzo del corpo, con flagello di 10 articoli (raramente 9); scapo con I articolo lungo quanto il II, il II lungo poco più della metà del III, il IV di lunghezza doppia del III ed uguale al V, il quale è appena più lungo del flagello. Gli occhi mancano. Angoli latero-posteriori degli epimeri del 1° e 2° segmento toracico retti e smussati, del 3° subacuti e smussati, del 4°-7° acuti e prodotti posteriormente. Pleon gradatamente ristretto all'indietro, segmenti 3°-5° subeguali in lunghezza; epimeri mediocri decrescenti in lunghezza dal 3° al 5°. Pleotelson attenuato arrotondato (non troncato!). Esopodite degli uropodi conico grosso, lungo più del doppio dell'endopodite „ [Colosi].

Numeroso in tutta la grotta, specialmente nella parte più profonda, sul terriccio, sul legno fradicio, sui pezzi di carta bagnata.

Torino - R. Museo Zoologico - Dicembre 1923.

L'Accademico Segretario
Oreste Mattirolo

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla**.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele**.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona – Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LIX, DISP. **5ª, 6ª** E **7ª, 1923-1924**

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1924

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 20 Gennaio 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Segre, Peano, Parona, Somigliana, Panetti, Sacco e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente dà comunicazione all'Accademia dei seguenti doni:

Dal Socio corrispondente Desiderato Bois:

Essais de culture des variétés de Soja en 1921.

Essais de culture faits au jardin d'Expériences du Muséum en 1922.

Dal signor Niccolò Mancini:

Un volume dal titolo: *La gravitazione Universale.*

Il Socio Segre presenta per la pubblicazione negli *Atti* un lavoro del sig. Alessandro Terracini, *Sui punti di flesso delle quartiche piane generali*, e ne discorre brevemente facendo rilevare l'importanza di questo studio.

Il Presidente comunica all'Accademia che in relazione alle condizioni del bilancio leggermente migliorate, il Consiglio di

Amministrazione ha deciso di portare il numero delle pagine da concedersi ai Soci per le loro pubblicazioni da 45 a 60, con che 32 pagine possano essere cedute ad estranei, le Note dei quali non dovranno eccedere il numero di 16 pagine.

Il Presidente comunica infine che nella prossima adunanza si procederà alla votazione per la nomina del Direttore della Classe, posto reso vacante per scadenza ordinaria, e che in detta seduta saranno ripresi gli Atti ufficiali per la nomina di nuovi Soci.

LETTURE

Sui punti di flesso delle quartiche piane generali

Nota di ALESSANDRO TERRACINI
presentata dal Socio nazionale residente Corrado Segre.

1. — Nulla è conosciuto, si può dire, riguardo alla configurazione dei 24 punti di flesso di una C^4 piana generale. Ma nei pochi casi particolari in cui quella configurazione è, o si può ritenere, nota (1), esistono delle coniche contenenti (almeno) 6 punti di flesso: così per la C^4 di Klein vi sono 147 coniche per 8 e 112 coniche per 6 punti di flesso; più in generale, per le C^4 trasformate in sè da un gruppo di collineazioni contenenti una omologia involutoria, vi sono pure delle coniche dotate della proprietà in questione; per le C^4 di Caporali vi sono addirittura delle quaterne di flessi allineate; e per le C^4 dotate di tre nodi i 6 flessi sono appunto su una conica. Tutto ciò lascia la via aperta alla presunzione che la proprietà possa sussistere in generale, presunzione in qualche modo suffragata dalle classiche proprietà della configurazione dei flessi di una cubica. Effettivamente, vi è stato un tentativo di giustificare tale presunzione (2), anzi di dimostrare un teorema più preciso, secondo il quale *la conica passante per cinque flessi di una* C^4 *conterrebbe ulteriormente tre altri flessi*. Il tentativo non è riuscito, giacchè la dimostrazione e il teorema stesso erano errati; ciò di cui si

(1) Cfr., per indicazioni bibliografiche, l'*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, III C 5, ni 76-78.

(2) J. Grassmann, *Zur Theorie der Wendepunkte, besonders Curven vierter Ordnung*, Berlin, 1875, Inauguraldissertation.

avvide il KLEIN [1] dall'esame di alcuni disegni di C^4. Ma ciò non basta ancora a risolvere la questione, in quanto il supposto teorema che *per una qualsivoglia* C^4 *piana esista sempre qualche conica che ne contiene sei flessi* potrebbe sussistere, senza essere suscettibile dell'enunciato più preciso che sopra si è detto: per es. si potrebbe pensare che, presi di una C^4, comunque, 4 flessi (oppure 3, o 2, o 1), per essi passi sempre un certo numero di coniche, ciascuna delle quali contenga ancora altri 2 flessi (oppure 3, o 4, o 5).

Ebbene, vogliamo provare che invece *per una* C^4 *piana generica* NON *esistono delle coniche che ne contengano sei flessi.*

2. — Supponiamo infatti che così non sia: cioè che valga il penultimo enunciato in corsivo. Questo supposto teorema (di cui vogliamo dimostrare la falsità) sarà in seguito denotato brevemente come teorema Z.

Ammesso dunque il teorema Z, la totalità delle C^4 aventi 6 flessi su una data conica irriducibile γ (totalità la cui dimensione, com'è chiaro, non dipende dalla scelta di γ) sarebbe una ∞^9. Con ciò più precisamente intendiamo affermare che, anche se quella totalità è costituita da parti irriducibili di dimensioni diverse, tra esse ve n'è qualcuna ∞^9.

D'altro lato, le C^4 aventi sei punti prefissati su una conica γ come flessi non possono (anche per posizioni particolari di quei sei punti) essere più di ∞^3; giacchè, se fossero anche solo ∞^4, l'imposizione del passaggio per tre ulteriori punti generici di γ porterebbe ad almeno ∞^1 C^4 spezzate in γ e in una ulteriore conica passante per i sei punti prefissati come flessi; ciò che è assurdo.

Perciò, dal supposto teorema Z, discenderebbe che, non potendo nessuna sestupla di punti di γ essere *inflessionale* per più di ∞^3 C^4, e dovendo, complessivamente, le sestuple di γ essere inflessionali per ∞^9 C^4, ogni sestupla *generica* di punti di γ dovrebbe essere inflessionale per ∞^3 C^4.

Si osservi che, nell'enunciato finale del n. 1 e nel supposto

---

[1] *Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades,* " Mathematische Annalen ", Band X (1876); v. la pag. 397.

teorema Z, il significato della parola " flesso „ si può assumere *in senso stretto* [1] escludendosi (come si fa ordinariamente) dai flessi gli eventuali punti multipli delle C^4: parleremo di flessi *in senso esteso* quando non si faccia tale esclusione. Ebbene, anche l'affermazione dell'ultimo capoverso è valida *in senso stretto*. Inoltre, sempre per una sestupla *generica* di punti di γ, le corrispondenti ∞^3 C^4 sono generalmente irriducibili; perciò, assuntane una irriducibile, le sei tangenti di flesso nei punti di γ considerati non sono tali per nessun'altra C^4 del sistema ∞^3 (che verrebbe ad avere almeno 18 punti in comune con essa). Quindi le sestuple delle rette tangenti di flesso in quei sei punti alle ∞^3 C^4 sono anche ∞^3; vale a dire, fra i sei punti ne esistono certamente tre in cui le tangenti di flesso alle ∞^3 C^4 in questione sono fra loro indipendenti. Perciò (in conseguenza del supposto teorema Z), assunti in modo *generico* sei punti A, B, C, D, E, F, di una conica γ irriducibile, e, ancora *genericamente*, tre rette passanti rispettivamente per (*certi*) tre fra essi, esiste (almeno) una C^4 che ha quei sei punti come flessi, *in senso stretto*, e le tre rette come tangenti tripunte nei flessi corrispondenti.

3. — Prima di procedere è bene completare l'ultima osservazione.

Dico che in essa, anzichè " ... rispettivamente per (*certi*) tre fra essi ... „ si può leggere " ... rispettivamente per tre *qualunque* fra essi, p. es. per A, B, C ... „; e che, inoltre, si possono sopprimere le parole " *generico* „ e " *genericamente* „, purchè contemporaneamente si sopprima la frase " *in senso stretto* „; dove però è essenziale osservare che, pure caduta questa frase, se si chiamano a, b, c le tre rette prefissate per A, B, C, ciascuna di esse ha incontro tripunto rispettivamente in A, B, C colla C^4 (anche se il punto in questione è doppio per la C^4).

Tutto ciò risulta dalle seguenti considerazioni. Se p, q, r sono le tre rette di cui si parla nell'osservazione in discorso, indichiamo con

$$R = R\,(A, B, C, D, E, F;\ p, q, r)$$

---

[1] Ove si escludano, come è ovvio, per quanto riguarda il teorema Z, le quartiche che, in senso stretto, hanno meno di 6 flessi.

il risultante del sistema delle 15 equazioni omogenee nei coefficienti dell'equazione di una C^4, nelle quali si traducono le seguenti imposizioni:

passaggio della C^4 per i sei punti A, B, C, D, E, F fissati;

contatto tripunto della C^4 colle p, q, r (naturalmente, in quelli fra quei sei punti in cui queste rette, ordinatamente, passano);

passaggio della Hessiana della C^4 per gli ulteriori tre punti.

Conveniamo inoltre di dire che una determinata terna di punti estratta dalla sestupla $ABCDEF$ è *accettabile*, se le tangenti tripunte nei suoi punti alle ∞^3 C^4 per cui la sestupla è inflessionale costituiscono un sistema ∞^3.

Ciò posto, per quanto riguarda la soppressione della parola "*genericamente*" basta osservare che R è funzione razionale intera, e quindi continua, delle coordinate delle rette p, q, r (entro i fasci in cui esse possono variare); cosicchè, se, per una sestupla $ABCDEF$ prefissata, R è nullo per p, q, r generiche, esso è nullo qualunque siano le p, q, r.

Le altre due parti dell'asserto si verificano insieme nel seguente modo. Fissata la conica γ, e scelto comunque un punto di una sestupla generica $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$, p. es. $\bar{F}$, si fissi un suo intorno $I(\bar{F})$ tale che, al variare di F in esso, fermi restando gli altri cinque punti, la sestupla si conservi sempre generica agli effetti della osservazione finale del n. 2. Fra queste sestuple ne esistono certamente infinite, prossime quanto si vuole ad $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$, che hanno come accettabili delle terne fra loro omologhe. Costruendo per ognuna di esse, e per la sestupla originale, il risultante R *corrispondente a queste terne*, si ha che esso si annulla per infinite posizioni del sesto punto, tendenti ad $\bar{F}$, identicamente rispetto ai parametri da cui dipendono p, q, r, dunque identicamente anche rispetto ad $\bar{F}$. Perciò, fissato comunque un punto di quella sestupla generica, p. es. $\bar{F}$, fra le terne per essa accettabili ve n'è una (almeno) che, comunque si sposti $\bar{F}$ sulla conica γ, rimane sempre accettabile e, o non contiene $\bar{F}$, oppure, ove lo contenga, varia omologamente alla sua posizione iniziale. Procedendo poi in modo analogo, per ricorrenza, si giunge a stabilire che, fra le terne accettabili per

una sestupla generica $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$, ve ne è una (almeno) che rimane sempre accettabile e omologa di sè stessa comunque i sei punti della sestupla si spostino sulla conica γ; cosicchè, volendosi stabilire, come sopra si è enunciato, che *ogni* terna, p. es. ABC, estratta da una sestupla *generica* $ABCDEF$, o addirittura *qualunque*, è per essa accettabile, basta spostare i sei punti $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$ in modo che questa sestupla vada a sovrapporsi alla $ABCDEF$ e precisamente in modo che i tre punti fra $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$ che costituiscono una delle terne di cui ora si è detto vadano a sovrapporsi uno ad A, uno a B e uno a C.

4. — Orbene, partiamo ora da una quartica piana irriducibile e siano A, B, C tre suoi flessi (in senso stretto) e a, b, c le rispettive tangenti. Le C^4 che hanno ordinatamente in quei tre punti incontro tripunto colle tre rette a, b, c costituiscono *sempre* un sistema lineare ∞^5 e non più ampio (come si vede p. es. imponendo a quelle C^4 di contenere due fra le rette a, b, c). Se A, B, C non sono allineati, applicando a ognuna delle ∞^2 coniche per A, B, C, e a ognuna delle ulteriori terne D, E, F di punti di ciascuna di queste coniche l'osservazione finale del n. 2 — così come fu poi completata — si deduce l'esistenza di un sistema continuo ∞^5 di C^4 che hanno in A, B, C rispettivamente incontro tripunto con a, b, c, per ciascuna delle quali esiste una conica per A, B, C contenente ancora tre flessi. Ma quel sistema non può differire dal sistema lineare ∞^5 di cui sopra si è detto.

Dal teorema Z discenderebbe dunque, che per tre flessi non allineati di una C^4 piana irriducibile passerebbe qualche conica, contenente ancora tre flessi della C^4.

E di qui poi seguirebbe, con un procedimento di limite, che, se A è un punto di ondulazione, colla tangente a, di una C^4 piana, e B ne è un ulteriore flesso, esisterebbe sempre una conica (irriducibile) passante per A e B e tangente ad a (in A), contenente ancora tre flessi della C^4.

5. — Dall'ultimo enunciato (che sarebbe vero, se tale fosse il teorema Z) ragionando in modo analogo a quello seguìto nel n. 2, si può trarre questa conseguenza: fissata una conica γ, e cinque suoi punti *generici* A, B, C, D, E, e chiamando a la retta

ad essa tangente in A, vi sono ∞^3 C^4 (generalmente irriducibili) che hanno un'ondulazione (*in senso stretto* [1], cioè nel senso di punto semplice con tangente quadripunta) in A, colla retta a quale tangente di ondulazione, e quattro flessi *in senso stretto* nei punti B, C, D, E. In tal caso, le quaterne delle tangenti tripunte in questi punti, siano rispettivamente b, c, d, e, sono ancora ∞^3; infatti le C^4 irriducibili del sistema ∞^3 che ammettono una stessa quaterna, avendo già sedici punti in comune, appartengono tutt'al più a un fascio; e, se esse devono appartenere a un fascio, b, c, d, e devono avere incontro tripunto rispettivamente in B, C, D, E con una C^3, resto della quartica del fascio contenente la a; ciò che, fissati i punti B, C, D, E, conduce a ∞^1 quaterne b, c, d, e [2]: perciò le quaterne b, c, d, e comuni ad almeno ∞^1 C^4 (irriducibili) della ∞^3 non possono condurre, complessivamente, che, al massimo, a ∞^2 C^4 (irriducibili). Con considerazioni analoghe a quelle contenute nell'ultimo capoverso del n. 2 e nel n. 3, si è condotti allora (sempre in conseguenza del supposto teorema Z) al seguente enunciato: presi comunque su una conica γ cinque punti A, B, C, D, E, chiamando a la retta ad essa tangente in A, e b, c, d tre rette condotte arbitrariamente per B, C, D, esiste (almeno) una C^4 che ammette quei cinque punti come flessi (in senso esteso), e precisamente ha colla a incontro quadripunto in A, e colle b, c, d incontro tripunto rispettivamente in B, C, D.

6. — Riusciremo dunque a provare che il teorema Z è falso, dimostrando la falsità dell'ultimo enunciato.

Partiamo dalla notissima quartica (di Dyck), che ha per equazione (in coordinate proiettive omogenee x, y, z)

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0; \tag{1}$$

---

(1) Appunto per poter affermare questo, abbiamo preso la via, alquanto indiretta, seguìta nel testo, anzichè valerci senz'altro del penultimo capoverso del n. 2: il passaggio al limite a ciò necessario avrebbe potuto lasciare il dubbio che nel punto A si venisse ad avere, anzichè un'ondulazione, un punto doppio (senza tangenti quadripunte).

(2) Per giustificare quest'asserzione, è da osservare che, volendo ottenere delle C^4 irriducibili, le quattro rette b, c, d, e sono da ritenere a due a due distinte, dimodochè le C^3 in questione si possono supporre anche irriducibili.

i suoi flessi si riducono a dodici ondulazioni situate nelle intersezioni della quartica coi lati del triangolo di riferimento. Chiamo μ tale quartica; e assumo i cinque punti A, B, C, D, E nel modo che ora si dirà. Anzitutto pongo

$$A \equiv (\alpha, 1, 0)\,, \qquad C \equiv (\alpha, 0, 1)\,,$$
$$B \equiv (-\alpha, 1, 0)\,, \qquad D \equiv (\alpha^3, 0, 1)\,,$$

con

$$\alpha^4 + 1 = 0\,;$$

dimodochè i quattro punti considerati sono di ondulazione per la μ. Assumiamo poi come rette a, b, c, d le tangenti (di ondulazione) della μ in A, B, C, D, e come conica γ la conica che passa per A, B, C, D, toccando in A la a. L'equazione di γ (irriducibile) è

$$(x - \alpha y)\,(x + \alpha y - [\alpha + \alpha^3]\,z) - z^2 = 0. \tag{2}$$

Nelle intersezioni di γ col lato $x = 0$ del triangolo di riferimento si ha

$$\alpha^2 y^2 + (1 - \alpha^2)\,y z + z^2 = 0\,, \tag{3}$$

e perciò γ non passa per nessuna delle ondulazioni di μ situate su tal lato, come si vede, p. es., osservando che il risultante delle due forme

$$y^4 + z^4, \tag{4}$$

$$l y^2 + m y z + n z^2 \tag{5}$$

è

$$l^4 + m^4 + n^4 + 2 l^2 n^2 - 4 l m^2 n\,,$$

e che esso non si annulla sostituendo alla (5) la (3).

D'altra parte, la conica γ non è tangente a μ in B, nè in C, nè in D, come subito si verifica.

In base a tutto ciò, vi sono ancora tre intersezioni di γ con μ essenzialmente distinte da A, B, C, D, nessuna delle quali è flesso per μ. Ebbene, si assuma il punto E in una di esse. Verificheremo che, con questi dati, l'enunciato finale del n. precedente non sussiste.

Invero, le C^4 che soddisfanno a tutte le condizioni di quel-l'enunciato, quando si tralasci quella di avere in E un flesso, costituiscono un fascio Φ; perchè, nell'ipotesi che costituiscano un sistema lineare più ampio, dovrebbero esistere delle cubiche aventi in B, C, D incontro tripunto rispettivamente con b, c, d, senza che esse si riducano alla terna di rette bcd; e si verifica che così non è. Siccome poi il punto E non sta certo su nessuna delle rette a, b, c, d, esso non è punto base per il fascio Φ (che si può ritenere determinato dalla μ e dalla quartica spezzata in quelle quattro rette). Dunque, per E passa una sola quartica del fascio Φ, vale a dire la μ. E siccome per essa il punto E non è di flesso, così tutto quanto risulta dimostrato.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 3 Febbraio 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. C. F. PARONA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Guidi, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Herlitzka, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Presidente Senatore Ruffini.

Il Segretario dà lettura del verbale della adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una Circolare della *Unione Geografica Internazionale* colla quale si annunzia all'Accademia che, per iniziativa di S. M. Fouad 1°, Re d'Egitto, si terrà al Cairo nel 1925 un *Congresso Internazionale di Geografia*, al quale ha aderito anche il Consiglio internazionale per le Ricerche.

Egli comunica inoltre una lettera dei figli del Professore H. J. Hamburger dell'Università di Groninga, colla quale dànno l'annunzio della morte del loro genitore avvenuta il giorno 4 gennaio. Il Presidente ricorda che il Prof. Hamburger era nostro Socio corrispondente della Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata. Il Socio Herlitzka, associandosi alle parole di rimpianto espresse dal Presidente, deplora la perdita di questo eminente scienziato che fra i meriti grandissimi ebbe pur quello di essere stato fra i primi ad applicare agli studii Fisiologici le dottrine della Fisico-chimica. Capo venerato di una Scuola informata ai più moderni concetti scientifici, ha dato alla Scienza buon numero di valenti scolari. Organizzatore per eccellenza, aveva elevato il suo Laboratorio ad un grado tale di illuminata e sapiente organizzazione da essere considerato come uno dei primi del mondo. Il Socio Herlitzka esprime il desiderio che alla famiglia siano espresse ufficiali e profonde condoglianze dall'Accademia.

Il Presidente presenta all'adunanza il volume del M. R. Don Alberto De Agostini dal titolo: *I miei viaggi nella Terra del Fuoco*, che l'autore invia in omaggio all'Accademia.

Il Presidente ricordando come questa opera sia stata già presentata alla seduta del 27 gennaio della Classe di Scienze morali, dà comunicazione delle parole che ad essa si riferiscono e che furono consegnate in verbale. Egli però rilevando i pregi eccezionalissimi di questa opera importante dal punto di vista geografico ed etnografico, elogia l'autore che ha saputo renderla preziosa per le geniali osservazioni geologiche e per le ricerche da lui fatte nel campo della Botanica e della Zoologia. Ai ringraziamenti già espressi all'autore dalla Classe morale, unisce anche quelli che egli desidera esprimere nel nome della nostra Classe.

Viene in seguito presentato in omaggio dal Cav. Aldo Crespi di Milano uno studio dal titolo: *Il moto oscillatorio pendolare e le ideali celesti rivoluzioni.*

Il Socio Panetti, nel nome del suo assistente Ing. Antonio Capetti, presenta alcuni lavori dai titoli seguenti:

1) *Il Saggio meccanico dei lubrificanti.*

2) *Elementi pel calcolo dei Turbocompressori.*

3) *Contributo allo studio del flusso nei cilindri dei motori veloci.*

4) *Considerazioni sul bilancio termico della motrice a vapore e sulla influenza del surriscaldamento del vapore.*

Terminata la presentazione degli omaggi, il Socio Somigliana riferisce in merito ad una sua Nota, *Intorno ad alcune questioni di elastostatica.*

L'A. richiama l'attenzione dei cultori della Scienza delle costruzioni sulla utilità che può ricavarsi dall'uso della serie di soluzioni delle equazioni della statica elastica, che hanno forma di funzioni omogenee, razionali, intere e che sono analoghe alle armoniche della teoria del potenziale.

Di queste soluzioni l'A. studia alcune equazioni che sono le più semplici e generali.

La Nota del Socio Somigliana è accolta per gli *Atti.*

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata, procedette alla nomina del suo Direttore, e venne riconfermato per un secondo triennio, salva l'approvazione Sovrana, il Socio Corrado Segre.

LETTURE

Intorno ad alcune questioni di elastostatica

Nota 1ª del Socio nazionale residente CARLO SOMIGLIANA

I.

Una recente Nota del prof. L. Burgatti (1) ha richiamato alla mia memoria alcune formole di cui mi sono valso molti anni fa per rappresentare gli integrali delle equazioni della statica elastica, poichè mediante di esse si può risolvere immediatamente non solo il problema di cui tratta il prof. Burgatti, ma anche altri analoghi assai più generali.

Quelle formole d'altra parte rientrano come caso speciale in altre già indicate da Cauchy per rappresentare gli integrali di un sistema qualsiasi di equazioni lineari di 2° ordine, omogenee a derivate parziali, con coefficienti costanti, mediante funzioni indipendenti, che siano integrali di una stessa equazione, la così detta *caratteristica*.

Ma nel caso delle equazioni dell'equilibrio dei corpi isotropi quelle formole assumono una forma estremamente semplice, ed anche la equazione caratteristica, anzichè essere di 6° ordine, come avviene in generale per i sistemi di tre equazioni con tre funzioni incognite, si riduce ad essere di 4° ordine, e non è altro che l'equazione biarmonica.

Se indichiamo con U, V, W tre funzioni biarmoniche, tali cioè che

$$\Delta_2 \Delta_2 U = 0 \qquad \Delta_2 \Delta_2 V = 0 \qquad \Delta_2 \Delta_2 W = 0$$

(1) P. Burgatti, *Sopra una soluzione molto generale delle equazioni dell'equilibrio elastico.* " Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna ", Anno accademico 1922-23.

e poniamo per le componenti u, v, w del vettore spostamento $\boldsymbol{s}$,

$$(1) \quad u = \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + \Delta_2 U, \quad v = \alpha \frac{\partial H}{\partial y} + \Delta_2 V, \quad w = \alpha \frac{\partial H}{\partial z} + \Delta_2 W,$$

ove α è una costante e

$$H = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

si vede subito che le equazioni dell'equilibrio elastico, quando le forze di massa sono nulle,

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s} + \mu \Delta_2 \boldsymbol{s} = 0 ,$$

sono soddisfatte se la costante α verifica l'equazione

$$(\lambda + \mu)(\alpha + 1) + \mu\alpha = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \alpha = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} ;$$

λ, μ sono le costanti di Lamé (1).

Di qui risulta immediatamente che prendendo per U, V, W delle biarmoniche che siano funzioni omogenee razionali intere, di un certo grado n, le u, v, w risulteranno, per le formole (1), razionali intere parimenti omogenee, di grado $n-2$. Similmente le componenti di deformazione e di tensione saranno razionali intere di grado $n-3$.

Ora il problema che si è proposto, e che ha risolto, il professore Burgatti è quello di trovare le deformazioni per le quali le espressioni

$$\Delta_2 X_x , \quad \Delta_2 Y_y , \quad \Delta_2 Z_z , \quad \Delta_2 Y_z , \quad \Delta_2 Z_x , \quad \Delta_2 X_y ,$$

cioè i secondi parametri differenziali delle componenti di tensione siano delle costanti. Ora è chiaro da quanto precede che ciò avverrà tutte le volte che per U, V, W prendiamo delle funzioni biarmoniche di grado 5, poichè in generale le espressioni $\Delta_2 X_x, \ldots \Delta_2 X_y$ sono di grado $n-5$, quando le U, V, W sono di grado n.

---

(1) Somigliana, *Sulle equazioni dell'elasticità.* "Annali di Matematica ".

Il problema del Burgatti è quindi suscettibile di una soluzione immediata assai semplice.

Ma in modo perfettamente analogo potremmo risolvere anche il problema generale di trovare le deformazioni per cui i Δ_2 delle tensioni siano funzioni razionali intere omogenee, o non omogenee, di qualunque ordine, o tali siano le tensioni o le deformazioni, od i loro parametri differenziali di qualunque ordine. Non esistono quindi, in conseguenza delle formole (1), difficoltà di alcuna specie nella risoluzione di problemi di questo genere.

Ma poichè nella forma (1) si possono far rientrare tutti gli integrali delle equazioni dell'equilibrio elastico, come ho dimostrato nella Memoria citata, può essere utile di vedere quali siano le espressioni generali delle componenti di tensione e di deformazione in funzione delle U, V, W, il che porta anche alla forma definitiva di risoluzione dei problemi sopra indicati. Inoltre quando le U, V, W sono omogenee esse vengono a generare delle soluzioni delle equazioni d'equilibrio, che hanno una analogia completa con quelle soluzioni dell'equazione di Laplace che gli autori inglesi chiamano *armoniche solide*, e che costituiscono la base di tutta la teoria delle funzioni sferiche. Esse hanno anche con queste funzioni delle relazioni assai semplici, che cercherò di mettere in evidenza.

Abbiamo anzitutto dalle formole (1), adottando le notazioni di Kirchhoff per le componenti di deformazione,

$$x_x = \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial \Delta_2 U}{\partial x} \qquad y_z = 2\alpha \frac{\partial^2 H}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial \Delta_2 W}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_2 V}{\partial z}$$

$$y_y = \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial \Delta_2 V}{\partial y} \qquad z_x = 2\alpha \frac{\partial^2 H}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial \Delta_2 U}{\partial z} + \frac{\partial \Delta_2 W}{\partial x}$$

$$z_z = \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Delta_2 W}{\partial z} \qquad x_y = 2\alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \Delta_2 V}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_2 U}{\partial y}$$

e analogamente per le componenti di tensione

$$X_x = \lambda(\alpha + 1)\Delta_2 H + 2\mu\alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial \Delta_2 U}{\partial x} .$$

$$Y_z = 2\mu\alpha \frac{\partial^2 H}{\partial y\, \partial z} + \mu\left(\frac{\partial \Delta_2 W}{\partial y} - \frac{\partial \Delta_2 V}{\partial z}\right).$$

Da queste formole ricaviamo

$$
(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
\Delta_2 x_x = \alpha \dfrac{\partial^2 \Delta_2 H}{\partial x^2} & \Delta_2 y_z = 2\alpha \dfrac{\partial^2 \Delta_2 H}{\partial y \, \partial z} \\
\Delta_2 y_y = \alpha \dfrac{\partial^2 \Delta_2 H}{\partial y^2} & \Delta_2 z_x = 2\alpha \dfrac{\partial^2 \Delta_2 H}{\partial z \, \partial x} \\
\Delta_2 z_z = \alpha \dfrac{\partial^2 \Delta_2 H}{\partial z^2} & \Delta_2 x_y = 2\alpha \dfrac{\partial^2 \Delta_2 H}{\partial x \, \partial y}
\end{array} \right.
$$

e analogamente

$$
(2') \qquad \Delta_2 X_x = 2\mu\alpha \frac{\partial^2 \Delta_2 H}{\partial x^2} \qquad \Delta_2 Y_z = 2\mu\alpha \frac{\partial^2 \Delta_2 H}{\partial y \, \partial z}, \text{ ecc.}
$$

per cui osservando che

$$
x_x + y_y + z_z = \Theta = (\alpha + 1) \Delta_2 H
$$

$$
X_x + Y_y + Z_z = T = (3\lambda + 2\mu) \Theta = (3\lambda + 2\mu)(\alpha + 1) \Delta_2 H,
$$

e sostituendo nelle equazioni precedenti a $\Delta_2 H$ rispettivamente Θ e T, otteniamo

$$
\Delta_2 x_x = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \qquad \Delta_2 y_z = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \, \partial z}
$$

e anche

$$
\Delta_2 X_x = -\frac{2\alpha}{(3\alpha + 2)(\alpha + 1)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \Delta_2 Y_z = -\frac{2\alpha}{(3\alpha + 2)(\alpha + 1)} \frac{\partial^2 T}{\partial y \, \partial z},
$$

che sono formole note della teoria dell'elasticità. Si ha anche

$$
\frac{\Delta_2 X_x}{\Delta_2 x_x} = \frac{\Delta_2 Y_y}{\Delta_2 y_y} = \ldots = \frac{\Delta_2 Z_z}{\Delta_2 z_z} = \frac{\Delta_2 Y_z}{\frac{1}{2} \Delta_2 y_z} = \ldots = 2\mu,
$$

perciò nei problemi considerati la sostituzione delle componenti di deformazione a quelle di tensione non porta alcuna differenza sostanziale.

Le formole (2) (2′) fanno vedere che in generale non possiamo fissare ad arbitrio i valori di $\Delta_2 x_x$, $\Delta_2 y_y$, ... oppure di $\Delta_2 X_x$, $\Delta_2 Y_y$, ... poichè queste espressioni devono essere le derivate seconde di una stessa funzione. Se però sono costanti, esse non sono soggette ad alcuna condizione.

Una funzione biarmonica è sempre esprimibile mediante due funzioni armoniche, e noi possiamo porre perciò

$$(3) \quad U = \rho^2 U_{n-2} + U_n, \quad V = \rho^2 V_{n-2} + V_n, \quad W = \rho^2 W_{n-2} + W_n,$$

ove U_{n-2}, V_{n-2}, W_{n-2} sono omogenee armoniche di grado $n-2$, e U_n, V_n, W_n di grado n, e

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Sostituendo queste espressioni nelle formole (1) noi possiamo costruire gl'integrali omogenei più generali di grado $n-2$ delle equazioni della statica elastica. Se poniamo, per qualsiasi valore di n,

$$H_n = \frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{\partial V_n}{\partial y} + \frac{\partial W_n}{\partial z}$$

troviamo

$$H = \rho^2 H_{n-2} + H_n + 2\,(x\,U_{n-2} + y\,V_{n-2} + z\,W_{n-2})$$

e quindi

$$\Delta_2 H = 2\,(2n-1)\,H_{n-2}$$

e le equazioni (2) (2′) prendono la forma

$$\Delta_2 x_x = 2\alpha\,(2n-1)\,\frac{\partial^2 H_{n-2}}{\partial x^2} \qquad \Delta_2 y_z = 4\alpha\,(2n-1)\,\frac{\partial^2 H_{n-2}}{\partial y\,\partial z}, \text{ ecc.}$$

$$\Delta_2 X_x = 4\alpha\mu\,(2n-1)\,\frac{\partial^2 H_{n-2}}{\partial x^2} \qquad \Delta_2 Y_z = 4\alpha\mu\,(2n-1)\,\frac{\partial^2 H_{n-2}}{\partial y\,\partial z}, \text{ ecc.}$$

e sono quindi indipendenti dalla terna delle funzioni U_n, V_n, W_n.

Se n fosse negativo le formole precedenti darebbero delle soluzioni delle equazioni d'equilibrio omogenee fratte, che corrispondono ad altrettante di grado positivo, come le armoniche omogenee di grado n e $-(n+1)$.

II.

Dalle formole generali di rappresentazione delle componenti di spostamento di una deformazione regolare risulta che queste componenti possono in generale essere espresse mediante serie di funzioni omogenee della stessa specie di quelle che abbiamo considerate. Si presenta quindi naturale lo studio di ciascuna di queste speciali deformazioni per vedere quale contributo ciascuna di esse porti alla deformazione generale.

Una ricerca di questo genere può essere istituita in base alle espressioni (3) delle funzioni U, V, W e prendendo in esse tutti i possibili tipi delle armoniche di grado n ed $n-2$, e costruendo le corrispondenti deformazioni. Quante queste possano essere, lo si vede facilmente osservando che se prendiamo per u, v, w delle funzioni omogenee intere di grado n, e scriviamo che debbano soddisfare alle equazioni d'equilibrio, troviamo, fra i loro $\frac{3}{2}(n+1)(n+2)$ coefficienti, $\frac{3}{2}(n-1)n$ relazioni. La soluzione generale conterrà quindi $3(2n+1)$ coefficienti arbitrari indipendenti, ed altrettanti quindi saranno i tipi di deformazioni di grado n.

Ma può essere più utile a tale intento di trovare dapprima le deformazioni che dipendono da due sole variabili. Consideriamo le equazioni di equilibrio in questo caso

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \kappa \Delta_2 u = 0 \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} + \kappa \Delta_2 v = 0 \qquad \Delta_2 w = 0$$

ove

$$\kappa = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

e ricordando la forma generale delle armoniche di due variabili omogenee, di grado n, poniamo

$$u = \alpha \rho^2 (x+iy)^{n-2} + \beta (x+iy)^n \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$v = \gamma \rho^2 (x+iy)^{n-2} + \delta (x+iy)^n$$

essendo $\rho^2 = x^2 + y^2$ ed α, β, γ, δ costanti. Per la dilatazione cubica θ troviamo

$$\theta = 2(\alpha x + \gamma y)(x + iy)^{n-2} + (n-2)(\alpha + i\gamma)\rho^2 (x+iy)^{n-3} + \\ + n(\beta + i\delta)(x+iy)^{n-1}$$

e quindi, poichè θ deve essere armonica,

$$\alpha + i\gamma = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \gamma = i\alpha$$

e sarà

$$\theta = [2\alpha + n(\beta + i\delta)](x+iy)^{n-1}.$$

Abbiamo inoltre

$$\Delta_2 u = 4\alpha(n-1)(x+iy)^{n-2} \qquad \Delta_2 v = 4i\alpha(n-1)(x+iy)^{n-2}.$$

Perchè le equazioni d'equilibrio siano soddisfatte, basterà quindi che sia

$$2\alpha + n(\beta + i\delta) + 4\alpha\kappa = 0.$$

Ed a questa equazione possiamo soddisfare ponendo:

$$1^\circ \qquad \delta = 0 \qquad \beta = -\frac{2}{n}(2\kappa + 1)\alpha.$$

$$2^\circ \qquad \alpha = 0 \qquad \delta = i\beta.$$

Abbiamo così due tipi di soluzioni:

$$\text{I)} \qquad \begin{aligned} u &= \rho^2 (x+iy)^{n-2} - \frac{2}{n}(2\kappa+1)(x+iy)^n \\ v &= i\rho^2 (x+iy)^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{II)} \qquad u = (x+iy)^n \qquad v = i(x+iy)^n$$

ciascuno dei quali si scinde in due soluzioni reali. In tutto quindi per ogni grado n abbiamo quattro deformazioni, che ponendo

$$(x+iy)^n = U_n + iV_n$$

prendono forma reale assai semplice. Dalle (I) si ha:

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{aligned} u &= \rho^2 U_{n-2} - \frac{2}{n}(2\kappa+1)U_n \\ v &= -\rho^2 V_{n-2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= \rho^2 V_{n-2} - \frac{2}{n}(2\kappa+1)V_n \\ v &= \rho^2 U_{n-2} \end{aligned}$$

e dalle (II):

$$(\mathrm{II}')\quad \begin{aligned} u &= U_n \\ v &= -V_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= V_n \\ v &= U_n . \end{aligned}$$

Da queste deformazioni dipendenti dalle sole variabili x, y con semplici sostituzioni circolari sulle variabili x, y, z ed u, v, w si possono poi dedurre altre deformazioni dipendenti dalle sole y, z oppure z, x. Per la terza componente, la w, si potrà sempre assumere una qualsiasi delle armoniche dipendenti dalle sole variabili x, y; oppure z, y o z, x.

Si ottengono così delle deformazioni di carattere assiale, le cui proprietà si possono facilmente ricavare dalla forma polare delle componenti dello spostamento. Indicando con s_ϱ, s_τ queste componenti si ha dalle (I)

$$s_\varrho = \rho^n \left[e^{i(n-1)\theta} - \frac{2}{n}(2\kappa+1)\, e^{in\theta} \cos\theta\right]$$

$$s_\theta = \rho^n \left[e^{i(n-1)\theta + \frac{i\pi}{2}} + \frac{2}{n}(2\kappa+1)\, e^{in\theta} \operatorname{sen}\theta\right].$$

La prima di queste componenti rappresenta, in senso largo, una dilatazione radiale, la seconda una deformazione torsionale.

È chiaro poi che nelle formole precedenti si può supporre che n sia negativo, ed allora si hanno delle soluzioni fratte con un punto di singolarità nell'origine. La deformazione del primo ordine è sempre riducibile ad una deformazione omogenea del tipo

$$u = \alpha x \qquad v = \beta y \qquad w = \gamma z$$

e ad uno spostamento rigido.

Applicando le formole precedenti al caso di $n = 2$, troviamo come dipendenti da x, y le seguenti deformazioni elementari:

(3′)

$$u_1 = x^2 + y^2 - (2\kappa + 1)(x^2 - y^2) \qquad u_2 = -2(2\kappa + 1)xy$$
$$v_1 = 0 \qquad v_2 = x^2 + y^2$$

$$u_3 = x^2 - y^2 \qquad u_4 = 2xy$$
$$v_3 = -2xy \qquad v_4 = x^2 - y^2.$$

E da queste potremo ricavarne altre otto con sostituzioni circolari, a cui possiamo aggiungere

$$u = \alpha yz \qquad v = \beta zx \qquad w = \gamma xy$$

ove α, β, γ sono costanti arbitrarie.

Ma per studiare da un punto di vista generale le deformazioni omogenee dipendenti da tutte le tre variabili x, y, z, osserviamo che dovendo u, v, w essere biarmoniche di grado n, potremo sempre porre

$$(4) \qquad u = \rho^2 U_{n-2} + U_n \qquad v = \rho^2 V_{n-2} + V_n \qquad w = \rho^2 W_{n-2} + W_n$$

ove u_{n-2}, v_{n-2}, w_{n-2} e U_n, V_n, W_n sono armoniche di grado $n-2$ ed n rispettivamente. Poniamo per semplicità di scrittura

$$H_{n-3} = \frac{\partial U_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial V_{n-2}}{\partial y} + \frac{\partial W_{n-2}}{\partial z},$$
$$H_{n-1} = \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial W_{n-1}}{\partial z}.$$

Dalle (4) formando le espressioni della dilatazione cubica θ e delle componenti p, q, r della rotazione elementare troviamo

$$\theta = 2(xU_{n-2} + yV_{n-2} + 2W_{n-2}) + \rho^2 H_{n-3} + H_{n-1},$$
$$p = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \rho^2\left(\frac{\partial W_{n-2}}{\partial y} - \frac{\partial V_{n-2}}{\partial z}\right) + \frac{\partial W_n}{\partial y} - \frac{\partial V_n}{\partial z}, \text{ ecc.}$$

e siccome sia θ che le p, q, r debbono essere armoniche, dovrà essere

$$H_{n-3} = \operatorname{div}(U_{n-2}, V_{n-2}, W_{n-2}) = 0,$$
$$\operatorname{rot}(U_{n-2}, V_{n-2}, W_{n-2}) = 0,$$

e potremo porre perciò

$$(U_{n-2}, V_{n-2}, W_{n-2}) = \text{grad}\, S_{n-1},$$

dove S_{n-1} è una armonica di grado $n-1$ che possiamo subito determinare. Difatti posto

$$(5) \qquad u = \rho^2 \frac{\partial S_{n-1}}{\partial x} + U_n \qquad v = \rho^2 \frac{\partial S_{n-1}}{\partial y} + V_n$$
$$w = \rho^2 \frac{\partial S_{n-1}}{\partial z} + W_n$$

si ha

$$\theta = 2(n-1) S_{n-1} + H_{n-1},$$

$$\Delta_2 u = 2(2n-1) \frac{\partial S_{n-1}}{\partial x} \qquad \Delta_2 v = 2(2n-1) \frac{\partial S_{n-1}}{\partial y}$$
$$\Delta_2 w = 2(2n-1) \frac{\partial S_{n-1}}{\partial z},$$

quindi le equazioni d'equilibrio sono soddisfatte quando sia

$$2(n-1) S_{n-1} + H_{n-1} + 2\kappa(2n-1) S_{n-1} = 0$$

cioè

$$S_{n-1} = -\frac{1}{2((2n-1)\kappa + n - 1)} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{\partial V_n}{\partial y} + \frac{\partial W_n}{\partial z}\right).$$

Le (5), quando S_{n-1} abbia questo valore, dànno l'espressione della deformazione omogenea di grado n, mediante le tre armoniche, di grado n, U_n, V_n, W_n.

Notiamo che le espressioni più generali di queste contengono ciascuna $2n+1$ costanti arbitrarie. Quindi nelle (5) compariranno nel caso più generale $3(2n+1)$ costanti arbitrarie, quante appunto ne deve contenere la deformazione armonica generale di grado n. Queste formole (5) daranno quindi le espressioni esplicite di queste deformazioni, quando si assuma per le armoniche una qualsiasi delle molte espressioni, che sono conosciute per tali funzioni.

Mediante di esse si arriva anche facilmente alla soluzione per serie dei problemi di deformazione della sfera.

Gli integrali delle equazioni d'equilibrio mediante i quali De Saint Venant ha risolto il problema della torsione e della deformazione del cilindro, non sono che combinazioni di deformazioni armoniche di 1°, 2° e 3° grado speciali e possono perciò essere dedotte facilmente dalle nostre formole.

Se consideriamo, ad esempio, il gruppo di termini di 2° grado che rappresenta la così detta flessione semplice [1], esso è dato da

$$u = \frac{1}{2}\left[\eta\,(x^2 - y^2) + z^2\right] \qquad v = \eta xy \qquad w = -xz$$

ove η è il coefficiente di Poisson. Ora se nelle (5) facciamo $n=2$, e poniamo, come è lecito,

$$U_2 = \alpha\,(x^2 - y^2) \qquad V_2 = \beta xy \qquad W_2 = \gamma xy \tag{6}$$

troviamo

$$u = \omega\rho^2 + \alpha\,(x^2 - y^2) \qquad v = \beta xy \qquad w = \gamma xz$$

colla condizione fra le quattro costanti α, β, γ, ω:

$$2\omega\,(3\kappa + 1) + 2\alpha + \beta + \gamma = 0\,.$$

Una combinazione lineare delle (6) colle (3′) ci dà la deformazione

$$u = \frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\epsilon}{2}\right)(x^2 - y^2) \qquad v = \frac{\beta}{2\omega}xy \qquad w = \frac{\gamma}{2\omega}xz$$

dove $\epsilon = 2\kappa + 1$.

Basta ora porre

$$\frac{\beta}{2\omega} = \frac{1}{2}(1 - \kappa) \qquad \frac{\gamma}{2\omega} = -1$$

per avere dalla (6)

$$\frac{\alpha}{2\omega} = -\frac{1}{2}(1 + 5\kappa) \qquad \frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{1 - \kappa}{4}$$

---

[1] Cfr. CESARO, *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, pag. 153.

e si ottengono così le formole (6) della flessione semplice, poichè si ha $2\eta = 1 - \kappa$.

Se ora si considera che la soluzione del problema di De Saint Venant utilizza soltanto alcuni tipi semplici delle deformazioni omogenee di 1°, 2° e 3° grado, e che essa rappresenta ancora forse l'unica completa applicazione della teoria dell'elasticità a problemi della pratica tecnica, si può facilmente pensare a quali più larghe applicazioni potranno condurre le soluzioni generali considerate. Esse costituiscono una miniera inesauribile di soluzioni speciali perfettamente rigorose, di forma analitica semplicissima, e quindi opportuna pei calcoli numerici; e inoltre contenenti quanti si vogliono coefficienti arbitrari, che potranno servire ad adattarle ai più svariati problemi, od anche ad approssimare fino al limite necessario le condizioni che devono essere verificate alla superficie dei corpi. Si può anche credere che l'aver finora trascurato, o quasi, tali soluzioni sia la cagione della scarsa applicazione che i metodi rigorosi della Meccanica teorica hanno trovato nella teoria della resistenza dei materiali.

Per queste ragioni ci è sembrato utile di stabilire sotto una forma, che ci sembra la più semplice, le loro espressioni generali (sebbene di esse vi siano indicazioni ed applicazioni particolari in quasi tutti i trattati), colla speranza anche di facilitarne l'uso a chi vorrà tentarne qualche applicazione nei problemi della tecnica.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Febbraio 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Majorana, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza i Soci Guidi ed Herlitzka.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che viene approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una Circolare del " Touring Club italiano „ relativa al Bando di Concorso per un *Manuale di Educazione della volontà*, al quale è stato assegnato dal Commendatore Luigi Brioschi il premio di lire 20.000. Il Concorso che si svolgerà colle norme stabilite dal Bando di Concorso si chiuderà il 31 dicembre 1924.

Si comunica quindi una lettera del Rettore dell'Università di Napoli, nostro Socio Zambonini, nella quale si richiede alla Accademia che voglia designare il nome della persona che dovrà rappresentare il nostro Sodalizio nella imminente solenne occasione della celebrazione del settimo centenario della sua istituzione. L'Accademia delibera di interpellare anche l'altra Classe in proposito, nell'intento di dare tale incarico al Socio nazionale più anziano di nomina, e ricusando questi, al Socio Zambonini.

Il Presidente comunica quindi una lettera del Prof. Takayanagi della Università imperiale di Tokio, nella quale si notifica la perdita della Biblioteca Universitaria, ricca di oltre 800.000 volumi, e si fa appello alla generosa cooperazione delle Accademie per raccogliere nuovi materiali di studio. Il Presidente notifica che di tale richiesta già si è occupato il Consiglio di Amministrazione nel senso di favorirla quanto più gli risulterà possibile.

Il Socio Panetti presenta e fa dono all'Accademia di una sua Memoria *Sull'attrito cinetico nelle macchine* e la illustra brevemente.

Il Socio Parona presenta per la inserzione negli *Atti* una Nota di L. Cognetti de Martiis sulle *Cellule di Senso diffuse sulle pareti dei canali laterali di un Teleosteo* (*Amiurus catus* L.).

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata procedette alla nomina di tre Soci nazionali residenti e riuscirono eletti salva l'approvazione Sovrana, i professori Tommaso Boggio, Felice Garelli ed Umberto Pierantoni.

LETTURE

Cellule di senso diffuse alla parete dei canali laterali di un Teleosteo (*Amiurus catus* L.).

Nota del Dott. LUIGI COGNETTI DE MARTIIS, prof. inc.

(con una tavola)

Presentata dal Socio nazionale residente Parona

I molti dati che si trovano oggidì raccolti nella copiosa letteratura sugli organi di senso dei canali laterali dei Teleostei pare siano concordi su due caratteristiche ritenute come generali per gli organi in parola. Questi sono rappresentati dalla riunione in gruppo di *più cellule* morfologicamente differenziate in rapporto alla funzione sensoria, e accompagnate da buon numero di cellule di sostegno. Inoltre le piccole aree di senso sono disposte alla parete *prossimale* dei canali laterali. Quest'ultima condizione consegue alla posizione che le aree stesse hanno, durante l'ontogenesi, sul fondo di infossature destinate a trasformarsi in canali. Le due caratteristiche suddette sono riferite nelle opere sintetiche sull'anatomia dei Pesci, o sugli organi di senso in generale (1).

Recentemente ho avuto occasione di svolgere alcune ricerche sugli organi di senso di un noto Siluride nord-americano, l'*Amiurus catus* (L.), specie diffusa ormai anche nelle acque dolci europee. Il materiale fresco venne, con estrema cortesia, messo a mia disposizione dal Dr Comm. E. Festa, il quale possiede a Ceresole d'Alba (Cuneo) un allevamento di detta specie. All'egregio collega ed amico rinnovo l'espressione sincera della mia gratitudine.

(1) Per dati e bibliografia rimando ai recenti trattati di Plate 1924, di Bütschli 1921, e a quelli meno recenti di Vialleton 1911, di Perrier 1903, di Gegenbaur 1898, inoltre alla monografia di Hesse 1903 sugli organi di senso, e all'elenco — non completo — di opere ittiologiche compilato da Lichtenfelt 1906.

Esaminando in varî esemplari, grossi e piccoli, la struttura dei canali laterali ho potuto facilmente riconoscere la presenza delle aree di senso pluricellulari alla parete prossimale dei canali stessi, e porre a confronto le particolarità istologiche osservate con le descrizioni che varî autori hanno dato delle aree stesse in *Amiurus* o in altri Siluridi (1). Ma un'altra interessante particolarità, forse non notata finora, mi venne fatto di porre in chiaro nei canali laterali del Siluride nord-americano, e precisamente quella che forma il titolo della presente Nota.

In sezioni di pezzi fissati con diversi metodi (2) e tinte coll'ematossilina ferrica HEIDENHAIN m'è apparsa evidentissima la presenza di *due sorta di cellule di senso, non raggruppate in speciali aree, bensì distribuite senza ordine alcuno, sia alla parete prossimale che a quella distale dei canali laterali,* tanto del capo che del tronco. I due tipi di cellule sono nettamente diversi l'uno dall'altro, e offrono pure differenze dalle cellule di senso delle areole sensorie proprie dei canali. Entrambi i tipi di elementi o esteti abbondano nei canali; uno dei due sembra tuttavia essere meno frequente nei canali del capo. Non si tratta di tipi nuovi di cellule di senso, chè anzi si prestano bene a confronti con altre cellule sensorie della epidermide dello stesso *Amiurus*. L'epidermide superficiale di questo animale, provvisto abbondantemente di organi di senso pluricellulari (3), manca di regola di cellule sensorie isolate (4).

Dei due tipi d'elementi in parola, l'uno, più facilmente riconoscibile, sporge nel lume dei canali con robusto pelo di senso ed è percorso da una fibrilla; distinguo questo tipo col nome *trichesteto*. L'altro tipo manca del pelo di senso e di fibrilla, la sua estremità libera, attenuata ma non appuntita, affiora al

---

(1) Cfr.: WRIGHT 1884, FRITSCH 1887, LEYDIG 1894, BUNKER 1897. La disposizione dei canali laterali di *Amiurus* è descritta in COLLINGE 1885; essi sono suddivisi in brevi tratti provvisti di relativi pori d'accesso.

(2) Formol picrico acetico BOUIN e BOUIN HOLLANDE; miscela di sublimato, bicromato potassico, formalina e ac. osmico secondo MAXIMOW LEVI; sublimato alcoolico nitrico acetico di GILSON CARAZZI; sublimato picrico acetico di VOM RATH.

(3) Cfr. per la loro descrizione: HERRICK 1901 e 1903.

(4) Vedi avanti a pag. 229.

margine dell'epitelio; denomino *amblesteto* (da ἀμβλύς, ottuso) questo secondo tipo d'elementi di senso.

Alla minuta descrizione dei due tipi faccio seguire alcune considerazioni comparative, anche per porre in rilievo la speciale importanza offerta dalla distribuzione diffusa degli esteti medesimi nei riguardi dei Siluridi e dei Vertebrati.

Trichesteti (fig. 1-4). — Rispecchiano alcuni caratteri di cellule gangliari di senso, sia nella forma che nella struttura (1). La prima è molto allungata, sottile, e si svolge coll'asse principale di regola più o meno obliquo rispetto al margine epiteliale, od anche in parte ad esso parallelo. Il corpo cellulare è segnato dal nucleo ovale, mediocremente allungato nel senso dell'asse polare della cellula. La larghezza del nucleo e quella del corpo cellulare sono su per giù uguali (fig. 1), raramente il nucleo appare fiancheggiato da un alone citoplasmatico riconoscibile (fig. 2). Davanti e dietro al nucleo il corpo cellulare si attenua per continuarsi in modo uniforme nei due prolungamenti polari insinuati frammezzo alle cellule epidermiche. Dei due prolungamenti quello profondo è assai meno facilmente riconoscibile di quello receptore, proteso a sporgere col tratto distale sulla superficie epiteliale. Ciò dipende in special modo dalla difficoltà di penetrazione dei liquidi fissativi attraverso alla guaina osteoide che abbraccia i canali laterali. Analogo ostacolo incontrò Fritsch (loc. cit., pag. 51) nello studio istologico dei canali laterali di *Malapterurus*. Il prolungamento receptore sembra essere in ogni caso più lungo di quello prossimale; ma non oso affermarlo in modo assoluto, giacchè non mi è mai riuscito di riconoscere con esattezza l'estremità di quest'ultimo, il cui decorso si svolge sinuoso frammezzo alle cellule epiteliali profonde. Il prolungamento receptore è conico, si attenua gradatamente verso l'estremità, ed ha decorso rettilineo o poco incurvato. Trattiene facilmente l'ematossilina ferrica, ma differenziando a dovere risulta assai chiara la presenza nel suo interno di una fibrilla poco ondulata e indivisa, che potei seguire in varî casi fino a fianco del nucleo, ove essa appare più attenuata (fig. 3). Non mi è stato possibile riconoscere la continuazione della fibrilla nel pro-

(1) Non posso tuttavia affermare che vi sia identità nella natura.

lungamento prossimale dei trichesteti, ma credo ciò debba ascriversi piuttosto alla difficoltà di fissazione sopra accennata che ad interruzione della fibrilla stessa (1). L'ultimo tratto del prolungamento receptore costituisce un *pelo di senso*, lungo di solito 6-8 μ, di aspetto semirigido, che sporge nel lume del canale laterale. La base del pelo è spessa μ 0,3 a 0,6; talvolta vi si scorge ancora la fibrilla staccata dalla parete, mentre nel tratto apicale ciò non è più possibile, data l'estrema sottigliezza del tratto medesimo.

La massima lunghezza totale d'un trichesteto s'aggira sui 40 μ (fig. 1) o poco più; la larghezza massima del suo corpo è di circa μ 2,5; la distanza tra il nucleo e la punta del pelo di senso è di 15-30 μ; lunghezza del nucleo 5-8 μ, sua larghezza μ 1,5 a 2,5.

Nel citoplasma dei trichesteti non ho potuto riconoscere la presenza di vacuoli, di granulazioni o di altro materiale atto a comprovare un'attività secretoria. Il nucleo è ricco di cromatina, distribuita in grani su un fitto reticolo oltrechè contro la membrana (fig. 4).

Esaminando la disposizione dei trichesteti nel tratto iniziale di singoli canali, cioè in vicinanza del poro d'accesso, ove essi abbondano, è facile riconoscere la loro disposizione assai inclinata per modo da protendere il pelo di senso in direzione del poro, così dicasi del tratto del canale più lontano dal poro ove la cosa è tuttavia meno costante e i trichesteti sono meno fitti. Può pure verificarsi, lungo il decorso di un canale, una inversione nella disposizione dei trichesteti, ma si tratta allora, credo in ogni caso, di canali muniti di due (o più) pori d'accesso: il punto in cui si nota l'inversione in parola corrisponde verosimilmente all'incontro e comunione di due canali provenienti da due infossamenti epidermici contigui. Sono piuttosto rari i casi in cui i trichesteti mostrano il tratto distale diretto normalmente

---

(1) Ripetute prove con metodi destinati a colorare elettivamente cellule e fibre nervose non mi hanno dato risultati pratici nè per la fibrilla in parola nè per le fibre nervose: queste ultime mi apparvero ben spesso tinte in nero dall'ematossilina ferrica Heidenhain. Per i vantaggi che l'emat. ferr. H. offre in confronto ai metodi specifici neuroistologici vedasi in Franz (1923, p. 406, Acranî!).

o quasi all'asse longitudinale del canale (fig. 3, 4). Non ho potuto accertare se il tratto prossimale raggiunge la basalis per attraversarla o se si pone in rapporto di contatto con terminazioni nervose intraepiteliali. L'epitelio dei canali laterali è sottile, formato usualmente da tre o quattro piani di cellule un po' depresse: il suo spessore totale (20-25 μ) è notevolmente minore della lunghezza dei trichesteti, onde la posizione obliqua di questi ultimi.

Più volte ho trovato due trichesteti contigui (fig. 3), ma di regola a questi elementi s'interpongono in vario numero cellule epidermiche di rivestimento punto modificate nella forma. I trichesteti dei canali laterali, sia del capo che del tronco di *Amiurus catus*, non sono quindi mai raggruppati a formare delle areole sensorie; essi rispecchiano nettamente una distribuzione diffusa su tutta la parete dei singoli canali, ad eccezione delle areole o placche sensorie corrispondenti agli organi di senso propriamente detti dei canali laterali.

Non posso escludere in modo assoluto la presenza di rari trichesteti isolati nell'epidermide della superficie del corpo. In due casi notai la presenza di un robusto filamento siderofilo disposto nell'epidermide ortogonalmente alla superficie e con decorso rettilineo, terminato in un pelo libero all'esterno: non potei tuttavia riconoscere un corpo cellulare corrispondente.

Amblesteti (fig. 5-8). — Possiedono i caratteri di cellule di senso secondarie. Sono assai frequenti nei canali laterali del tronco, ma li ho trovati più rari nei canali del capo. Hanno forma a pera o clavata: misurano in lunghezza 10-13 μ, la massima larghezza è di 4-6 μ. Sono quindi assai più corti dei trichesteti, ma li superano nello spessore del corpo. In questo è contenuto il nucleo sferico, spesso 3-4 μ, assai ricco di cromatina distribuita su un fitto reticolo e contro la parete. Sensibilmente diverso è l'aspetto del nucleo delle cellule epiteliali di rivestimento, sferico od ovoide in sezione, ma meno siderofilo perchè più povero in cromatina e dotato di reticolo meno fitto.

Il citoplasma mi apparve omogeneo, privo di materiali che dimostrino attività secernente, nè vi potei riconoscere traccia alcuna di fibrille. La parte distale, attenuata, che costituisce il prolungamento receptore, è subconica, tronca, e s'insinua fra le cellule di rivestimento ad affiorare coll'estremità alla superficie

dell'epitelio, senza tuttavia sporgere nel lume del canale. La estremità è larga 1-2 μ, non è mai acuminata, bensì presenta nella maggioranza dei casi una piccola area piana o un po' incavata. Il tratto apicale così foggiato è lungo 1 μ o poco più, ed è facilmente riconoscibile per la spiccata siderofilia del suo contorno verosimilmente cuticolare. Ho potuto notare molte volte che il cappuccio siderofilo è un po' più sottile al centro dell'area apicale suddetta (fig. 8).

La parte dilatata manca di prolungamento alla base (1); essa si affonda nell'epitelio, formato, com'è detto sopra, di tre o quattro piani di cellule, ma senza attraversarlo in tutto il suo spessore, neppure nel caso in cui l'asse polare sia diretto normalmente alla superficie dell'epitelio (fig. 5-7). Tale condizione però si offre di rado, chè gli amblesteti sono di solito flessi in ampia curva fino a disporsi talvolta coll'asse maggiore parallelo alla superficie dell'epitelio, rimanendo allora protetti dal solo piano superficiale di cellule (fig. 8). La flessione degli amblesteti s'effettua in direzioni varie, nè si manifesta un ordinamento costante nell'orientamento del loro polo receptore verso i pori di entrata ai canali laterali. Anche gli amblesteti possono trovarsi accostati a due a due (fig. 7), ma per essi, come pei tricheesteti, si ripete prevalentemente la distribuzione diffusa nella parete, sia distale che prossimale, dei canali laterali. Anche gli amblesteti — coi caratteri strutturali sopra descritti — mancano nelle aree o placche sensorie corrispondenti agli organi di senso propriamente detti dei canali laterali.

Aree o placche di senso dei canali laterali (fig. 9 e 10). — Un primo confronto che mi venne fatto di stabilire nei riguardi degli elementi di senso sopra descritti è quello con le cellule sensorie proprie delle aree o placche contenute anch'esse nei canali laterali di *Amiurus catus*. Dette aree vennero descritte, per la specie in parola, da Wright; ma più tardi Herrick (1901), che le studiò in *A. melas* (Raf.), giudicò " very unsatisfactory " le figure di Wright, apprezzando invece l'esattezza della descrizione di Bunker per le aree di *A. nebulosus* (Le Sueur).

Le cellule sensorie, raggruppate in buon numero nelle aree,

(1) Piccoli lobi come quello riprodotto in fig. 5 si osservano di rado e sono verosimilmente artefatti della fissazione.

sono secondarie, piriformi al pari degli amblesteti, e si distinguono nettamente dai trichesteti che mai si trovano in dette aree. La fig. 9 ne mostra quattro intercalate a cellule di sostegno. Le particolarità citologiche figurate si ritrovano soltanto in parte nella descrizione di Bunker, il quale si valse tuttavia, per le sue osservazioni, di metodi varî di tecnica microscopica, compresa la colorazione con ematossilina ferrica Heidenhain.

La capocchia che ogni cellula sensoria porta all'estremità ricorda quella descritta e figurata da Retzius (1898, tav. XVIII, fig. 12) (1) per le cellule consimili presenti nelle ampolle di Lorenzini di *Acanthias*. In cima alla capocchia non ho trovato il pelo di senso ricordato da Wright, Bunker e Herrick: ho invece notato che ben soventi la tenue cuticola di cui sono tappezzati i canali laterali appare corrugata, sollevata e lacerata sopratutto sulle aree o placche di senso. Tenui lembi di cuticola possono allora qui interpretarsi come peli di senso, ma un esame attento e ripetuto mi ha distolto da una simile interpretazione. I distacchi della cuticola sono dovuti a difetti di fissazione, quasi inevitabili per la causa sopra riferita (pag. 227). Se veramente le cellule in parola fossero fornite di pelo di senso, non vedo ragione perchè esso soltanto non si manifesti nei miei preparati, mentre è evidentissimo il pelo dei trichesteti, ed è pure evidentissimo il peluzzo delle cellule sensorie dei bottoni terminali (terminal buds) distribuiti alla superficie del corpo (v. sotto).

Dalla capocchia delle cellule sensorie delle placche dei canali laterali si protendono verso il corpo cellulare alcune fibrille brevi e sottili; esse sono probabilmente formazioni metaplasmatiche, uguali per natura alla sostanza propria della capocchia (fig. 9).

Meritano speciale menzione le formazioni granulari che si trovano nel citoplasma del corpo cellulare, mancando esse nel prolungamento distale. Tutte sono spiccatamente siderofile: parte di esse è confinata nella regione basale della cellula, mentre le altre formano uno, raramente due o più, gruppi di solito contigui al nucleo. Tali gruppi non sono tuttavia costanti

(1) La figura di Retzius è riportata da Hesse (loc. cit., pag. 39) e da Bütschli (loc. cit., pag. 670). Per pesci ossei cfr. fra altri il recente lavoro di Heilig (1912).

in tutte le cellule di senso in parola: se intensamente tinti dall'ematossilina ferrica HEIDENHAIN, appaiono come masse compatte (fig. 9), ma differenziando a dovere si scorgono i granuli che li compongono (fig. 10). Le variazioni, talora sensibilissime, che si osservano nella quantità delle masse granulari, talora anche del tutto assenti, mi hanno spinto a considerare le granulazioni stesse quale indice di attività secretoria (1) piuttosto che condrioma.

Il nucleo, sferico o ovoide, è ricco di cromatina e mostra ben spesso un granulo sferico più grosso. Quest'ultimo è più costante nei nuclei ovoidi delle lunghe e tenui cellule di sostegno, la cui cromatina è invero assai più scarsa (fig. 9 e 10).

È già nota, nelle aree di senso qui descritte, la differente lunghezza dei due tipi di cellule: le cellule di sostegno formano un'alta (2) palizzata, e ognuna di esse raggiunge con le estremità sia il margine libero che la basalis dell'epitelio: i loro nuclei sono ravvicinati alla base. Le cellule di senso non superano, usualmente, la metà della lunghezza delle cellule di sostegno ad esse intercalate (fig. 10). Ciò vale pel centro delle aree di senso, chè ai margini questi rapporti variano sensibilmente.

Il confronto fra gli amblesteti e le cellule sensorie delle aree suddette consente di riconoscere somiglianze nella forma sia dei due elementi che del loro nucleo, come pure nella struttura e nella siderofilia di quest'ultimo. Ma altri caratteri (forma dell'apice, fibrille, granulazioni siderofile basali e adnucleari) forniscono delle differenze non prive di significato. È pure di regola diverso il volume dei due elementi; gli amblesteti sono di solito più piccoli. Di più, mentre gli amblesteti sono raramente orientati coll'asse principale normale alla superficie dell'epitelio, tale orientazione è tipica nelle cellule sensorie delle

---

(1) Ricordo a questo riguardo l'ipotesi avanzata da BOTEZAT (1909, 1910 *a*, *b*), secondo la quale le cellule di senso secondarie dovrebbero ravvicinarsi alle cellule sierose ghiandolari: le loro secrezioni sarebbero destinate ad eccitare le terminazioni nervose. Notevole nelle cellule qui descritte la presenza di granulazioni appunto nella regione basale (fig. 9), quella attorno alla quale è verosimile siano disposte le terminazioni d'una fibra nervosa. L'ipotesi di BOTEZAT pare tuttavia abbia incontrato poco favore (cfr. KOLMER 1910, e PLATE 1924, pag. 15).

(2) Circa 40-50 μ nella parte centrale delle aree.

placche; ma qui interviene senza dubbio l'azione meccanica delle lunghe cellule di sostegno intercalate (fig. 9). Rimane infine la differenza data dal fatto che mentre gli amblesteti sono diffusi e distanziati fra loro, le cellule sensorie delle placche — pur essendo anch'esse nella parete dei canali laterali — appaiono invece raggruppate. Nè mi pare che quest'ultima circostanza possa invocarsi quale causa determinante delle particolarità di struttura sopra indicate come caratteri differenziali dagli amblesteti.

È logico allora porre il quesito se l'esistenza nei canali laterali di *Amiurus catus* di tre elementi di senso fra loro più o meno diversi non sia indice di tre diverse capacità sensorie localizzate nei canali stessi. Tralascio, per brevità di spazio, di svolgere qui altre considerazioni a questo riguardo.

Cellule sensorie degli organi di senso superficiali. — Questi organi sono noti per lo studio che ne fece ALLIS (1897) in *Amiurus catus*, e più ancora per lo studio che ne fece HERRICK (1901, 1903) in *A. melas*. Anche in *A. catus* sono facilmente riconoscibili gli organi chiamati da HERRICK: *a*) " pit organs ", piccoli e grandi; *b*) " terminal buds ". In questi ultimi le lunghe e sottili cellule di senso sono dotate di due prolungamenti, e si estendono ciascuna per tutta l'altezza dello strato epidermico (fig. 11). Invece le cellule sensorie dei " pit organs " sono piriformi e non raggiungono mai colla parte allargata la basalis.

Le cellule dei " terminal buds " sono affatto simili ai trichesteti (fig. 1 e 11); il loro pelo di senso misura circa 3 μ, ed è quindi un po' più corto di quello dei trichesteti. Per tutta la loro lunghezza sono traversate da *una robusta fibrilla siderofila*, che potei riconoscere anche nel sottile prolungamento basale della cellula. Al pari dei trichesteti il tratto più prossimo al pelo di senso è più siderofilo, come risulta da preparati di sezioni molto differenziate coll'allume ferrico (1).

---

(1) In sezioni tinte col bleu di toluidina si distingue chiaramente che la porzione distale delle lunghe cellule dei terminal buds, ad eccezione del pelo di senso, è occupata da una sostanza fittamente granulosa che si colora allo stesso modo della mucina, cioè in rosso-violaceo, come già ebbi occasione di ricordare altrove (1923). Non mi è stato possibile riconoscere la medesima caratteristica nei trichesteti. La fibrilla assile non è messa in evidenza dal bleu di toluina.

Le cellule sensorie piriformi dei “ pit organs „ (fig. 12) rassomigliano più agli amblesteti che alle cellule piriformi delle aree sensorie dei canali laterali. Invero esse mostrano di rado le granulazioni siderofile, in special modo quelle addensate di solito accanto al nucleo, nè sono provviste di fibrille siderofile presso il polo distale, che può essere piano, mediocremente allargato, e manca d'una vera capocchia siderofila, ma è protetto da un tenue cappuccio laminare siderofilo, facilmente deformabile. Trovai le loro dimensioni di regola alquanto superiori a quelle degli amblesteti e delle cellule piriformi delle aree dei canali laterali. Misurano in lunghezza 20-35 μ, in spessore 12-18 μ; il loro nucleo, sferico, ha il diametro di 8-11 μ.

Per le cellule sensorie dei “ pit organs „ pare non vi sia dubbio che siano secondarie. Quelle dei “ terminal buds „ è supponibile siano pure considerate come tali, vista la grande somiglianza dei bottoni terminali di *Amiurus* con quelli di altri Teleostei nei quali le cellule di senso vennero studiate ripetutamente con metodi di tecnica delicati e precisi, e riconosciute appunto come secondarie. Nei miei preparati non ho potuto scorgere arborescenze terminali di fibre nervose disposte a fiancheggiare le cellule di senso, ed ho già sopra ricordato l'insufficienza di risultati avuta dall'applicazione di metodi destinati a colorare elettivamente elementi nervosi.

Vanno ora considerati i due caratteri nuovi sopra riferiti: la fibrilla assile rivelata dall'ematossilina ferrica e la probabile attività secretoria dimostrata dalla presenza nel citoplasma di una sostanza colorabile col bleu di toluidina allo stesso modo della mucina. Il primo carattere ha particolare importanza: se la fibrilla assile è di natura nervosa, e si continua prossimalmente in una fibra, le lunghe cellule in parola dovrebbero considerarsi quali cellule primarie o gangliari di senso. Ho detto sopra che i trichesteti rispecchiano caratteri di quest'ultime, non senza esprimere tuttavia una riserva circa la natura.

Il secondo carattere richiama anche qui il ricordo dell'ipotesi di Botezat (1): va tuttavia notato, nel caso in parola, che il prodotto di secrezione, se veramente è tale, appare accumulato nel tratto distale della cellula. Sta forse ciò ad indicare che il

(1) Vedi sopra a pag. 232, nota 1.

prodotto è destinato ad essere emesso all'esterno? Oppure che la sua presenza — come materia alterabile per effetto di agenti esterni — ha azione di contatto sulla fibrilla assile? Alle due domande è difficile rispondere in modo sicuro.

Rimane comunque assodato anche più positivamente che i trichesteti sono elementi di senso, vista la loro grande somiglianza con le cellule di bottoni terminali, ai quali si ascrive funzione gustativa (1).

Rimane a spiegare la disposizione dei trichesteti diffusi isolatamente nella parete dei canali laterali in opposizione all'accentramento delle lunghe cellule consimili nei bottoni terminali. È opportuno richiamare a questo proposito l'idea espressa da Plate (1924) per giustificare l'assenza di cellule di senso isolate nell'epidermide dei Vertebrati. In questi animali " es fehlen " einzeln stehende Sinneszellen in der Epidermis, weil diese " vielschichtig geworden ist und die zarten Tastzellen (2) sich " daher nur im zahlreichen Verbande, als Knospe, halten können, " und es fehlen primäre Sinneszellen; alle sensiblen Zellen der " Haut werden von Dendriten umsponnen, sind also sekundär " (loc. cit., pag. 38). " Wir finden die primären Zellen bei den " Wirbeltieren nur in der Nasenhöhle, wo ein zartes Epithel " bestehen bleiben konnte, weil es mechanischen Verletzungen " kaum ausgesetzt war, und im Auge (3), dessen erste Stufe " durch die Umwandlung der Medullarrinne zum Ventrikel ge- " schützt wurde " (loc. cit., pag. 762).

Le considerazioni giustificative di Plate si conciliano singolarmente bene col caso da me illustrato nel presente lavoro di cellule sensorie diffuse isolatamente alla parete dei canali laterali. Quest'ultima è invero dotata di un epitelio rivestente molto più sottile dell'epidermide superficiale, sia nei tratti profondi

---

(1) Cfr. Hesse, pag. 55, e Plate 1924, pag. 54 e 360 (*Amiurus*!).

(2) Nella categoria degli " Hautsinnes (Tast) organe " dei Vertebrati Plate comprende anche le " epitheliale Sinnesknospen ", tra le quali egli annovera i bottoni epidermici — Sinnesknospen e Sinneshügel (= terminal buds e pit organs) — dei Pesci ossei.

(3) Già nella prima parte della sua opera (1922, pag. 378) Plate aveva ammesso che le cellulev isive dei Vertebrati fossero primarie, com'è ripetuto nella seconda parte (1924, pag. 13). Cfr. a questo riguardo l'opinione opposta di Botezat (1910, pag. 518, ubi lit.).

dei canali che in vicinanza dei pori d'accesso (1): non sono così sottili le aree o placche sensorie. La sottigliezza dell'epitelio in parola è, in *Amiurus catus*, verosimilmente collegata all'assenza in esso epitelio di cellule ghiandolari (Kolbenzellen, cellule caliciformi), le quali appaiono, copiose e grosse, nell'epidermide superficiale (2), e può pure collegarsi alla minore influenza esercitata nell'interno dei canali laterali dalle " mechanische Verletzungen " che agiscono direttamente sulla superficie del corpo.

Plate ammette infine un rapporto fra epitelio conservatosi sottile e la presenza in esso di cellule di senso primarie; così egli chiarisce l'esistenza di tali cellule nella cavità nasale dei Vertebrati. Lo stesso autore precisando i caratteri della cellula di senso primaria, o neurone periferico, così si esprime: " In vielen Fällen setzt sich die Nervenfaser " — del neurone in parola — " mit einer oder mit mehreren Neurofibrillen durch " den Zellkörper bis zum distalen Pole fort, um hier entweder " frei auszulaufen oder in das der Zelle aussen aufsitzende " Stäbchen bzw. in mehrere Stäbchen überzugehen. Wenn nun " in den Sinneszellen solche Neurofibrillen noch nicht gefunden " sind, so sind sie vielleicht übersehen worden " (1924, loc. cit., pag. 13) (3). E più sopra (pag. 12) definisce la cellula di senso primaria giacente " meist zwischen den Epithelzellen als eine " schmale spindelförmige Zelle etc. ".

Questa disposizione e questa forma si ripetono nei trichesteti, nei quali ho pure dimostrato l'esistenza di una fibrilla, che non posso tuttavia affermare sia di natura nervosa. Così dicasi per le cellule di senso dei bottoni terminali epidermici di *Amiurus catus*.

Trichesteti e filamenti sensorî degli organi laterali di Labeo. — Nel lungo capitolo, denso di dati, che Plate (1924) dedica agli organi laterali, sono raccolti, a pag. 85, alcuni esempi tipici di organi laterali sparsi. Tra essi è annoverato quello fornito da *Labeo* e descritto da Collinge

---

(1) Vedi sopra a pag. 229.

(2) Per la produzione di muco a spese delle cellule epiteliali superficiali dei canali laterali rimando a una mia recente Nota (1923).

(3) Schneider (1908) distingue per la forma cellule di senso primarie e secondarie, e ammette che il loro " Sarc enthält längsverlaufende Fäden, die wohl immer den Charakter von Neurofibrillen aufweist " (pag. 47).

(1895) (1), che qui particolarmente interessa per la forma e la struttura degli elementi di senso. *Labeo dussumieri*, Ciprinide delle Indie Orientali, possiede sul muso numerosi pori che conducono ciascuno in una cavità provvista alla parete di " a series of sensory filaments into which a fine branch of a nerve passes " (fig. 287, tav. 19, fig. 8 e 9). Collinge non specifica quale metodo di tecnica gli abbia suggerito di chiamare nervosa la fibrilla che percorre i filamenti. Comunque è forse consentito ammettere che questi appartengono a cellule simili ai trichesteti. Notevole allora il fatto che tali elementi siano nelle fossette circumboccali di *Labeo* raggruppati — non molto strettamente però, a giudicare dalla fig. 8 di Collinge — mentre i trichesteti di *Amiurus catus* sono sparsi lungo i canali laterali. Sarebbe interessante conoscere se in *Labeo* i canali laterali sono essi pure dotati di filamenti sensorî, e come questi vi sono disposti.

Riassunto e conclusioni.

Le mie osservazioni sull'*Amiurus catus* (L.) hanno dimostrato che nei canali laterali di questo Siluride esistono TRE SORTA DI ORGANI DI SENSO rappresentati da:

A, placche o aree sensorie (organi laterali degli autori);

B, cellule di senso *isolate* e *diffuse*, distinguibili a loro volta in due tipi, diversi dalle cellule delle placche:

a) *trichesteti*, rassomiglianti a cellule di senso primarie, e dotati di pelo di senso;

b) *amblesteti*, cellule di senso secondario, prive di pelo.

I trichesteti forse compaiono isolati, ma eccezionalmente, anche nell'epidermide superficiale; gli amblesteti no. Entrambi i tipi di elementi si prestano bene a confronti con le cellule sensorie degli organi di senso superficiali. I trichesteti, per la forma allungata e sottile e pel possesso di una fibrilla assile, rassomigliano grandemente alle cellule sensorie dei bottoni terminali (terminal buds), nelle quali ho appunto riconosciuto la presenza di una fibrilla assile. Gli amblesteti rassomigliano più alle cellule piriformi degli organi a fossetta (pit organs) che a quelle delle aree o placche di senso contenute nei canali laterali.

La presenza di cellule di senso diffuse isolatamente nell'epidermide di Teleostei, sia pure alla parete dei canali laterali, ma in aggiunta qui alle caratteristiche aree sensorie, non mi consta sia stata finora segnalata. Essa è indice di localizzazione

(1) Non ho potuto consultare l'opera di Leydig citata in riguardo da questo autore.

meno accentuata degli elementi di senso intraepidermici. Tale deficenza di localizzazione potrebbe porsi in rapporto colla segregazione di determinate regioni dell'epidermide affondate a costituire appunto la parete sottile dei canali laterali, ma — fatto notevole — interessa due diversi tipi di cellule di senso, forse equivalenti ai due tipi che nell'epidermide superficiale, assai più spessa della parete dei canali, appaiono invece raggruppati.

Già altri (Plate) ha ammesso un rapporto fra raggruppamento di cellule sensorie intraepidermiche e maggior spessore dell'epidermide per chiarire l'assenza nei Vertebrati di cellule sensòrie isolate, così frequenti invece negl'Invertebrati. In questi ultimi — tranne gli Artropodi — si tratta ben soventi di cellule primarie, mentre le secondarie prevalgono negli organi di senso dei Vertebrati.

L'esistenza di cellule di senso isolate e diffuse nell'epidermide di Vertebrati non è un fatto nuovo. Pur lasciando in disparte i dati offerti dall'*Amphioxus*, alle cui cellule di senso intraepidermiche, considerate — non da tutti — come primarie, s'è ascritto un alto significato quale stadio filetico dello sviluppo dei neuroni afferenti, ponendole anche a confronto colle cellule primarie di Invertebrati (*Lumbricus*) (1), devesi qui ricordare la presenza ben accertata di cellule di senso sparse nell'epidermide dei Petromizonti (2). Studnicka (1913) ne ha studiato un tipo particolare in *Ammocoetes* giovanissimi (*Proammocoetes*), valendosi di colorazione con ematossilina ferrica, e di Delafield. Studnicka ravvicina quel tipo di elementi sensorî alle cellule primarie intraepidermiche dell'*Amphioxus*, ma non osa affermare la loro natura primaria, considerando la tecnica di colorazione usata, che non gli ha permesso di constatare se effettivamente i pro-

---

(1) Cfr. Heidenhain (1911, pag. 747, ubi lit.). Plate (1924, pag. 38) ammette non dubbia l'esistenza in *Amphioxus* di cellule di senso diffuse nell'epidermide, e tende ad ammettere ch'esse siano primarie. Franz (1923) ha riconosciuto che mancano di prolungamento nervoso e ritiene quasi certo che sono " sekundär innerviert ".

(2) Per dati e indicazioni bibliografiche si consultino i lavori di Razzauti (1915) e di Ficalbi (1914-16). Merita particolare menzione la scoperta fatta da Häggqvist (1914) di cellule di natura nervosa nell'epidermide umana.

lungamenti basali delle cellule stesse si continuano in fibre nervose. Analogo ostacolo s'è offerto a me nei riguardi dei trichesteti di *Amiurus catus* (1). Particolare menzione fa STUDNICKA della struttura dell'epidermide dei *Proammocoetes*, che è " fast " durchwegs einschichtig, während sie bei den grösseren Am- " mocoeten immer schon mehrschichtig ist „ (l. c., pag. 111). Ma anche nei grossi *Ammocoetes* esistono cellule sensorie diffuse nell'epidermide; in Petromizonti adulti la loro esistenza, dapprima affermata, è stata più tardi messa in dubbio da RAZZAUTI.

La presenza di cellule sensorie diffuse nella sottile parete epidermica dei canali laterali di *Amiurus catus* ben si presta al confronto col reperto di STUDNICKA nella sottile epidermide dei *Proammocoetes*. Entrambi i casi si possono considerare quali indici di semplicità di struttura e di primitività, specialmente il secondo. Ora è per lo meno interessante che in *Amiurus* il carattere di primitività che s'osserva in determinate aree della sua epidermide (canali laterali) sia accompagnato da un'altra notevolissima particolarità, alla quale ho pure ascritto (1923) carattere di primitività: la papilla multipla del nervo ottico, che ancora ultimamente (1924) ho ripreso in esame (2).

Ed è pure interessante ricordare qui la naturale cecità di *Amiurus nebulosus* riconosciuta da HERRICK (1903, pag. 64) sperimentando in giovani esemplari l'incapacità a scorgere il cibo, la cui presenza viene invece percepita col sussidio degli organi di senso cutanei. HERRICK ritiene probabile che anche gli adulti siano incapaci di cercare il cibo servendosi degli occhi. Lo stesso autore cita l'osservazione fatta dal D[r] EIGENMANN che " the " retinal pattern ... of *Ameiurus* is decidedly degenerate „. Non conosco il lavoro del D[r] EIGENMANN sulla retina di *Amiurus*, ma credo che in luogo di degenerazione sia il caso di parlare qui di organizzazione rimasta in condizione di inferiorità.

Ist. di Anat. e Fisiol. Comparata della R. Univ. di Torino.
Palazzo Carignano, febbraio 1924.

---

(1) V. sopra la nota 1 pag. 228.

(2) Secondo PLATE (1924, pag. 648) la papilla multipla sarebbe invece risultato di una " sekundäre Spaltung „. Vedasi la mia interpretazione (1923, p. 140!).

OPERE CITATE

ALLIS E. P., 1897. *The Cranial Muscles* etc. *Amia calva.* " Journ. Morph. „, XII.

BOTEZAT E., 1909. *Die sensiblen Nervenendapparate in den Hornpapillen der Vögel in Zusammenhang mit Studien zur vergleichenden Morphologie und Physiologie der Sinnesorgane.* "Anat. Anzeig. „, 34 Bd.

— 1910 *a. Morphologie* etc. *Geschmacksorg. d. Vögel.* " Id. „, 36 Bd.

— 1910 *b. Ueber Sinnesdrüsenzellen u. Funkt. Sinnesapp.* " Id. „, 37 Bd.

BUNKER F. S., 1897. *On the Structure of the Sensory Organs of the Lateral Linie of Ameiurus nebulosus Le Sueur.* "Anat. Anzeig. „, 13 Bd.

BÜTSCHLI O., 1921. *Vorlesungen über vergleichende Anatomie,* I Bd.

COGNETTI DE MARTIIS L., 1923. *Osservazioni sul nervo ottico e sulla retina degli Acantopsidi.* "Atti Soc. Ital. d. Sc. Nat. „, vol. 62.

— — 1923. *Osservazioni sull'epidermide di Amiurus catus.* " Natura „, vol. XIV.

— — 1924. *Osservazioni sul nervo ottico e sulla retina dei Siluridi.* "Atti Soc. Ital. d. Sc. Nat. „, vol. 63.

COLLINGE W. E., 1895. *On the Sensory Canal System of Fishes. Teleostei-Suborder A. Physostomi.* " Proceed. Zool. Soc. London „, 1895.

FICALBI E., 1914-1916. *Struttura del tegumento dei Petromizonti,* I-III.

FRANZ, 1923. *Haut, Sinnesorgane und Nervensystem der Akranier.* " Jena Z. „, 59, 3.

FRITSCH G., 1887. *Die elektrischen Fische,* I.

GEGENBAUR C., 1898. *Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere,* I Bd.

HÄGGQVIST G., 1914. *Von Zellen nervöser Art in der Epidermis des Menschen.* "Anat. Anzeig. „, 47 Bd.

HEIDENHAIN M., 1911. *Plasma und Zelle,* II Lief.

HERRICK C. J., 1901. *The cranial nerves and cutaneous sense organs of the Nort American Siluroid Fishes.* " Journ. Compar. Neurol. „, vol. XI, 3.

— 1903. *The organ and sense of taste in Fishes.* " Bull. Sc. Laborat. Denison Univ. „, vol. XII, art. VI.

HESSE R., 1913. *Sinnesorgane,* in " Handw. d. Nat. wiss.„, IX, Fischer, Jena.

KOLMER W., 1910. *Strukturen Epithel Sinnesorg.* "Anat. Anzeig. „, 36 Bd.

LEYDIG F., 1894. *Integument* etc. *Knochenfische.* " Zool. Jahrb. Anat. „, 8 Bd.

LICHTENFELT H., 1906. *Literatur zur Fischkunde.*

PERRIER E., 1903. *Traité de Zoologie,* fasc. VI. *Poissons.*

PLATE L., 1922-1924. *Allgemeine Zoologie und Abstammungslehre*; I Teil, 1922: *Einleitung, Cytologie, etc.*; II Teil, 1924: *Die Sinnesorgane der Tiere.*

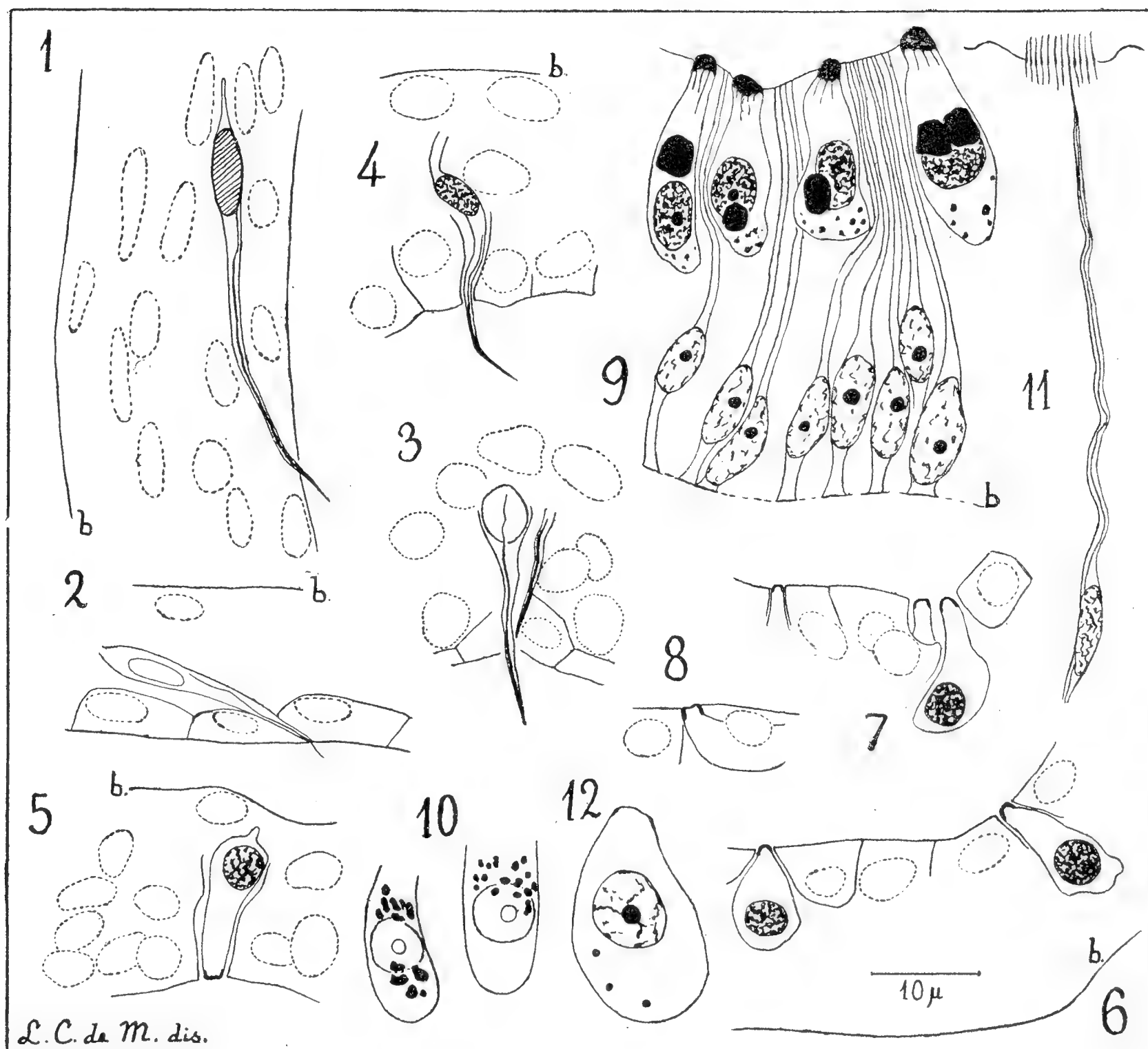
RAZZAUTI A., 1915. *Struttura del tegumento dei Petromizonti. Nervi ed organi cutanei di senso.* "Arch. ital. di Anat. e di Embriol. „, vol. 15.

RETZIUS G., 1898. *Zur Kenntniss der Lorenzinischen Ampullen der Selachier.* " Biolog. Unters. „, N. 7, VIII, n° 6.

SCHNEIDER K. C., 1908. *Histologisches Praktikum der Tiere.*

STUDNICKA F. K., 1913. *Epidermoidale Sinneszellen bei jungen Ammocoeten (Proammocoeten).* "Anatom. Anzeig. „, 44 Bd.

VIALLETON L., 1911. *Éléments de morphologie des Vertébrés.*

WRIGHT R. R., 1884. *On the skin and cutaneous sense organs of Amiurus.* " Proceed. Canadian Inst. „, II, n. 3.

Amiurus catus (L.). — Fig. 1. Trichesteto della parete distale di un canale laterale del tronco. Picro-form. acet. Bouin-Hollande, emtss. ferr. Heidn. Esemplare lungo 17 cm. — Fig. 2. Trichesteto d'un canale laterale del tronco presso il poro d'ingresso. Sublim. alc., id. Esemplare lungo 21 cm. — Fig. 3. Trichesteti come in fig. 1. Sublim. alc. nitr. acet. Gilson-Carazzi, id. Esemplare lungo 17 cm. — Fig. 4. Trichesteto, id. Medesimo esemplare di fig. 3. — Fig. 5. Amblesteto, id., id. — Fig. 6. Due amblesteti della parete prossimale d'un canale laterale del tronco, id., id. — Fig. 7. Amblesteto e apici di altri due, id., id. — Fig. 8. Amblesteto, id., id. — Fig. 9. Quattro cellule sensorie e otto cellule di sostegno di un'area o placca di senso d'un canale laterale del tronco, id., id. — Fig. 10. Due corpi di cellule sensorie di un'area id. Fiss. e color. come in fig. 1. Esemplare lungo 29 cm. — Fig. 11. Cellula sensoria d'un bottone terminale (terminal bud). Medesimo preparato di fig. 1. — Fig. 12. Cellula sensoria d'un organo a fossetta (pit organ). Medesimo preparato di fig. 3.

I nuclei delle cellule epidermiche di rivestimento sono segnati col contorno punteggiato. — *b.* basalis.

Sistema ottico usato per tutte le figure: obb. imm. Zeiss apocromat. 2 mm., apert. 1,3, ocul. comp. 12 Koristka. Camera Nachet, disegno al piede d. stativo. Ingrandim. 2100 diam., ridotto a metà nella fotoincisione.

L'Accademico Segretario
Oreste Mattirolo

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIX, Disp. 8ª e 9ª, 1923-1924

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1924

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 2 Marzo 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Somigliana, Sacco e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Presidente Ruffini.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Vice Presidente dà comunicazione di una lettera Ministeriale del 26 febbraio 1924 che approva la conferma del Socio Prof. Corrado Segre a Direttore della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali per un triennio a datare dal 9 febbraio 1923.

Egli dà quindi la parola al Socio Somigliana perchè voglia riferire in merito alle osservazioni e alle proposte che l'Accademia, dietro urgente richiesta, crede opportuno trasmettere al Ministero, riferentesi alle eventuali modificazioni o riforme da introdursi nel Calendario, secondo la risoluzione presa dalla Commissione consultiva e tecnica delle Comunicazioni.

Il Socio Somigliana, dichiarandosi alieno dal presentare proposte di riforme troppo radicali, legge la relazione compilata

da lui e dal Prof. SILVA, la quale, dopo alcune osservazioni del Socio PEANO, viene approvata dall'Accademia.

La relazione, di cui l'originale si conserva negli Archivi dell'Accademia, verrà al più presto comunicata al Ministero, in risposta alla richiesta urgente di parere, come da lettera 22 febbraio 1924.

Il Vice Presidente a nome della Classe ringrazia il Socio SOMIGLIANA e il Prof. SILVA.

Il Socio SACCO fa dono alla Biblioteca Accademica di una sua recente pubblicazione, dal titolo: *Come sorse la Grivola*, e ne discorre brevemente.

Adunanza del 16 Marzo 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Sacco e Pochettino il quale funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Mattirolo e Panetti.

Viene letto ed approvato il verbale della seduta precedente.

Il Socio Peano fa omaggio all'Accademia di due sue pubblicazioni: 1° *Giuochi di Aritmetica e problemi interessanti;* 2° *Theoria simplice de logarithmos.*

Il Socio Somigliana presenta per l'inserzione negli *Atti* una breve Nota dell'Ingegnere P. Bonanno, avente per titolo: *Contributo alla teoria delle distorsioni elastiche.*

La Nota sarà pubblicata negli *Atti.*

LETTURE

Contributo alla teoria delle distorsioni elastiche

Nota dell'Ing. PAOLO BONANNO
presentata dal Socio nazionale residente Somigliana

Sotto il nome di *distorsioni elastiche* vanno compresi tutti quegli stati di equilibrio elastico che si possono produrre in un solido, in assenza di forze di massa e di tensioni superficiali. Più precisamente, quegli stati di equilibrio che si possono realizzare in un corpo elastico, occupante uno spazio più volte connesso, praticando un taglio lungo il solido dato, in modo da ridurne la connessione, e poscia imprimendo alle due facce del taglio uno spostamento rigido arbitrario, purchè piccolissimo, e quindi saldando le due facce, previa asportazione o immissione di materiale, sono notoriamente conosciuti con il nome di *distorsioni elastiche di Volterra* (1). — Il concetto informatore della teoria delle distorsioni è dovuto al Weingarten (2), il quale pel

(1) V. Volterra, "Rendiconti Reale Accad. dei Lincei", anni 1905 e 1906. — Detto, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, "Ann. École Norm.", sept. 1907.

Vedi anche G. A. Maggi, *Sugli spostamenti elastici discontinui*, "Rend. Reale Accad. Lincei", vol. XVII, serie 5ª, maggio 1908. — Detto, *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche*, "Id.", vol. XXVI, 1° semestre 1917.

Vedi pure Love, *On the mathematical theory of elasticity*, Cambridge 1920, 3ª ediz. Come appendice dei capitoli VIII e IX del suo trattato, il prof. Love svolge la teoria delle distorsioni elastiche di Volterra. Egli ha proposto di chiamarle col nome "*dislocations*".

(2) G. Weingarten, *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi*, "Rend. Reale Accad. Lincei", serie 5ª, vol. X, 1° semestre 1901.

primo segnalò questi caratteristici stati di equilibrio elastico. Egli pervenne a riconoscere l'esistenza di questi stati soltanto per via intuitiva, e se ne servì esclusivamente per le sue ricerche geometriche.

Altre distorsioni, differenti da quelle di Volterra, si possono verificare in corpi anche semplicemente connessi, ammettendo che esistano, nell'interno di essi, certe superficie di discontinuità per gli spostamenti elastici, ed allora si ottengono le distorsioni di Somigliana (3).

Infine si possono trovare stati di equilibrio elastico, che non rientrano in nessuno dei due tipi testè descritti e che si può immaginare di determinare imprimendo ad ogni punto del corpo una deformazione i cui parametri sieno funzioni del tutto arbitrarie, vale a dire che non soddisfano in generale le sei equazioni di congruenza di Saint-Venant.

Questi stati di tensione si ricollegano a quelli considerati precedentemente pel fatto che l'equilibrio elastico da essi caratterizzato non è prodotto da forze di massa nè da forze superficiali date: essi prendono il nome di *coazioni elastiche*, particolarmente studiate dal prof. Colonnetti (4).

Nella pratica questi stati di tensione si creano regolarmente nelle operazioni di tempra degli acciai (5), nella fusione dei pezzi in ghisa, nella presa dei getti in calcestruzzo (6), nella fabbricazione del vetro, ecc.

Ora, dal punto di vista analitico, non è difficile stabilire una relazione caratteristica per i suddetti tipi di equilibrio ela-

---

(3) C. Somigliana, *Sulle deformazioni elastiche non regolari*, " Atti del IV Congresso dei Matematici ", Roma, aprile 1908, vol. III, sez. IIIA. — Detto, *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*, " Rend. Reale Accad. Lincei ", aprile 1914, vol. XXIII, serie 5a.

(4) G. Colonnetti, *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne*, " Id. ", luglio 1917, vol. XXVI, serie 5a. — Detto, *Per una teoria generale delle coazioni elastiche*, " Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino ", vol. LVI, 1920-21.

(5) F. Reiser, *Théorie et pratique de la tempre de l'acier*, traduz. franc., Paris, 1905.

(6) Ing. L. Luiggi, *L'evoluzione delle dighe per laghi artificiali in alta montagna*, " Atti del Congresso di Milano della Soc. Ital. per il progresso delle scienze ", IX riunione, Roma, 1917.

stico. Infatti, in un corpo elastico che abbia subìto una distorsione qualsiasi, supponiamo di eseguire il taglio od il sistema di tagli atti a far ritornare il corpo al suo stato naturale. Il numero dei suddetti tagli può essere qualsiasi e può anzi divenire persino infinito in alcuni casi di coazioni elastiche.

Nel riprendere lo stato naturale, ogni punto del corpo subirà uno spostamento elastico che rappresenteremo col vettore $\boldsymbol{s}$.

Mentre questo vettore spostamento $\boldsymbol{s}$ non è soggetto a nessuna condizione necessaria sui punti del contorno del corpo, se esso trovasi in uno stato di coazione elastica, perchè il ritorno del corpo al suo stato naturale può implicare la completa disgregazione del corpo stesso, per i due tipi di distorsioni di Volterra e di Somigliana, detto vettore dovrà soddisfare sul contorno del corpo ad una certa condizione che qui ci proponiamo di determinare.

Infatti, riferendoci, dapprima, alle distorsioni di Volterra, indichiamo con τ lo spazio più volte connesso occupato dal solido elastico, con σ il suo contorno e con $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario normale a σ e diretto verso l'interno di τ.

Indichiamo con Σ la superficie od il complesso di superficie lungo le quali dobbiamo immaginare di tagliare il solido elastico per ricondurlo al suo stato naturale; con α e β le due facce di Σ; con $\boldsymbol{\nu}$ un vettore normale alla faccia α di Σ e di lunghezza unitaria, rivolto positivamente verso l'interno di τ, cosicchè sarà $-\boldsymbol{\nu}$ l'analogo vettore unitario per la faccia β. È noto allora che il vettore spostamento $\boldsymbol{s}$ sarà continuo nello spazio τ, mentre sui punti delle facce α e β di Σ subirà certe discontinuità. Detti $\boldsymbol{s}_\alpha$ e $\boldsymbol{s}_\beta$ i valori di $\boldsymbol{s}$ su queste facce, le discontinuità in discorso sono espresse da

$$\boldsymbol{s}_\beta - \boldsymbol{s}_\alpha = \epsilon \boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{w}$$

con $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ vettori unitarî costanti, ϵ e λ costanti numeriche piccolissime ed $\boldsymbol{r}$ il raggio vettore che va da un punto fisso, scelto arbitrariamente, al punto P generico di Σ.

Per una distorsione di Somigliana avremo invece

$$\boldsymbol{s}_\beta - \boldsymbol{s}_\alpha = \boldsymbol{U}_P$$

essendo $\boldsymbol{U}_P$ un vettore qualsiasi, funzione del punto P.

Comunque, il vettore $\boldsymbol{s}$ sarà certamente regolare nello spazio τ limitato dal complesso di superficie costituito dal primitivo contorno σ e dalle due facce α e β di Σ; cosicchè potremo applicare ad esso il noto *teorema della divergenza* e si ha:

$$-\int_\sigma \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_\Sigma (\boldsymbol{s}_\beta - \boldsymbol{s}_\alpha) \times \boldsymbol{\nu}\, d\Sigma = \int_\tau \mathrm{div}\, \boldsymbol{s}\, d\tau.$$

Il secondo membro di questa relazione rappresenta notoriamente la variazione totale di volume del solido dato, dovuta alla distorsione considerata; ed è altresì noto che questa variazione di volume è sempre nulla, per i corpi elasticamente omogenei, ai quali qui ci riferiamo ([7]).

La relazione testè scritta diviene, tenendo conto delle espressioni di $\boldsymbol{s}_\beta - \boldsymbol{s}_\alpha$,

$$\text{(1)} \qquad \int_\sigma \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\Sigma [\epsilon \boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{w}] \times \boldsymbol{\nu}\, d\Sigma$$

per una distorsione di Volterra, e

$$\text{(2)} \qquad \int_\sigma \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\Sigma \boldsymbol{U}_P \times \boldsymbol{\nu}\, d\Sigma$$

per una distorsione di Somigliana ([8]).

Le (1) e (2) rappresentano dunque le condizioni a cui deve soddisfare il vettore $\boldsymbol{s}$ al contorno del corpo elastico, perchè $\boldsymbol{s}$ stesso rappresenti lo spostamento elastico corrispondente ad una distorsione effettivamente realizzabile sul corpo dato, mediante

---

([7]) G. Colonnetti, *Una proprietà caratteristica delle distorsioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei,* " Rend. Reale Accad. Lincei ", vol. XXVII, serie 5ª, 2° semestre 1918.

([8]) Il prof. Somigliana nella sua *Memoria " Sulle equazioni della elasticità* (" Annali di Matematica ", serie II, tomo XVII, 1889-1890) pervenne ad alcune notevoli relazioni integrali di superficie fra il vettore spostamento ed il vettore tensione. Queste relazioni, dal punto di vista del problema dell'integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico nel caso generale, sono analoghe alle nostre (1) e (2) per il problema delle distorsioni.

il descritto sistema dei tagli, ovvero mediante le superficie di discontinuità.

Le relazioni (1) e (2), in un certo qual modo, caratterizzano dunque le distorsioni di Volterra e quelle di Somigliana.

Se nessuna delle suddette condizioni è soddisfatta, allora il vettore ***s*** caratterizza una deformazione elastica, in assenza di forze esterne, la quale non si può riprodurre con nessuno dei metodi accennati più sopra: esso rappresenta quindi una coazione elastica.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

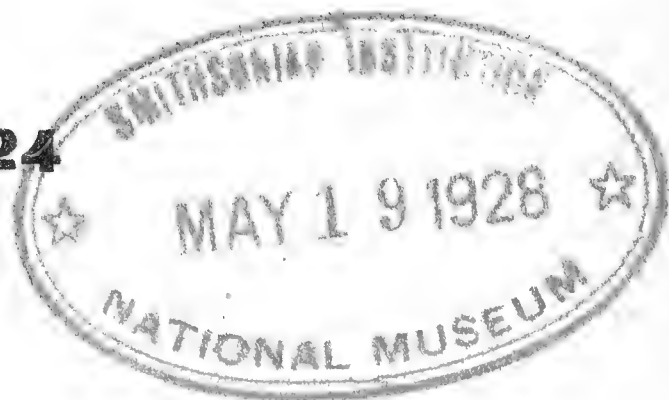
DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LIX, DISP. 10ª, 1923-1924

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1924

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Marzo 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Segre, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica l'invito della Società Matematica di Francia alla nostra Accademia, perchè voglia farsi rappresentare alla Celebrazione del suo cinquantenario che si terrà alla Sorbona dal 22 al 24 maggio. L'Accademia delibera di rivolgere preghiera al suo Socio corrispondente Prof. P. Émil Appel perchè voglia accettare di essere interprete del nostro Sodalizio alla solenne cerimonia.

Il Socio Parona comunica che il Servizio geologico della Indocina francese (Tonchino) ha spedito alla nostra Accademia la nuova Serie delle sue pubblicazioni a partire dal 1913 (11 volumi del Bollettino in 8° grande e 8 volumi delle Memorie in 4° grande) chiedendo il cambio colle nostre, sul quale delibererà il Consiglio di Amministrazione.

Sono monografie di ben noti geologi e paleontologi francesi, corredate da numerose Tavole che al valore scientifico, aggiun-

gono il pregio della bella e ricca veste tipografica. I lavori di argomento geologico, paleontologico ed anche di preistoria, ci informano sui caratteri geologici di quelle lontane regioni, tanto più graditi in quanto nessuna delle Biblioteche torinesi disponeva finora delle pubblicazioni stesse. Piacque inoltre al Socio PARONA ricordare che fu il nostro Socio Prof. Carlo DE-STEFANI dell'Istituto Superiore di Firenze che, richiesto, indicò alla Direzione del Servizio geologico del Tonchino la nostra Accademia fra le Istituzioni italiane alle quali sarebbe stato opportuno di spedire le pubblicazioni geologiche: ciò che risulta dalla lettera della Direzione annunciante l'invio. Il Prof. PARONA ritiene che la Classe accoglierà con favore l'atto cortese della Istituzione tonchinese, così benemerita nel campo della geologia, in particolare per quanto riguarda le indagini sulla tectonica del Tonchino e la conoscenza delle Faune e Flore paleozoiche locali.

Il Socio POCHETTINO presenta all'Accademia per la inserzione negli *Atti* un suo lavoro dal titolo: *Proprietà ottiche dei cristalli di alcuni platinocianuri*.

Il Socio, Direttore della Classe, Corrado SEGRE, una sua Nota: *Le curve piane d'ordine* n *circoscritte a un* (n + 1)-*latero completo di tangenti ad una conica, e una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coni circoscritti.*

Il Socio GRASSI una Nota: *Sul modo di variare della corrente primaria in un trasformatore* e ne discorre brevemente.

LETTURE

Proprietà ottiche dei cristalli di alcuni platinocianuri

Nota I del Socio naz. resid. ALFREDO POCHETTINO

Alcuni cristalli naturali (per es., certe varietà di fuggerite, di vesuvianite, di microsommite, ecc.) presentano una birifrangenza di segno variabile a seconda della lunghezza d'onda λ della luce che li attraversa: essi sono positivi per le radiazioni corrispondenti a un lato dello spettro, negativi per le altre, e, in corrispondenza ad una determinata λ, sono monorifrangenti; per esempio, i cristalli di Fuggerite (1) sono monorifrangenti in corrispondenza a luce di $\lambda = 0{,}589$. Il fenomeno è dovuto all'essere questi cristalli dei cristalli misti di componenti che, allo stato puro, sono alcuni positivi ed altri negativi, con diverse dispersioni della birifrangenza, di modo che si comprende benissimo come, per una data composizione, essi possano risultare monorifrangenti in corrispondenza ad una determinata λ e presentare birifrangenza di segni opposti in corrispondenza a λ più lunghe o a λ più corte di quella.

Può però pensarsi che lo stesso fenomeno possa essere presentato da cristalli non misti quando uno dei due raggi subisca un assorbimento (e quindi una variazione dell'indice di rifrazione in corrispondenza al variare di λ) molto forte, come si riscontra per esempio nelle sostanze a colori superficiali molto marcati. Questa idea e le osservazioni di Lommel (2) su le proprietà ottiche dei cristalli di Platinocianuro di Magnesio mi hanno

(1) WEINSCHENCK E., *Einleitung zum Gebrauch des Polarisationsmikroskopes*. III Aufl., 1910, pag. 87.
(2) *Wied. Ann.*, 9, pag. 108 (1880).

indotto a ricercare se il fenomeno presentato dai cristalli naturali su ricordati non si verifica anche nei cristalli di quella sostanza (1).

I cristalli di Platinocianuro di Magnesio [$Pt(CN)_4Mg.7H_2O$] si separano dalla soluzione acquosa (che è incolora e non presenta alcuna traccia di assorbimento selettivo nello spettro visibile) ordinariamente sotto forma di prismi dimetrici, rossi per trasparenza. Se si osserva la luce riflessa dalle basi, si nota, per incidenze medie, la comparsa di un colore superficiale azzurro; la luce corrispondente a questo colore superficiale è sempre polarizzata normalmente al piano di incidenza. Su le faccie laterali invece compare, per tutte le incidenze, un colore superficiale verde metallico molto brillante; la luce corrispondente a questo secondo colore superficiale è sempre polarizzata normalmente all'asse del prisma.

È molto difficile ottenere lamine cristalline di Platinocianuro di Magnesio, normali all'asse, che lascino passare luce delle varie λ con una intensità sufficiente all'osservazione e presentino, in luce convergente, un'immagine assiale di sufficiente nitidezza per poterne esaminare le modificazioni usando un analizzatore circolare, come è necessario per determinare il segno della birifrangenza (2). Non potei ottenere preparati adatti che sfaldando, con una punta, un cristallo un po' grosso parallelamente alla base }001{; fra le molte scagliette così ottenute sono riuscito a rintracciarne alcune poche presentanti delle regioni atte all'osservazione e cioè di spessore tale da permettere l'esame dell'immagine assiale con luci di varia λ e non presentanti sfaldature interne od eterogeneità che ne impedissero l'esame con l'analizzatore circolare. Ho tentato di far cristallizzare il sale dalle sue soluzioni su un vetro portaoggetti, ma non ho potuto avere che cristalli prismatici, per lo più raggruppati in rose, e sempre con l'asse parallelo al piano del

(1) Debbo alla cortesia del Prof. C. Montemartini del R. Politecnico di Torino l'aver potuto avere a disposizione del materiale adatto, e mi è grato dovere porgergli qui i miei più vivi ringraziamenti.

(2) Specialmente fastidiosa è la luce rossa, abbastanza vivace, di fluorescenza, che viene emessa dal cristallo quando è illuminato da luce azzurra o violetta.

vetro. Il loro spessore m'è risultato sempre troppo grande per poter servire a misure con il compensatore di Babinet; soltanto facendo cristallizzare il sale da una goccia di soluzione diluita compresa fra porta- e coprioggetto, inizialmente compressi uno contro l'altro, sono riuscito ad ottenere, fra i cristalli formatisi sempre con la solita orientazione, alcuni rarissimi molto sottili, e quindi pressochè incolori per trasparenza in luce ordinaria, che poterono utilizzarsi per misure al compensatore di Babinet.

In tutte le osservazioni ho usato un microscopio a polarizzazione di Leitz, munito, a seconda dei casi, dell'obbiettivo N. 3 (NA $= 0{,}28$; $f = 18$ mm.) o dell'obbiettivo N. 5 (NA $= 0{,}77$; $f = 5{,}8$ mm.); ad esso potevano adattarsi: o un oculare dicroscopico 0 ($f = 50$ mm.), o un oculare munito di compensatore di Babinet, o un oculare a micrometro II ($f = 35$ mm.) con una lente di Bertrand per l'osservazione delle immagini assiali, o, infine, uno spettroscopio oculare di Abbe. Per illuminare i preparativi con luce sensibilmente monocromatica delle varie λ, ho dovuto ricorrere a dei filtri; con opportune combinazioni di vetri colorati, di filtri a gelatina del tipo Wratten, di vaschette contenenti soluzioni di solfato di cupritetramino di varia concentrazione e del filtro U. V. di Zeiss ho potuto, dopo molti tentativi, mettere insieme dei sistemi che, pur permettendo il passaggio di luce di intensità sufficiente, presentano campi di trasparenza abbastanza ristretti con i baricentri rispettivamente corrispondenti alle seguenti λ: 0,660; 0,589; 0,560; 0,525; 0,485; 0,480; 0,465; 0,450; 0,430; 0,425; 0,420; 0,410.

Se si esamina un cristallo di Platinocianuro di Magnesio, di spessore compreso fra 0,2 e 0,5 mm., in luce ordinaria, si osserva nello spettro della luce trasmessa una banda di assorbimento estendentesi da $\lambda = 0{,}590$ a $\lambda = 0{,}560$ circa; se lo si osserva con una lente dicroscopica, disposta in modo che la sua sezione principale sia normale all'asse ottico del cristallo, l'immagine ordinaria è di color rosso aranciato e nello spettro corrispondente si ha una banda d'assorbimento estendentesi da $\lambda = 0{,}590$ fino a tutto il violetto; l'immagine straordinaria invece è di color rosa carminio e nello spettro corrispondente si ha di nuovo una banda estendentesi da $\lambda = 0{,}590$ a $\lambda = 0{,}560$ circa. Se si esamina con la lente di Bertrand una lamina di un cristallo di questa sostanza, tagliata normalmente all'asse, in

luce convergente polarizzata rettilineamente, si osserva che, in luce bianca, il campo appare diviso in quattro settori ortogonali con le bisettrici rispettivamente parallela e normale alla direzione di vibrazione della luce incidente. I due primi sono di colore rosa carminio, gli altri due rosso aranciato; questi due ultimi non arrivano fino alla parte centrale del campo che è di colore rosa carminio. In luce rossa ($\lambda = 0{,}660$) il campo è uniformemente di color rosso; se si illumina con luci di λ successivamente più corta si trova che, a partire da $\lambda = 0{,}590$, si hanno solo più due settori oscuri con la bisettrice normale alla direzione di vibrazione della luce incidente. Questi settori non arrivano fino al centro del campo, ma hanno i vertici come troncati con orli sfumati la cui distanza va diminuendo al diminuire della λ della luce incidente, mentre gli orli delle troncature si vanno facendo più netti. La distanza minima fra questi orli, e la loro massima nitidezza, si hanno per $\lambda = 0{,}465$ circa; se si usa luce di λ più breve, quella distanza cresce e gli orli ridiventano sfumati; in corrispondenza a $\lambda = 0{,}420$ l'aspetto del campo, per quanto riguarda la distribuzione dell'intensità luminosa, è all'incirca uguale a quello che si ha per $\lambda = 0{,}550$.

Se si esamina la nostra lamina ancora in luce convergente, ma fra nicol incrociati, si osserva: in luce bianca, la nota figura dei cristalli uniassi su un fondo di color rosso (per il colore proprio del cristallo); nel mezzo però, intorno alla traccia dell'asse ottico, appare una zona di color azzurro formante un cerchio del diametro angolare di circa 5°; le vibrazioni dunque dell'azzurro, effettuantisi parallelamente alla sezione principale del nostro cristallo, passano con gran prevalenza su le altre finchè la loro direzione di propagazione forma con l'asse ottico un angolo inferiore ai 2° o 3°. Se si varia la λ della luce incidente si osserva che: 1) per λ da 0,660 a 0,485, si ha la solita immagine assiale, e, usando l'analizzatore circolare, *il segno della birifrangenza è positivo*; 2) al diminuire di λ il raggio dei cerchi oscuri va diminuendo mentre in corrispondenza le braccia della croce oscura si assottigliano, specialmente in corrispondenza a quella zona centrale che risulta azzurra usando luce bianca. Da $\lambda = 0{,}485$ a $\lambda = 0{,}465$ si osserva solo più la croce oscura, ogni traccia dei cerchi è scomparsa e se si gira l'analizzatore di un angolo fino a 15° dalla sua posizione normale, il braccio

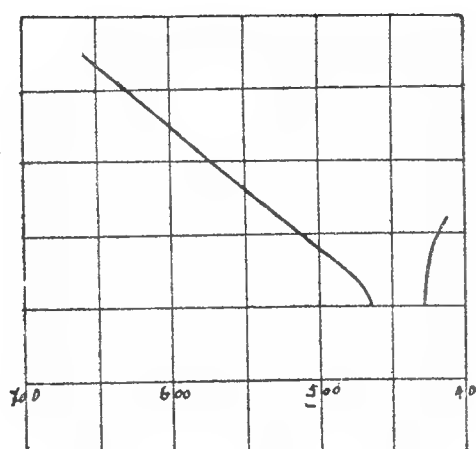
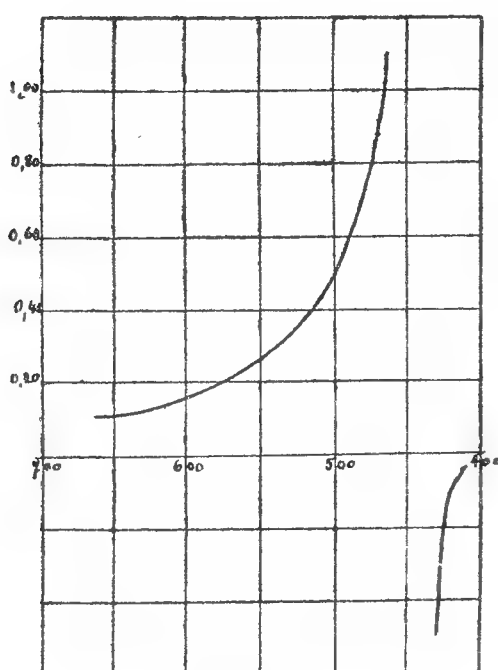
della croce parallelo alla sua direzione di vibrazione ruota di un angolo corrispondente, mentre l'altro rimane fisso; di guisa che ne risulta una croce a braccia non più normali (1). In corrispondenza a λ varianti da 0,430 a 0,410 si ha di nuovo la nota immagine assiale con croce e cerchi di diametro crescente con il diminuire di λ e, esaminando con l'analizzatore circolare, si trova che *il segno della birifrangenza è negativo*.

Nella tabella seguente mi limito ad esporre i risultati delle osservazioni compiute riportando i valori delle differenze Δ di cammino (espresse in λ), fra raggio ordinario e straordinario, quali risultano direttamente dalle misure fatte con il compensatore di Babinet per tre cristalli sufficientemente sottili, di spessore diverso, e i diametri *d* del primo cerchio oscuro (in divisioni del micrometro oculare II, usando l'obbiettivo N. 5) nelle immagini assiali per quattro scagliette riscontrate atte a tali osservazioni:

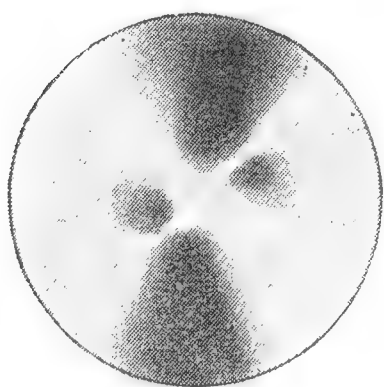
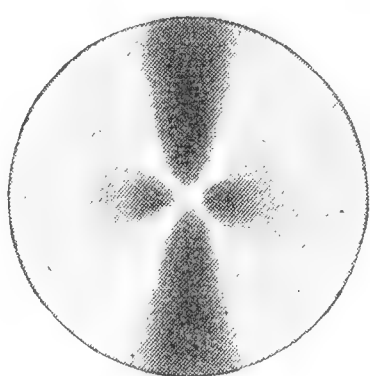
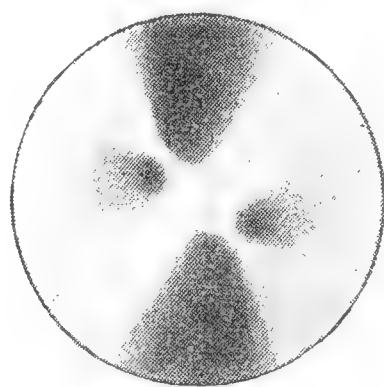
λ	Δ			*d*			
0,660	+ 0,12	+ 0,18	+ 0,10	9	16,2	12	19
0,589	+ 0,16	+ 0,22	+ 0,13	6,5	11,5	8	14
0,560			+ 0,21?				11?
0,525	+ 0,34	+ 0,50	+ 0,30		7,5	5	9
0,485	+ 0,63	+ 0,90	+ 0,50		5,5	3,5	6
0,480	+ 0,71	+ 1,10	+ 0,62	3			
0,465	+ 1,10	+ 1,50	+ 0,98	2	3,2	2,5	4
0,450	inapprezzabile						
0,430	— 0,50	— 0,70	— 0,40	2			
0,425	— 0,23	— 0,35	— 0,21		6	4	7
0,420	— 0,12?	— 0,20?	— 0,09	4?			
0,410	— 0,05?	— 0,08?	— 0,05?		7	5,5?	9

(1) Una rotazione corrispondente dell'altro braccio si ha, se si fa ruotare il polarizzatore.

I segni + e — anteposti ai valori di Δ stanno ad indicare il segno della birifrangenza; i punti interrogativi contraddistinguono i numeri poco sicuri per le evidenti difficoltà di osservazione. I grafici qui sotto dànno un'idea dell'andamento rispettivamente di Δ e di d al variare della λ con cui si osserva.

La birifrangenza dunque dei cristalli di Platinocianuro di Magnesio cresce, al diminuire di λ, dapprima lentamente, poi con grande rapidità; in corrispondenza a $\lambda = 0{,}450$ circa, la birifrangenza cambia di segno raggiungendo per $\lambda = 0{,}430$ circa lo stesso valore assoluto che ha per $\lambda = 0{,}500$, diminuisce poi dapprima con grande rapidità e quindi lentamente.

Proprietà ottiche superficiali molto analoghe a quelle dei cristalli di Platinocianuro di Magnesio presentano i cristalli dei due Platinocianuri rispettivamente di Ittrio $[\{Pt(CN)_4\}_3 Y_2 . 21 H_2O]$ e di Erbio $[\{Pt(CN)_4\}_3 Er_2 . 21 H_2O]$, i quali però sono biassici. Questi due platinocianuri cristallizzano in prismi trimetrici rossi per trasparenza; delle sei faccie di questi prismi le due normali al piano degli assi ottici sono rosso-scure e presentano in luce riflessa, sotto incidenze medie, un colore superficiale azzurro metallico polarizzato sempre normalmente al piano di incidenza; le altre quattro presentano invece, sotto qualunque incidenza, un colore superficiale verde metallico brillante polarizzato sempre normalmente all'asse del prisma. Esaminati per trasparenza con luce ordinaria, i cristalli di queste due sostanze presentano (per uno spessore da 0,2 a 1 mm.) uno spettro di assorbimento consistente in una banda estendentesi da $\lambda = 0{,}590$ a $\lambda = 0{,}575$

per il Platinocianuro di Erbio e a $\lambda = 0{,}560$ per quello di Ittrio. Osservati con l'oculare dicroscopico disposto con la sezione principale secondo la normale alle due faccie rosse, dànno l'immagine straordinaria color rosa carminio e nello spettro di assorbimento corrispondente si ha una banda identica a quella che si ha esaminando i cristalli con luce ordinaria; l'immagine ordinaria invece è color rosso arancio e nello spettro di assorbimento presenta una banda estendentesi da $\lambda = 0{,}590$ fino all'estremo violetto. Il comportamento dunque di questi cristalli è sorprendentemente simile a quello dei cristalli di Platinocianuro di Magnesio.

Se esaminiamo una lamina di questi cristalli tagliata normalmente alla bisettrice dell'angolo acuto degli assi ottici, con oculare e lente di Bertrand, illuminando con luce bianca convergente polarizzata in un piano a 45° sul piano degli assi

Luce bianca

$\lambda = 0{,}465$

$\lambda = 0{,}420$

ottici si osservan nel campo una coppia di settori di color rosso arancio con l'asse normale alla direzione di vibrazione della luce incidente; i vertici di questi settori non raggiungono il centro del campo che nel rimanente è color rosso carminio, meno in due piccole zone di forma ellittica, ancora color rosso arancio, con la congiungente i centri inclinata su la direzione di vibrazione della luce incidente. Se si illumina con luce di $\lambda = 0{,}465$, l'aspetto del campo rimane simile al precedente, le macchie e i settori sono oscuri e quelle sono ora disposte simmetricamente rispetto alla mediana dei settori, i vertici dei quali sono ora più vicini. In luce di $\lambda = 0{,}420$, l'aspetto del campo è simile a quello che si ha in luce bianca, ma l'asse delle due macchie è ora di nuovo inclinato su quello dei settori; la sua posizione è però diversa da quella corrispondente alla luce bianca, come si rileva dalle figure schematiche soprastanti.

Se osserviamo le nostre lamine cristalline in luce convergente, fra nicol incrociati, orientandole diagonalmente si ha, in luce bianca, la solita immagine assiale su un fondo rosso. Ma se illuminiamo con luci di λ decrescenti questa immagine si modifica profondamente: le traccie degli assi ottici da $\lambda = 0,660$ fino a $\lambda = 0,470$ si avvicinano e tutto il sistema di curve nere si restringe; in corrispondenza a $\lambda = 0,470$, le due ovali ultime si toccano e il campo è ora attraversato da una croce nera le cui braccia sono parallele alle direzioni di vibrazione dei due nicol e non si distinguono nette che nella parte centrale del campo. Per $\lambda = 0,460$ la croce è divisa nuovamente in due rami di andamento iperbolico e a $\lambda = 0,450$, nel mezzo del campo si ha come una croce luminosa separante quattro settori oscuri con gli assi orientati secondo le direzioni di vibrazione dei due nicol. Per $\lambda = 0,440$ si ha di nuovo la nota immagine assiale dei cristalli biassici, ma il piano degli assi ottici trovasi ora a 90° sull'orientazione corrispondente a λ comprese fra 0,660 e 0,470. Specialmente interessante è l'aspetto che prende il campo, illuminando il preparato con l'uso del solo filtro U. V. di Zeiss che, dello spettro visibile, lascia passare solo una stretta zona nel rosso (centro a $\lambda = 0,720$) e una, un po' più larga, nel violetto (centro a $\lambda = 0,420$). Si vedono allora *contemporaneamente* le due immagini assiali una rossa e una violetta sovrapposte e risulta evidente la differenza di 90° fra le orientazioni del piano degli assi ottici nelle due immagini.

Ho determinato, usando l'oculare micrometrico II e l'obbiettivo N. 3, la distanza apparente d fra le traccie degli assi ottici in corrispondenza alle varie λ per tre cristalli di Platinocianuro di Ittrio e per due di Platinocianuro di Erbio; la tabella seguente contiene i valori di d espressi in divisioni del micrometro:

λ	Y			Er	
0,650	7,5	18,5	10	6,4	19
0,590	6	15	9	5,5	17
0,525	5?	12,5	6,5?	4,8?	14
0,470	1,5	3,8	2	1,5	4,5
0,450	croce luminosa nel mezzo del campo				
0,430	*2,5*	*6,2*	*3*	*2,4*	*7*
0,425	*3,2*	*8*	*4*	*2,8?*	*8*
0,415	*3,5?*	*9*	*4,5?*	*3?*	*9*

I punti interrogativi stanno ad indicare i risultati poco sicuri per la difficoltà dell'osservazione; le cifre in corsivo corrispondono alla seconda orientazione del piano degli assi ottici.

L'andamento della distanza *d* con il variare di λ è molto simile nei cristalli delle due sostanze. Si può dunque concludere che l'angolo apparente degli assi ottici di questi cristalli diminuisce, fra λ = 0,650 e λ = 0,470, con il diminuire di λ; in corrispondenza a una λ compresa fra 0,455 e 0,450, in questi cristalli avviene una rotazione di 90° nel piano degli assi ottici; poi l'angolo apparente di questi cresce con il proseguire della diminuzione di λ, e il sistema delle curve oscure si allarga.

Riassumendo: i cristalli di questi tre Platinocianuri, che hanno proprietà ottiche superficiali così simili, presentano una birifrangenza che, da λ = 0,660 a λ = 0,470, cresce, in valore assoluto, con il diminuire della λ della luce con cui si osservano e, da λ = 0,440 a λ = 0,410, diminuisce; in corrispondenza a luce di λ compresa fra λ = 0,455 e λ = 0,445 presentano un comportamento speciale: nei cristalli monoassici del Platinocianuro di Magnesio avviene un cambiamento brusco nel segno della birifrangenza, nei cristalli biassici dei Platinocianuri rispettivamente di Ittrio e di Erbio avviene una rotazione di 90° del piano degli assi ottici.

Istituto Fisico della R. Università di Torino.

Sul modo di variare della corrente primaria in un trasformatore

Nota del Socio naz. resid. GUIDO GRASSI

Negli ordinari trasformatori quando il circuito secondario è aperto si ha nel primario la cosidetta corrente a vuoto. Se si chiude il secondario su di una resistenza esterna, variabile, la corrente nel primario varia press'a poco come quella del secondario; il rapporto delle due correnti è quasi costante; in ogni modo la corrente primaria cresce o diminuisce insieme colla secondaria. E per conseguenza quando la corrente secondaria si annulla rimane nel primario la corrente a vuoto, che si ritiene essere la *minima corrente* assorbita dal trasformatore a vuoto, ed alimentato a tensione costante.

Ora questa conclusione non è esatta; si può dimostrare che un apparecchio del tipo trasformatore, cioè formato di un circuito primario alimentato a corrente alternata con tensione costante e di un secondario chiuso su di una resistenza esterna, può in determinate condizioni *assorbire nel primario una corrente minore della corrente a vuoto.*

Adottiamo le notazioni seguenti: r_1 e λ_1 resistenza e reattanza del primario; r e λ del secondario; μ il fattore di induzione mutua, cioè il coefficiente d'induzione mutua M moltiplicato per $2\pi f$, essendo f la frequenza della corrente alternata. Applichiamo il metodo simbolico, o delle grandezze complesse. Sia $\mathfrak{J}_1$ la corrente primaria per un carico qualunque; $\mathcal{E}$ la forza elettromotrice applicata; g la conduttanza e b la suscettanza del circuito secondario. Si ha la nota relazione

$$\mathcal{E} = \mathfrak{J}_1 \left\{ r_1 + \mu^2 g - j(\lambda_1 - \mu^2 b) \right\}.$$

Il valore assoluto I_1 della $\mathfrak{J}_1$, indicando con E il valore assoluto della $\mathcal{E}$, sarà dato da

$$I_1^2 = \frac{E^2}{(r_1 + \mu^2 g)^2 + (\lambda_1 - \mu^2 b)^2} .$$

Quando il secondario è aperto si ha la corrente a vuoto

$$I_0^2 = \frac{E^2}{r_1^2 + \lambda_1^2} .$$

Il rapporto

$$\frac{I_0}{I_1} = u$$

ci sarà dato dalla relazione

$$(1) \qquad u^2 = 1 + \mu^2 \frac{2 r r_1 - 2 \lambda \lambda_1 + \mu^2}{(r_1^2 + \lambda_1^2)(r^2 + \lambda^2)} .$$

Si ottiene questa relazione ricordando che

$$g = \frac{r}{r^2 + \lambda^2} \qquad b = \frac{\lambda}{r^2 + \lambda^2} .$$

Se la dispersione magnetica è piccola, o almeno trascurabile, come accade appunto nei trasformatori, si può ammettere che

$$\mu^2 = \lambda \lambda_1$$

e quindi risulta

$$(2) \qquad u^2 = 1 + \mu^2 \frac{2 r r_1 - \lambda \lambda_1}{(r_1^2 + \lambda_1^2)(r^2 + \lambda^2)} .$$

D'ordinario nei trasformatori le resistenze sono piccole rispetto alle reattanze, e il numeratore della frazione è negativo, cioè si ha

$$\lambda \lambda_1 > 2 r r_1 ,$$

e perciò u^2 è *minore di uno*, ossia la corrente a vuoto I_0 è sempre minore anche della minima corrente I_1 che si ha nel primario appena si comincia a caricare il secondario.

Ma non è escluso che in determinate condizioni si possa avere la disuguaglianza contraria, cioè

$$\lambda \lambda_1 < 2 r r_1$$

e quindi un rapporto u *maggiore di uno*, ossia *una corrente a vuoto maggiore della* I_1 *a secondario chiuso.*

È interessante cercare qual'è il valore della resistenza r del circuito secondario che dà luogo al massimo valore del rapporto u, quando, ben inteso, si suppongano date le dimensioni dell'apparecchio e quindi note le quantità r_1, λ_1 e λ.

Il termine da rendere massimo è

$$\frac{2 r r_1 - \lambda \lambda_1}{r^2 + \lambda^2} .$$

Il valor massimo si ha per

$$r = \frac{\lambda}{2 r_1}\left(\lambda_1 + \sqrt{4 r_1^2 + \lambda_1^2}\right). \tag{3}$$

Posto questo valore di r nella espressione di u^2 si ottiene

$$u^2 = 1 + \frac{2 r_1^2 \lambda_1}{(\lambda_1 + \sqrt{4 r_1^2 + \lambda_1^2})(r_1^2 + \lambda_1^2)} .$$

Anche qui si può cercare la condizione di massimo; si trova che deve essere

$$r_1 = \lambda_1 \sqrt{2} , \tag{4}$$

e se si pone questo valore nella espressione precedente si trova

$$u^2 = \frac{4}{3} .$$

Se nella (3) si introduce il valore di r_1 dato dalla (4) si ha

$$r = \lambda \sqrt{2} .$$

Questi risultati del calcolo ho potuto confermare coll'esperienza. Non so se questa particolarità sia mai stata osservata da altri. Io ho creduto opportuno di render nota questa mia osservazione, per dare la spiegazione di un fatto che a prima giunta può sembrare paradossale.

Le curve piane d'ordine n circoscritte a un $(n+1)$-latero completo di tangenti ad una conica, e una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coni circoscritti.

Nota del Socio nazionale residente CORRADO SEGRE

§ 1. — Il sistema lineare di C_n.

1. — In un piano π le curve algebriche d'ordine n, o C_n, che passano per tutti i vertici di un $(n+1)$-latero completo fisso, formano un sistema lineare; la cui dimensione $[n]$ si precisa subito, osservando che quelle curve del sistema, che contengono un punto di un lato, diverso dagli n vertici, si spezzano in quel lato e in un sistema analogo di C_{n-1}. Dunque $[n]=[n-1]+1$; da cui si ricava: $[n]=n$. Le C_n sono perciò ∞^n (ossia formano un sistema regolare).

Se sono $p_1=0, ..., p_{n+1}=0$ le equazioni dei lati dell'$(n+1)$-latero, l'equazione

$$\Sigma \frac{\lambda_k}{p_k}=0\,, \tag{1}$$

ove le λ_k indicano costanti arbitrarie, rappresenta una C_n circoscritta al moltilatero e variabile in un sistema lineare ∞^n: questo sarà dunque il sistema di *tutte* le nostre C_n (1).

(1) Cfr. ad esempio G. Darboux, *Principes de Géométrie analytique* (Paris, 1917), pag. 246.

Nel seguito s'intenderà sempre che il *moltilatero fondamentale* sia circoscritto ad una conica (irriducibile) γ. — Dirò Σ il sistema ∞^n di C_n relativo a questo caso. —

Teorema. — *Se un* $(n+1)$*-latero completo ha i suoi lati tangenti a una conica* γ*, le* C_n *circoscritte ad esso, che passano per un punto* M *non situato su alcun lato, segano, fuori di* M*, sulle due tangenti* r, s *di* γ *passanti per* M*, gruppi di* $n-1$ *punti, che si corrispondono nella projettività* $\mathcal{S}$ *segnata su* r, s *dalle tangenti di* γ.

In altre parole: *Ogni coppia* P, Q *di punti d'intersezione di* r, s *con un'ulteriore tangente generica di* γ *è tale che le* C_n *di* Σ *passanti per* M *e per* P *passano pure per* Q*, ossia che la terna di punti* MPQ *offre solo due condizioni alle* C_n *di* Σ *costrette a contenerla; sicchè le* C_n *stesse sono* ∞^{n-2}.

Per $n=2$ questo teorema è ben noto: dice che due trilateri circoscritti a γ sono iscritti in una C_2.

Per estenderlo ad n qualunque, ammetteremo vero il fatto analogo, quando n si sostituisca con $n-1$. Dunque, se togliamo un lato a dell'$(n+1)$-latero fondamentale, e consideriamo le ∞^{n-1} C_{n-1} circoscritte all'n-latero residuo, fra esse ve ne saranno ∞^{n-3} passanti per M, P, Q. Aggiungendo a, abbiamo ∞^{n-3} C_n di Σ contenenti quei 3 punti. D'altronde, dicendo b, c altri due lati (diversi da a) dell'$(n+1)$-latero, vi è pure una C_n di Σ passante per M, P, Q, che si compone della conica circoscritta al trilatero abc ed al triangolo MPQ, e degli $n-2$ lati diversi da a, b, c. Quest'ultima C_n evidentemente non sta nel sistema lineare ∞^{n-3} precedente; e quindi determina con esso un sistema lineare ∞^{n-2} di C_n di Σ passanti per M, P, Q. Il teorema è dunque provato.

2. — Ne derivano numerose conseguenze.

Anzi tutto, si fissi, oltre all'$(n+1)$-latero fondamentale di Σ, un $(m+1)$-latero completo circoscritto a γ, con $m \leq n$. *Per le* C_n *di* Σ *il passare per tutti i suoi vertici rappresenterà solo* m *condizioni*: cosicchè, ad esempio, le curve di Σ che passano per gli m vertici situati su uno stesso lato conterranno di conseguenza tutti gli altri vertici. In fatti, diciamo r quel lato, s e t altri due qualunque. Le dette curve, passando per ipotesi pei punti $rs=M$, $rt=P$, conterranno pure (n. 1) $Q=st$.

Si può anche dire così: *Se una* C_n *è circoscritta ad un* $(n+1)$*-latero completo composto di tangenti ad una conica* γ, *essa è circoscritta a* ∞^1 *altri tali* $(n+1)$*-lateri* [*e di conseguenza a* ∞^1 $(m+1)$*-lateri, con* $m \leq n$, che son *contenuti* in quelli]. Basta fissare una tangente qualunque di γ come lato di un tale moltilatero, e dai suoi punti d'incontro colla C_n tirare le ulteriori tangenti a γ: si avranno così gli $n+1$ lati di un $(n+1)$-latero completo, a cui, per l'osservazione precedente, la C_n dovrà essere circoscritta.

Per $n=4$ si ha un ben noto teorema di J. Lüroth (2). Per n qualunque la proposizione è dovuta a G. Darboux (3), che la trae dalla rappresentazione analitica (1) di Σ, tenendo conto che le $p_k=0$ son tangenti di una conica (4).

3. — Ritorniamo al teorema del n. 1; e applichiamo il fatto che, se sono R, S i punti di contatto di r, s con γ, la projettività $\mathfrak{S}$ fra queste rette fa corrispondere al loro punto comune M rispettivamente S e R. In base a quel teorema si avrà che per le C_n di Σ passanti per M, il contenere, ad esempio, R è condizione equivalente al toccare s in M, o meglio ad avere in M incontro bipunto con s. Più in generale: *l'avere una* C_n *di* Σ *passante per* M *un incontro* m*-punto con* r *in* R (5) *ha per conseguenza un incontro* $(m+1)$*-punto con* s *in* M; *e viceversa.*

Corollari. — 1°) Per una C_n di Σ la condizione di avere un punto doppio dato M (fuori di γ) equivale alle 3 condizioni: di passare per M e pei punti di contatto di γ colle due tangenti tirate ad essa da M.

2°) Le C_n di Σ che passano per un punto R fissato su γ (fuori dei lati del moltilatero fondamentale) tagliano ulteriormente la tangente r in R a γ secondo punti, in ognuno (M)

---

(2) *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung*, " Math. Annalen ", 1 (1869), pag. 37: vedi a pag. 49.

(3) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1873), pag. 189 [V. anche loc. cit. in (1) pag. 248].

(4) Citerò pure la Nota di N. Weill, *Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques*, " Bull. de la Soc. math. de France ", 29 (1901), pag. 26; che ritrova questo teorema, anche sotto la sua prima forma.

(5) Vedremo poi (n. 5) che se $m>2$ ciò porta ad essere R multiplo per la C_n.

dei quali hanno per tangente la seconda tangente tirata dal punto stesso (M) a γ: cosicchè quelle fra esse che passano (oltre che per R) per uno stesso ulteriore punto di r, si toccano quivi.

3°) Una C_n di Σ tangente a γ in un suo punto R (o avente un punto doppio in R) sega ulteriormente la tangente r in R a γ in punti che son tutti *flessi* per la C_n (o almeno punti ad incontro tripunto con una retta). Le tangenti stazionarie in questi punti sono pure tangenti di γ (6).

4°) Similmente se la C_n ha nel punto R di γ incontro 3-punto colla tangente r di γ, le sue ulteriori intersezioni con r sono per la curva, in generale, punti d'ondulazione. — Ecc., ecc.

§ 2. — Alcune particolarità del sistema Σ nei punti della conica.

4. — Riguardo al modo di comportarsi delle curve di Σ nei punti di γ rileviamo anzi tutto questo fatto notevole: *Se una* C_n *di* Σ *passa per un punto* P *di* γ *(che non sia il punto di contatto di un lato del moltilatero fondamentale), essa avrà ivi con* γ *quella stessa moltiplicità d'intersezione che ha colla tangente in* P *a* γ.

Per dimostrarlo, assumiamo P come punto di coordinate omogenee $x_2 = x_3 = 0$; e γ sia rappresentata parametricamente dalle

$$(2) \qquad x_1 = 1\,, \qquad x_2 = 2t\,, \qquad x_3 = t^2,$$

sicchè P risponderà a $t = 0$. I lati dell'$(n+1)$-latero fondamentale $p_k = 0$ (n. 1) si potran rappresentare così (7):

$$(3) \qquad p_k \equiv x_1 - a_k x_2 + a_k^2 x_3\,.$$

(6) Si abbia, ad esempio, una cubica; e si fissi un quadrilatero completo iscritto in essa. Nella schiera delle coniche iscritte nel quadrilatero si trova facilmente che sono 9 quelle (irriducibili) tangenti alla C_3. Orbene i 9 punti di contatto hanno per tangenziali sulla cubica, rispettivamente, i suoi 9 flessi (e le tangenti di flesso sono pur tangenti, rispettivamente alle 9 coniche).

(7) Con ciò si esclude solo che uno di essi possa essere la tangente in P a γ, cioè la $x_3 = 0$.

Le intersezioni di una C_n di Σ colla conica γ si avranno sostituendo le (2) nell'equazione (1) del n. 1: con che, tenuto conto delle (3), diventa:

$$\Sigma \frac{\lambda_k}{(1-a_k t)^2} = 0 . \tag{4}$$

D'altra parte, se pei punti della tangente a γ in P, cioè di $x_3 = 0$, introduciamo il parametro $\tau = x_2/x_1$, sicchè P risponderà a $\tau = 0$, le intersezioni di quella retta colla C_n (1) risponderanno ai valori di τ per cui

$$\Sigma \frac{\lambda_k}{1-a_k \tau} = 0 . \tag{5}$$

Dobbiamo dunque provare che, quando si sian ridotte le equazioni (4) e (5) a forma intera, la più bassa potenza a cui vi compare, rispettivamente, t o τ, è la stessa. Ma poichè il prodotto dei denominatori, nell'una e nell'altra, non contiene certo il divisore t, o τ, farà lo stesso dimostrare che, tenendo le due equazioni nella forma attuale, e sviluppati i primi membri in serie di potenze di t, o τ, col supporre queste quantità convenientemente piccole in valor assoluto, le due serie cominciano con termini dello stesso grado. La (4) diventa:

$$\Sigma \lambda_k (1 + 2a_k t + 3a_k^2 t^2 + 4a_k^3 t^3 + \ldots) = 0 ,$$

e la (5):

$$\Sigma \lambda_k (1 + a_k \tau + a_k^2 \tau^2 + a_k^3 \tau^3 + \ldots) = 0 .$$

Per l'una come per l'altra l'esponente del primo termine non nullo è m, se, posto

$$s_l = \sum_k \lambda_k a_k^l , \tag{6}$$

son nulle $s_0, s_1, \ldots s_{m-1}$, ma non s_m.

5. — Ma possiamo far di più: *precisare la natura della singolarità che una curva di Σ ha in un suo punto (diverso dai punti di contatto di γ coi lati del moltilatero fondamentale) ove abbia contatto* m-*punto con γ, e quindi* (n. 4) *colla tangente a γ.*

Prendiamo ancora in $x_2 = x_3 = 0$ un tal punto P. Poniamo

$$x_1 = 1 , \qquad x_2 = x , \qquad x_3 = -y ; \tag{7}$$

sicchè, in base alle (2), γ avrà per equazione

$$y = -\frac{1}{4}x^2; \tag{8}$$

e per le (3) l'equazione delle C_n di Σ diventerà

$$\Sigma \frac{\lambda_k}{1 - a_k x - a_k^2 y} = 0. \tag{9}$$

Sviluppando quest'equazione in serie, ammettendo che $|x|$, $|y|$ sian sufficientemente piccole, viene, colla notazione (6):

$$\begin{aligned} &s_0 + (s_1 x + s_2 y) + (s_2 x^2 + 2 s_3 xy + s_4 y^2) + \\ &+ (s_3 x^3 + 3 s_4 x^2 y + 3 s_5 xy^2 + s_6 y^3) + \\ &+ (s_4 x^4 + 4 s_5 x^3 y + 6 s_6 x^2 y^2 + 4 s_7 xy^3 + s_8 y^4) + \dots = 0, \end{aligned}$$

ossia, ordinando secondo le s_l:

$$\begin{aligned} &s_0 + s_1 x + s_2 (y + x^2) + s_3 (2xy + x^3) + s_4 (y^2 + 3x^2 y + x^4) + \dots + \\ &+ s_{2h-1}\left[\binom{h}{1} xy^{h-1} + \binom{h+1}{3} x^3 y^{h-2} + \binom{h+2}{5} x^5 y^{h-3} + \binom{h+3}{7} x^7 y^{h-4} + \dots + x^{2h-1}\right] + \\ &+ s_{2h}\left[y^h + \binom{h+1}{2} x^2 y^{h-1} + \binom{h+2}{4} x^4 y^{h-2} + \binom{h+3}{6} x^6 y^{h-3} + \dots + x^{2h}\right] + \\ &+ s_{2h+1}\left[\binom{h+1}{1} xy^h + \dots\right] + \dots = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

[8]

In conseguenza, *se il contatto in* P *della* C_n *con* γ *è* m-*punto, con* m *pari* $= 2$h, e quindi (fine del n. 4) è s_{2h} la prima fra le s che non è nulla, si vede che *la* C_n *avrà in* P *un punto* h-*plo, con tutte le tangenti coincidenti* (*nella* y $= 0$, *tangente di* γ). Ponendo nella (10) $y = \rho x^2$, otteniamo un'equazione in x, il cui termine più basso, nell'ipotesi fatta, è in x^{2h} ed ha per coefficiente s_{2h} moltiplicato pel 1° membro di

$$\rho^h + \binom{h+1}{2}\rho^{h-1} + \binom{h+2}{4}\rho^{h-2} + \binom{h+3}{6}\rho^{h-3} + \dots + 1 = 0. \tag{11}$$

---

[8] Anche ora, per dare a quest'equazione l'ordinaria forma intera e finita, si dovrebbe moltiplicarla pel prodotto dei denominatori della (9). Ma di nuovo accade che, per la natura di questo moltiplicatore $(1 + \dots)$, ciò non avrebbe conseguenze sulle deduzioni che trarremo dalla (10).

Sicchè, in corrispondenza alle h radici ρ di questa equazione, si hanno altrettante curve $y = \rho x^2$ osculatrici alla C_n [9]. Ne segue che *la* C_n *ha precisamente* h *rami distinti (di 1° ordine e 1ª classe) uscenti da* P, *con elementi differenziali di 2° ordine (curvature) dipendenti solo da* γ *e da* P (Saranno rami rappresentabili con serie di potenze di x che cominciano così: $y = \rho x^2 + \ldots$, in corrispondenza ai valori indicati di ρ).

Se invece il contatto della C_n *con* γ *in* P *è* m-*punto, con* m *impari* $= 2h - 1$, ossia è s_{2h-1} la prima s non nulla, l'equazione (10) mostra che *la* C_n *avrà in* P *un punto* h-*plo, con* $h - 1$ *tangenti coincidenti nella tangente di* γ $(y = 0)$ *e la rimanente* $(h s_{2h-1} x + s_{2h} y = 0)$ *distinta da quella.* E, come nel caso precedente, si riconosce che *la* C_n, *oltre al ramo lineare tangente all'ultima retta, ha* $h - 1$ *rami lineari (e di 1ª classe) osculati, rispettivamente, dalle curve* $y = \rho x^2$, *ove per* ρ *si mettan le diverse radici dell'equazione:*

$$(12) \qquad \binom{h}{1}\rho^{h-1} + \binom{h+1}{3}\rho^{h-2} + \binom{h+2}{5}\rho^{h-3} + \binom{h+3}{7}\rho^{h-4} + \ldots + 1 = 0.$$

Da notare che, *se* h *è pari*, fra queste radici vi è sempre $\rho = -\frac{1}{2}$ [10].

Riunendo i due risultati relativi ad m pari, od impari, tragghiamo: *Se una* C_n *di* Σ *ha in un punto di* γ *(diverso dai punti di contatto di* γ *coi lati del moltilatero fondamentale) precisamente la moltiplicità* h, *essa avrà* h *rami lineari passanti per quel punto, dei quali almeno* $h - 1$ *saran tangenti ivi a* γ.

6. — A meglio illustrare ciò che abbiamo ottenuto intorno ad elementi differenziali di 2° ordine delle C_n in punti di γ, conviene ricordare ed applicare il seguente teorema [11]:

---

[9] Sarebbe però da dimostrare che le radici della (11), come poi anche quelle della (12), son tutte distinte.

[10] In fatti, sostituendo questo valore nella (12), e moltiplicando per 2^{h-1}, si ha un'eguaglianza che rientra nella 1ª delle due formole (34) a pag. 253 del *Lehrbuch der Combinatorik* di E. Netto (Leipzig, 1901): basta porre in quella formola $p = 1$ e $2m = h - 2$.

[11] V. la mia Nota *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie,* " Rend. R. Acc. Lincei „ (5) 6, $(1897)_2$, pag. 168; ove si troveranno anche altre citazioni.

“ Si abbiano nel piano due rami lineari C, C' di curve che tocchino nella comune origine P la retta p. Su una trasversale vicinissima a P, ma non passante per P, nè prossima a p, si prenda il birapporto dei tre punti, infinitamente vicini, d'intersezione della trasversale con C, C', p, e di un 4° punto arbitrario, ma a distanza finita da questi ([12]). Si otterrà un numero indipendente dalla trasversale considerata, come da quel 4° punto: dunque un *invariante projettivo*, relativo ai due rami tangenti C, C'. Se P è un punto proprio, quest'invariante non è altro che *il rapporto delle curvature di* C, C′ *in* P. Si può chiamarlo *birapporto della coppia d'elementi infinitesimi di 2° ordine, fra loro tangenti.* — Ove P si assuma come origine delle coordinate x, y; e p come retta $y=0$; sicchè i rami C, C' saran rappresentabili con serie $y=ax^2+\ldots$, $y=a'x^2+\ldots$; il birapporto in questione varrà a/a' ”.

Applicando questa proposizione, col prendere: per C un ramo della C_n del n. 5, uscente da P e tangente a γ, ramo che è risultato essere $y=\rho x^2+\ldots$, con ρ radice della (11) o della (12); e per C' la conica γ, rappresentata dalla (8); sarà $a=\rho$, $a'=-1/4$; e quindi $a/a'=-4\rho$. Dunque: *Moltiplicando per* -4 *ciascuna radice* ρ *della* (11), *o della* (12), *si ottiene il birapporto di ciascun elemento di 2° ordine della* C$_n$ *di* Σ, *tangente a* γ, *preso col corrispondente elemento di 2° ordine di* γ: ossia, se si preferisce, *il rapporto delle curvature* di questi elementi nel punto comune.

Rileviamo i primi casi, che vengono dal n. 5 pei primi valori di m ed h.

a) Se $m=2$ e $h=1$, la (11) dà $\rho=-1$. Dunque: le C_n di Σ tangenti a γ in un punto, semplice per esse, hanno ivi curvatura *quadrupla* di quella di γ ([13]).

b) Se un punto P di γ è doppio per una C_n di Σ (ossia se la C_n ha in P incontro tripunto con γ), e uno solo dei

---

([12]) Naturalmente, si può invece parlare di *limite* di quel birapporto, facendo *variare* con continuità la trasversale, tendendo ad una retta tirata per P, distinta da p.

([13]) Non è dunque possibile (e ciò seguiva anche, del resto, dal teorema del n. 4) un'ordinaria osculazione, in un punto semplice, fra γ e una curva di Σ.

2 rami di questa passanti per P è tangente a γ, sarà $m=3$, $h=2$; la (12) darà $\rho=-\frac{1}{2}$. Quel ramo della C_n avrà in P curvatura *doppia* di quella di γ.

c) Le C_n di Σ che hanno contatto 4-punto con γ in P hanno ivi un *tacnodo*, con 2 rami le cui curvature sono ben determinate in rapporto a quella di γ in P. — Ecc., ecc.

7. — Le proposizioni del n. 5 vanno anche confrontate con quelle del n. 2. Lì si era visto che le C_n di Σ passanti per m ($\leq n$) punti qualunque di una generica tangente p a γ passan di conseguenza per $m(m+1)/2$ punti determinati (inclusi quegli m): vertici di un $(m+1)$-latero completo circoscritto a γ. Or bene, si faccian tendere gli m punti al punto di contatto P di p. Si tratterà allora delle C_n che hanno in P incontro m-punto con p, ossia (n. 4) con γ: dunque appunto delle curve del n. 5. La natura che abbiam riconosciuto nella singolarità che queste C_n vengon ad avere in P dà subito la moltiplicità d'intersezione di due di esse in quel punto. Basta sommare quelle dei loro rami rispettivi, tenendo conto che per $m=2h$ ogni ramo di una curva ha contatto *tripunto* con un determinato ramo dell'altra, e *bipunto* cogli altri rami; e analogamente per $m=2h-1$. Se $m=2h$ quella moltiplicità d'intersezione risulta $h(2h+1)$; se $m=2h-1$ viene invece $h+(h-1)2h=h(2h-1)$. Ambi i numeri coincidono con $m(m+1)/2$: numero dei vertici del suddetto $(m+1)$-latero, che ora si è, per così dire, *schiacciato*.

8. — Ed ora una breve digressione.

Anzi tutto, stiamo al caso *a)* della fine del n. 6, che — in conformità di quanto s'è detto dianzi — si può derivare come limite, dalla considerazione delle C_n di Σ circoscritte ad un trilatero di tangenti di γ, ove queste tangenti si avvicinino indefinitamente. Quando si fissa una curva piana qualunque γ (che non occorre più sia una conica, ma che per semplicità si supporrà *analitica*) con un suo punto ordinario P, e ad un'altra curva δ s'impone di esser circoscritta al trilatero che ha per lati la tangente a γ in P e due tangenti di γ che s'avvicinino indefinitamente a quella; si trova con facile calcolo che, al limite, δ risulta tangente a γ in P, con un elemento differen-

ziale di 2° ordine ben determinato. Precisamente, se P è $x=y=0$, e γ si può rappresentare nell'intorno di P con una serie $y=ax^2+\ldots$, si trova che δ è rappresentabile con $y=4ax^2+\ldots$ Ossia, per le osservazioni generali del n. 6, δ ha in P curvatura *quadrupla* di quella di γ. Se adesso per γ si prende la nostra conica, ciò concorda col citato *a)* del n. 6.

Quella proposizione generale, relativa alle γ e δ, si trova già, in sostanza, in una Nota di Cl. Servais [14]. Conviene tener presente che, essendo il contatto tripunto ordinario di due curve piane un fatto che si trasforma per correlazioni in se stesso, curve aventi a comune 3 tangenti infinitamente vicine sono anche curve a contatto tripunto [15]. E allora si può anche ragionare così. L'ipotesi sulle due curve γ e δ ci dà un triangolo a lati infinitamente vicini, a cui è circoscritto il cerchio osculatore a δ, mentre — per l'osservazione precedente — gli è iscritto (in senso projettivo, senza distinzione fra " iscritto „ ed " ex-iscritto „) il cerchio osculatore a γ. Detti R e r rispettivamente i raggi di questi due cerchi, e d la distanza dei loro centri, in generale si ha [16], appunto perchè l'uno è circoscritto e l'altro iscritto od ex-iscritto allo stesso triangolo, $d^2=R(R\pm 2r)$. Ma nel caso attuale i due cerchi vengono a toccarsi, e quindi $d^2=(R\pm r)^2$. Dal confronto delle due eguaglianze, e dal fatto che r non è nullo, segue $r=4R$. —

Un'altra proposizione generale, di natura analoga a quella di sopra relativa a γ e δ, trova pure luogo qui. Essendo ancora fissata una curva analitica γ e un suo punto ordinario P, si supponga che un'altra curva η passi per un punto generico M che s'avvicina indefinitamente (in modo regolare) a P, e passi anche per quei 2 punti di γ, tendenti a P, nei quali γ ha per tangenti delle rette uscenti da M. Di nuovo un calcolo che non presenta difficoltà mostra che, se in prossimità di P γ è $y=ax^2+\ldots$, al limite η sarà rappresentabile con $y=2ax^2+\ldots$ Perciò η, non solo risulta tangente a γ in P, ma anche viene ad avere ivi un

---

[14] *Sur un certain cercle analogue au cercle de courbure*, " Mathesis „, t. 9 (1889), pag. 105.

[15] Cfr. un'altra Nota di Cl. Servais, *Sur le cercle osculateur*, a pag. 136 dello stesso volume.

[16] Formole di W. Chapple (1746) e K. W. Feuerbach (1822).

ben determinato elemento di 2° ordine, e cioè (n. 6) curvatura *doppia* di quella che ha ivi γ ([17]). Se poi la curva variabile ha in M, e quindi al limite in P, un punto doppio, si trova che il fatto enunciato vale ancora, ove con η s'intenda un ramo di quella curva, uscente da M e passante pei 2 punti di γ sopra nominati, che tendono a P. Ancora quel ramo, al limite, avrà in P la curvatura *doppia* di quella di γ.

Ora si applichi ciò, prendendo per γ la nostra conica e per curva variabile una C_n di Σ. Sappiamo (n. 3) che, se questa ha un punto doppio M, essa passa pei 2 punti di contatto di γ colle tangenti tirate da M. Facciamo andare M nel punto P di γ. Otterremo per la C_n la proprietà che è nel n. 6 *b)*.

§ 3. — Le superficie rappresentate da sistemi lineari contenuti in Σ.

9. — Consideriamo una superficie F, dello spazio ordinario o di uno spazio superiore, rappresentata sul piano π mediante un sistema lineare Λ di C_n circoscritto ad un $(n+1)$-latero completo di tangenti ad una conica γ. Se Λ coincide col sistema Σ, ∞^n, di *tutte* quelle C_n, F sarà d'ordine $n(n-1)/2$, ed apparterrà (n. 1) ad S_n. Se no, potrà abbassarsi l'ordine di F, come si abbasserà la dimensione dello spazio d'appartenenza.

In ogni caso, alla conica γ risponde su F una curva Γ, *inviluppo* di un sistema ∞^1 di curve razionali L, d'ordine n, di F, corrispondenti alle tangenti di γ. Questo sistema di curve è tale che per ogni punto di F ne passan due, e che due qualunque s'incontrano in un sol punto. Così due L son sempre punteggiate biunivocamente dalle altre. Ma il teorema del n. 1 mette in evidenza un fatto molto notevole relativo a questa corrispondenza tra due L. Esso dice, nella 2ª forma che gli abbiam dato,

---

([17]) Se γ si sostituisce col suo cerchio osculatore, η avrà per cerchio osculatore il limite di un cerchio passante per M e pei due punti di contatto del 1° cerchio colle tangenti uscenti da M. È evidente che il raggio di quel cerchio limite risulta metà di quello del 1°.

che la terna dei punti d'incontro a due a due di 3 tangenti di γ offre solo due condizioni alle C_n di Λ costrette a contenerli. E ciò, riportato ad F, dà che i 3 punti omologhi a quelli su F sono allineati. Dunque: *Tre linee* L *si tagliano a due a due in tre punti allineati* (18). Ossia: *Due* L *qualunque son punteggiate dalle altre per modo che le rette congiungenti le coppie di punti omologhi passano tutte pel punto comune alle prime due.*

Ne deriva una semplice costruzione per la F, quando si abbiano due delle L. Siano queste D, D', e diciamo O la loro intersezione. Per un punto P variabile su F passano due L, che dirò H e K, le quali incontrino D, D' rispettivamente nei punti h, h' e k, k': saranno quelli e questi allineati con O. D'altra parte saranno pure in linea retta P, h, k, come intersezioni di D, K, H; e P, h', k', come intersezioni di D', K, H. Chiamando dunque omologhi su D, D' i punti allineati con O, e quindi omologhe le corde di D, D' congiungenti coppie omologhe di punti (come le rette hk, $h'k'$), *i punti* P *di* F *si possono ottenere come intersezioni delle corde omologhe di* D, D'.

Si riconosce così che F è una di quelle particolari *superficie di* K. PETERSON (e di A. VOSS), di cui è data appunto questa costruzione nel n. 8 della mia Nota *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti* (19). Che F appartenga alla classe di superficie da cui s'intitola quella Nota, si scorge subito, considerando con una L la sua infinitamente vicina. La proposizione dedotta poc'anzi dal n. 1 si riduce allora a questa: fissata una L, le tangenti nei suoi vari punti alle altre L passanti per essi formano un cono (col vertice nel punto di contatto della L fissa coll'inviluppo Γ). Ciò mostra che le tangenti in un punto di F alle due L che vi passano sono *tangenti coniugate* di F; le L formano un reticolo coniugato; e i piani tangenti a F nei punti di una L formano un cono (col vertice in quel punto della L e di Γ). Si ha così per F un doppio sistema coniugato di coni circoscritti.

Risulta pure, dalla coincidenza delle due L per un punto

(18) Ne segue, se si è in un iperspazio: *le corde delle* ∞^1 *curve* L *sono trisecanti per* F.

(19) "Atti R. Acc. Scienze Torino „, t. 43 (1907-08), pag. 985.

di Γ, e quindi delle due tangenti coniugate di F, che la linea Γ, inviluppo delle L, è un'*asintotica* di F ([20]).

10. — Una conveniente rappresentazione analitica metterà nuovamente in evidenza la suddetta qualità delle nostre superficie F. Basterà scegliere in π delle opportune coordinate curvilinee.

Assumiamo come coordinate (ordinarie) della tangente variabile alla conica γ queste: $1, t, t^2$. Per un punto $(x_1\, x_2\, x_3)$ di π passan 2 tangenti, a cui rispondon 2 valori per t, e siano u, v. *Questi valori* assumiamo come coordinate curvilinee del punto ([21]). Sarà:

$$x_1 + u x_2 + u^2 x_3 = 0$$
$$x_1 + v x_2 + v^2 x_3 = 0$$

e quindi:

$$x_1 : x_2 : x_3 = uv : -(u+v) : 1.$$

Così l'equazione di una retta ξ nelle nuove coordinate di punto diventa un'equazione bilineare simmetrica fra u, v (in corrispondenza all'involuzione fra tangenti di γ, che ha ξ per *asse*). In particolare, se ξ è la tangente a γ che risponde al valore a del parametro t, viene

$$\Sigma \xi_i x_i = uv - a(u+v) + a^2 = (u-a)(v-a),$$

com'era prevedibile.

Ciò premesso, ricordiamo (n. 1) che il sistema lineare Σ di C_n era dato dalla (1), ove le forme p_k rappresentavano le $n+1$ tangenti di γ, lati del moltilatero fondamentale. Se non si pongono altre condizioni alle C_n, ossia se Λ coincide con Σ, la superficie F, di S_n, sarà dunque rappresentata da $\sigma y_k = 1/p_k$.

([20]) Per $n=3$, ossia quando il sistema Σ di π si compone delle C_3 circoscritte a un quadrilatero completo, la superficie del 3° ordine che esso rappresenta ha appunto, com'è noto, per asintotiche le linee rappresentate su π dalle coniche iscritte nel quadrilatero.

([21]) V. Darboux, op. cit. in ([3]) pag. 183 e seg[i]; o in ([1]) pag. 237 e seg[i].

Ma, per quel che s'è detto, indicando con $a_0\, a_1 \ldots a_n$ i parametri di quelle $n+1$ tangenti [22], si ha: $p_k = (u - a_k)(v - a_k)$, onde

$$(13) \qquad \frac{1}{p_k} = \frac{1}{(u - a_k)(v - a_k)} = \frac{1}{v - u}\left(\frac{1}{u - a_k} - \frac{1}{v - a_k}\right).$$

Si posson dunque assumere come formole per la rappresentazione di F su π:

$$(14) \qquad y_k = \frac{1}{u - a_k} - \frac{1}{v - a_k},$$

che rientrano appunto nel tipo $y_k = f_k(u) - f_k(v)$ del n. 8 della Nota citata in [19].

Se invece il sistema lineare Λ è determinato da alcune curve particolari di Σ, sì che F risulti rappresentata dalle formole

$$\sigma y_l = \sum_k \frac{\alpha_{lk}}{p_k},$$

le α essendo costanti; ancora la (13) ci consentirà di ridurre quelle somme che compajono nel 2° membro alla forma $f_l(u) - f_l(v)$.

11. — Altre proprietà della superficie F seguono ancora, subito, dalla rappresentazione piana.

Ad esempio, poichè le C_n di Σ con dato punto doppio passan di conseguenza (n. 3, corollario 1°) per due determinati punti di γ, si avrà che tutti i piani tangenti di F (supposta iperspaziale) si appoggiano in due punti alla curva Γ. —

Così, ai lati dell'$(n+1)$-latero fondamentale di π rispondono $n+1$ punti $(n-1)$-pli di F, congiunti a due a due da rette della superficie, corrispondenti ai vertici di quel multilatero. Tutte le L passano per quei punti $(n-1)$-pli di F. —

Gli $(m+1)$-lateri completi $(m \leq n)$ circoscritti a γ, di cui al n. 2, dànno che: $m+1$ curve L di F si tagliano a due a due in $m(m+1)/2$ punti, i quali presentano solo m condizioni alle sezioni iperpiane di F costrette a contenerli; vale a dire quei punti stanno in un S_{m-1} (o spazio minore). Come al n. 9 ave-

---

[22] La notazione è indipendente (e alquanto diversa) da quella del n. 4.

vamo *rette trisecanti*, così vengono per F dei *piani* 6-*secanti*, S_3 10-*secanti*, ecc.

Facendo coincidere le $m+1$ curve L, abbiamo dal n. 7 che in un punto di Γ lo S_{m-1} *osculatore* a questa (cioè ad incontro m-punto) ha in generale con F $m(m+1)/2$ intersezioni coincidenti. In particolare le rette tangenti di Γ sono a contatto tripunto con F: a conferma dell'essere Γ un'asintotica. D'altronde dal n. 5 (per $m=3$, $h=2$) segue che il piano osculatore a Γ in un suo punto generico è ivi tangente a F. Invece gl'iperpiani a contatto 4-punto con Γ sègano F in curve aventi in generale un tacnodo (n. 6, c). — Ecc., ecc.

12. — Ma, riguardo alla asintotica Γ, si può dal n. 5 trarre qualcosa di più significativo.

Premettiamo che, estendendo un concetto che fu ricordato al principio del n. 6, si ha questo teorema più generale ([23]):

" Dati in uno spazio qualunque due rami lineari Γ, Γ' di curve analitiche, aventi in comune l'origine (O), la tangente e il piano osculatore, si fissi un fascio d'iperpiani il cui asse sia sghembo colla tangente; e in esso si considerino 4 elementi, cioè uno generico, e poi gl'iperpiani che projettano 3 punti infinitamente vicini a O presi rispettivamente sulla tangente, su Γ e su Γ', in modo che il loro piano non sia infinitamente prossimo ad uno passante per la tangente. Il birapporto di quei 4 iperpiani dipenderà solo dai due rami dati; e se s'introduce una metrica euclidea, sì che O risulti al finito, quel birapporto sarà uguale al rapporto delle prime curvature di Γ' e Γ in O ".

" Quando Γ e Γ' hanno le coordinate omogenee projettive dei loro punti rappresentabili in serie di potenze così: $\alpha_k+\beta_k t+m\gamma_k t^2+\dots$, $\alpha_k+\beta_k t+m'\gamma_k t^2+\dots$, il birapporto, o rapporto di curvature, vale m'/m ". —

La superficie F sia quella, di S_n (n. 9), che è data dal sistema completo Σ; e quindi, in base alla (9) del n. 5, si può rappresentare colle

$$y_k=\frac{1}{1-a_k x-a_k^2 y}\,. \tag{15}$$

([23]) V. una Nota, *Sugli elementi curvilinei che han comune la tangente e il piano osculatore*, che uscirà nei " Rend. R. Acc. Lincei " (5) 33, (1924)$_2$.

Come punto O prendiamo il punto (unità) di F corrispondente a $P\,(x = y = 0)$ di π; e come ramo Γ precisamente la curva (asintotica) di F, che già indicavamo appunto con Γ. Essa passa per O, ed avendo per imagine su π la (8), sarà data, in serie del parametro x, in prossimità di O, da:

$$(16) \qquad y_k = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} a_k x\right)^2} = 1 + a_k x + \frac{3}{4} a_k^2 x^2 + \ldots$$

Prendiamo poi la sezione di F con un iperpiano tangente ad F in O: e precisamente un iperpiano che abbia ivi con Γ incontro m-punto, e quindi (n. 5) seghi F in una curva con punto h-plo, ove $m = 2h$, oppure $m = 2h - 1$. Se $m = 2h$ questa sezione iperpiana avrà h rami lineari uscenti da O, tutti tangenti a Γ; se $m = 2h - 1$, ne avrà solo $h - 1$ così fatti. Dicendo Γ' uno dei rami tangenti a Γ, la sua immagine su π è rappresentata in serie di x da: $y = \rho x^2 + \ldots$, ove ρ è radice dell'equazione (11), o (12), a seconda dei due casi. Avrà dunque Γ', sostituendo nella (15), per coordinate dei suoi punti:

$$(17) \quad y_k = \frac{1}{1 - a_k x - a_k^2 \rho x^2 - \ldots} = 1 + a_k x + (\rho + 1)\, a_k^2 x^2 + \ldots$$

Confrontando fra loro questi sviluppi (16), (17), che coincidono nei primi due termini, in conformità della fine del teorema dianzi citato; vediamo che il rapporto m'/m, ivi nominato, vale qui $\frac{4}{3}(\rho + 1)$. Sarà dunque questo — ove si pongan per ρ le diverse radici delle (11), (12) — il birapporto, o, se si preferisce, il rapporto delle curvature, di ognuno dei rami considerati di sezioni iperpiane di F rispetto al ramo dell'asintotica Γ.

Se, ad esempio, prendiamo $\rho = -\frac{1}{2}$, quel rapporto diventa $\frac{2}{3}$. Esso ha luogo, in particolare, per $m = 3$, $h = 2$, cioè quando la superficie vien segata con un iperpiano che le sia semplicemente tangente nel punto O dell'asintotica Γ, e si confronta con Γ quel ramo della sezione che riesce appunto tangente a Γ. Quel valore $\frac{2}{3}$ risulta concorde con un noto teorema

di E. BELTRAMI relativo alla 1ª curvatura delle asintotiche per superficie di S_3 ([24]).

In generale le proposizioni che ora qui si sono accennate per F *e* Γ *posson guidare ad estensioni iperspaziali di quel teorema di* BELTRAMI.

13. — Diciamo infine una parola intorno a *casi particolari interessanti delle nostre superficie.*

Quando il sistema rappresentativo Λ di C_n ammette punti base in più di quelli che son nei vertici dell'$(n+1)$-latero fondamentale, si presentano delle notevoli *linee multiple* per F.

Sia M un tal punto base, e siano r, s le due tangenti a γ passanti per esso. Il teorema del n. 1 dice che, rispetto al sistema Λ, i punti di r e s si associano (colla projettività $\mathfrak{P}$) così che ogni coppia di punti associati presenta una sola condizione alle curve di Λ costrette a contenerla. Dunque le rette r, s sono immagini di una linea doppia (in generale) Δ di F, lungo cui le due falde di F saranno nettamente staccate (se r e s sono distinte): rispondendo l'una ai punti di π prossimi ad r, l'altra ai punti prossimi ad s (il punto comune M risponde in generale ad una retta — o linea superiore — di F che va dall'una falda all'altra). La linea doppia Δ costituisce la sovrapposizione di due delle ∞^1 linee L (omologhe delle rette r, s). Quindi ancora, come per una L qualunque (n. 9), i piani tangenti nei punti di Δ ad una stessa falda di F inviluppano un cono (col vertice su Δ e sull'asintotica Γ). — Ogni L ha un punto doppio (nodo) nel suo punto d'incontro con Δ.

Analogamente si posson ottenere delle F con *linea tripla, quadrupla,* ecc. di natura particolare, obbligando le C_n di Σ a passare pei vertici di un *nuovo* trilatero, quadrilatero ... completo, circoscritto a γ. La linea in questione sarà rappresentata dai lati di questo moltilatero; ogni lato essendo immagine di una falda. Ecc.

([24]) *Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface,* "Nouv. Ann. de Math." (2) 4, (1865), pag. 258 (= "Opere matᵉ", I, pag. 255).

14. — Facendo coincidere le due rette r, s, o in generale i lati del moltilatero di cui s'è detto ora, si otterranno delle F con linee doppie, triple, ecc. *a falde coincidenti.*

Il sistema rappresentativo Λ si comporrà allora di curve di Σ aventi in un punto R di γ incontro m-punto con questa linea (ossia colla tangente r a γ in R). Son le curve per cui al n. 5 abbiamo stabilito la singolarità in R. Avevamo visto al n. 3 che tutte quelle fra esse che passano per un punto generico della r hanno ivi incontro $(m+1)$-punto con una stessa retta, e quindi anche fra loro. Ne segue che ad r risponde su F una notevole linea $(m+1)$-pla, a falde coincidenti. Per $m=1$, si ha un'ordinaria *linea cuspidale.* In tutti i casi la rappresentazione piana, così semplice, dà modo di esaminare le singolarità delle sezioni piane o iperpiane nei punti della linea singolare, ritrovando fatti noti e ottenendone dei nuovi. Credo superfluo trattenermi su ciò.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona — Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIX, Disp. 11ª e 12ª, 1923-1924

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1924

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Aprile 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Segre, Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Sacco, Pochettino e il Segretario Mattirolo, che dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio D'Ovidio scusa la sua assenza.

Il Presidente comunica: una lettera del *Franklin Institute*, nello Stato di Pensilvania, che rivolge invito alla nostra Accademia di voler assistere alla celebrazione del 1° Centenario di detto *Istituto* nel settembre di quest'anno; ed una missiva della Università di Toronto e del R. Istituto Canadese, che prega l'Accademia a voler delegare uno dei suoi Soci al Congresso Internazionale di Matematica che si terrà nel prossimo agosto a Toronto. L'Accademia delibera di pregare il Socio Senatore Volterra (la cui andata in America per questa occasione è accertata) a voler rappresentare il nostro Sodalizio presso i due Istituti.

Il Presidente comunica inoltre un appello della *Societas Medica Chirurgica Bononiensis*, che annuncia la celebrazione del suo 1° Centenario; celebrazione che avrà luogo nel giugno prossimo. L'Accademia delibera di associarsi con plauso a questa solennità coll'invio di una lettera.

Il Presidente, nel nome dell'autore Prof. Giuseppe GRADENIGO, presenta il dono del ponderoso suo volume che ha per titolo *Lo sviluppo embrionale dell'Orecchio medio ed esterno e della Capsula periotica* (*orecchio mesoblastico*) accompagnata dall'Atlante ricco di 50 Tavole nitidamente incise.

Di questo dono importante il Segretario MATTIROLO così discorre:

" È questo un lavoro che (senza tema di esagerare) si può dire che segna una epoca nello studio filogenetico e nel campo della embriogenesi dell'orocchio mesoblastico.

" Pensata ed iniziata fino dall'anno 1884 quest'opera (di cui alcuni capitoli comparvero già in lingua tedesca a Vienna nel 1887) contiene una quantità di osservazioni della massima importanza sullo sviluppo dell'orecchio, le quali concernono principalmente la *derivazione della Staffa*, la *forma e la disposizione della Capsula periotica* e del *cavo tubo-timpanico*, le quali concedono all'A. indiscutibile priorità di scoperta e soluzione di molti punti importanti e controversi della dottrina dello sviluppo dell'Orecchio.

" L'opera che ha costato tante fatiche all'A., oltre alle sue ricerche originali antiche e recenti (illustrate da un imponente corredo di disegni, di microfotografie e di un elegante Atlante di 50 Tavole), contiene nella 2ª parte studi sullo sviluppo, sulla anatomia umana e comparata e sulla patologia dell'Orecchio, documentati da una esaurientissima bibliografia, la quale comprende 544 opere che compendiano tutte, si può dire, le ricerche eseguite in questo campo di studi a partire dall'anno 1884. La coltura che l'A. dimostra è davvero stupefacente, avendo egli non solo tenuto calcolo di quanto hanno scritto i medici, gli embriologi, ma essendosi preoccupato di allargare i limiti delle questioni da lui investigate, appoggiandosi anche ai risultati ottenuti dai zoologi e dai botanici moderni nel campo della filogenesi.

" Nei limiti del verbale, spiacemi di non potere altrimenti analizzare e lodare l'opera grandiosa che onora non solo l'A.,

ma il paese, il quale deve in gran parte al Prof. GRADENIGO il posto eminente che in breve ha acquistato nel campo della Otologia „.

L'Accademia, alla quale l'A. ha offerto l'esemplare N. 52 della sua memoria, mentre ringrazia il donatore, si felicita con lui per l'opera insigne compiuta.

Il Segretario MATTIROLO presenta quindi e fa omaggio di un suo lavoro dal titolo *Noterelle di Micologia* e ne discorre brevemente.

Il Socio Vice Presidente PARONA presenta una sua Nota dal titolo *A proposito del dono al R. Museo Geologico di Torino della Collezione Rovasenda.*

In questa Nota il Vice Presidente PARONA riferisce intorno a due cospicui doni al R. Museo Geologico: la ricca collezione paleontologica del Conte Luigi di ROVASENDA per parte della figlia Marchesa C. TERZI, e il busto del Geologo Senatore Angelo Sismonda, offerto dal nipote Conte Senatore Eugenio REBAUDENGO. Egli coglie l'occasione per segnalare le benemerenze del Conte ROVASENDA e l'importanza scientifica della sua collezione, specialmente in rapporto agli studi che scienziati italiani e stranieri hanno fatto sulle colline torinesi; e riguardo al Prof. Angelo SISMONDA che fu Socio e Segretario perpetuo dell'Accademia e uno dei fondatori dei nostri Musei di Mineralogia e Geologia, per rilevare che il geologo, ben noto per la parte avuta negli studi per la perforazione del Colle del Frejus, occupa nella storia della Geologia piemontese un posto eminente per i suoi studi sulla Savoia, sul Piemonte e sulla Liguria, e come autore di una Carta geologica rimasta classica, come egli dimostra anche istituendo un parallelo coll'opera del GASTALDI, altro nostro illustre Socio.

La Nota del Socio PARONA è accolta per gli *Atti*.

Il Socio SOMIGLIANA presenta quindi una Nota del signor Paolo BONANNO, *Sopra un caso particolare di un nuovo tipo di distorsioni elastiche, che interessa alcuni problemi della pratica.*

Egli ne discorre, facendo rilevare la importanza dell'argomento e delle conclusioni alle quali l'A. è giunto, le quali potrebbero avere applicazioni pratiche, in modo speciale, nella operazione di fondita di pezzi d'artiglieria. Il Socio Guidi aggiunge a tale riguardo alcuni schiarimenti.

La Nota del sig. Bonanno è quindi accolta per gli *Atti.*

Il Socio Guidi presenta una Nota dell'Ing. Ottorino Sesini, *Sull'equilibrio di travature reticolari elastiche iperstatiche*, che viene accolta per gli *Atti.*

Il Socio Pochettino presenta uno studio del sig. Tavani F., *Intorno all'espressione d'un complesso, funzione di variabile reale, in uno spazio ad* n *dimensioni*, che viene accolto per gli *Atti.*

Presentata dal Socio Segre nel nome del Socio Majorana, una Nota del sig. Bompiani E., *Determinazioni proiettive, differenziali, relative ad una superficie dello spazio ordinario*, viene pure accettata per gli *Atti.*

Il Socio Direttore della Classe Segre presenta quindi una Nota del sig. Dr Alessandro Terracini, *Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari*, ugualmente accolta per gli *Atti.*

Infine il Socio Sacco presenta un suo studio dal titolo: *Resti dell'uomo preistorico nei Colli di Torino.*

L'Autore, accennato brevemente alla importanza dell'argomento, ricorda come per una lunga serie di anni, malgrado ogni sua ricerca, egli non fosse mai riuscito a ritrovare traccie dell'uomo preistorico sulle Colline di Torino, e che le prime vestigie, un'ascia litica e pochi residui di cocci fossero da lui rinvenuti in unione al compianto Conte Rovasenda molti anni or sono (1885), e che ultimamente nuove traccie della presenza preistorica dell'uomo da lui rinvenute a Sciolze, gli abbiano concesso di stendere questa Nota. L'Autore accenna alle cause che hanno ostacolato la presenza dell'uomo sui Colli Torinesi. La Nota è accolta per gli *Atti.*

LETTURE

A proposito del dono al R. Museo Geologico di Torino della collezione "Rovasenda„ e del busto di "Angelo Sismonda„

Nota del Socio nazionale residente C. F. PARONA

I ricchi doni ai Musei, ed in modo speciale a quelli di Storia Naturale, sono rari: ma io ho la rara ventura di segnalarne due e cospicui al nostro Museo di Geologia e di Paleontologia, e di informare che la ricca e preziosa collezione paleontologica del compianto Conte Luigi di Rovasenda, dono della figlia N. D. Maria Clotilde, consorte al Marchese, Colonnello Gabriele Terzi, e che il busto dell'illustre geologo piemontese Senatore Prof. Angelo Sismonda, dono del suo degno nipote Senatore Conte Eugenio Rebaudengo, sono definitivamente a posto nelle sale del Museo.

Sono doni che all'alto valore materiale uniscono un alto valore morale, e il gesto signorilmente compiuto è per se stesso e nel suo significato il più bell'elogio e il plauso più meritato ai donatori. Tuttavia mancherei al dovere se non rinnovassi ai generosi donatori i più vivi ringraziamenti, e se non li manifestassi pubblicamente anche in forma di elogio dei due valentuomini, che i doni ricordano e nello stesso tempo onorano.

Il Conte Luigi di Rovasenda [n. 16 aprile 1826, m. 5 aprile 1917], della nobile famiglia piemontese, che onorò ed onora la Patria colle sue benemerenze, ne fu un degno rappresentante: le sue virtù, le opere buone che furono lo scopo della sua lunga vita, l'amore allo studio, la semplicità e modestia del suo tratto gli procurarono stima e simpatia larghissima; e vivo fu il dolore destato dalla morte del venerando vegliardo, che, per la tarda età serenamente trascorsa con vigore fisico e fre-

schezza d'intelligenza, potrebbe offrire argomento ed esempio a chi volesse fare un nuovo elogio della vecchiaia.

Il collega F. Sacco con affettuosa e particolareggiata commemorazione ed io stesso con breve scritto già ricordammo (1) la vita esemplare del caro amico, il patriottismo dell'antico ufficiale dei granatieri, il socio fondatore del Club Alpino Italiano, proclamato socio onorario in occasione del Cinquantennio della provvida istituzione, i meriti suoi di appassionato naturalista, ed in particolare di intelligente ricercatore di fossili, come documenti per la storia ed illustrazione geologica della collina di Torino.

In questo campo di attività, con ininterrotte, sistematiche e diligenti ricerche, durate ben 60 anni, Egli raccolse nell'ospitale sua villa di Sciolze, una grande collezione paleontologica, l'ordinamento e lo studio della quale furono costante sua occupazione. E lo scopo non fu l'egoistico e geloso possesso e l'arricchimento di un tesoro di valore scientifico e commerciale, bensì il desiderio nobile di promuovere e favorire l'indagine a vantaggio della scienza. Egli permetteva infatti con insolita liberalità agli studiosi di approfittare del frutto delle sue fatiche, ed anche di illustrare le sue collezioni, ammirate per copia e bellezza di esemplari, per l'esatta, scrupolosa indicazione della loro provenienza e per il numero eccezionale delle specie rare. Il singolare museo di Sciolze, di frequente visitato da naturalisti italiani e stranieri, acquistò larga rinomanza; e molti degli scritti, che contribuirono a far conoscere le ricchezze paleontologiche dei terreni terziari del Piemonte, illustrano la collezione Rovasenda. Di modo che si può legittimamente asserire, che il merito del progresso verificatosi durante gli ultimi decenni nelle conoscenze geo-paleontologiche delle colline torinesi si deve in larga parte attribuire al Rovasenda. È infatti, ad es., merito suo se certi problemi relativi ai classici giacimenti di Gassino furono risolti o discussi largamente, perchè si deve a Lui la ricerca dei documenti paleontologici decisivi, ch'Egli stesso il-

---

(1) F. Sacco, *Conte Luigi di Rovasenda*; commemorazione (con ritratto), " Boll. Soc. Geol. Ital. „, XXXVI, 1917. — C. F. Parona, *Conte Luigi di Rovasenda* (con ritratto), " Rivista del C. A. I. „, XXXVI, 1917, p. 143.

lustrò in parte. Così i lavori di Airaghi, Bassani, Bellardi, Cocchi, Crema, Davidson, De Alessandri, D'Erasmo, Dervieux, Fuchs, Michelotti, Peola, Prever, Sacco, Silvestri, Tellini, e di altri, fra i quali lo scrivente, relativi alla collina di Torino, completamente o parzialmente hanno il loro fondamento nelle collezioni del Rovasenda.

Sono appunto queste collezioni di materiali delle colline di Torino e di qualche altra regione del Piemonte, che costituiscono il magnifico e cospicuo dono della Marchesa Terzi di Rovasenda. A norma delle disposizioni vigenti l'atto burocratico di consegna fu corredato da un elenco sommario degli oggetti donati col prezzo di stima: orbene, il numero dei pezzi fu calcolato a 23 mila, col valore, compreso quello dei mobili pure donati, di oltre 20 mila lire. Quando sarà compiuto l'ordinamento del materiale, lavoro lungo e delicato, perchè non tutto fu studiato e determinato, e numerosissimi esemplari, intiere faune e flore attendono il lavoro di preparazione e studio di specialisti esperti, si verificherà un numero di oggetti notevolmente superiore a quello dell'inventario, ed il valore dell'insieme delle raccolte risulterà più elevato sia nel riguardo scientifico, come in quello commerciale.

La donatrice aveva espresso il desiderio che la collezione fosse collocata in una saletta riservata, ed il desiderio fu esaudito grazie al Ministero della I. P., Ministro l'On. Corbino, che concesse in larga misura i mezzi indispensabili a preparare sede degna e propria alla raccolta, dove potesse essere esaminata dagli studiosi coi mezzi più opportuni. Accanto al grande Museo abbiamo dunque il piccolo Museo, che naturalmente porta il nome di Rovasenda a ricordo del rimpianto naturalista-paleontologo e in omaggio alla figlia sua, munifica donatrice: ciò è detto in apposita targa.

La storia della geologia in Italia ricorda con onore il nome di Angelo Sismonda [n. 20 agosto 1807, m. 30 dicembre 1878]: così il collocamento del busto di Lui nell'Istituto e Museo, che Egli onorò col suo insegnamento ed arricchì col copioso materiale raccolto nel lungo periodo delle sue vaste ricerche, è un omaggio degno e dovuto alla sua memoria. Il Conte Rebaudengo, col dono della espressiva opera d'arte, non poteva in modo mi-

gliore dimostrare l'affetto e la venerazione verso il nonno illustre. Per sua nobile e generosa iniziativa, ANGELO SISMONDA, l'insigne autore della prima Carta geologica d'insieme delle Alpi occidentali e dell'Appennino ligure e collaboratore alla grande impresa del primo traforo delle Alpi, è qui ricordato in effige agli studiosi ed a quanti ammirano, nelle produzioni dell'ingegno e nelle meraviglie del lavoro, i fattori del progresso umano, e grati li rammentano.

Non mi propongo di narrare la vita del geologo piemontese, nè di fare l'esame critico completo dell'opera sua, pur tessendone l'elogio: nulla potrei aggiungere a quanto già dissero di Lui, Giuseppe Molinari, Giorgio Spezia, Quintino Sella, Ascanio Sobrero, Ercole Ricotti, Alberto Gaudry e, recentemente, A. Roccati (1).

Egli fu il geologo per l'ardimentosa impresa del traforo del Fréjus, il rilevatore del tracciato geologico della galleria: Quintino Sella, buon giudice, commemorando ANGELO SISMONDA ai Lincei, disse che " la grande opera del Colle del Fréjus dimostrò singolarmente esatte le osservazioni e le predizioni del Sismonda sugli strati da attraversarsi „ (2). E questa parte da Lui avuta nella preparazione dei piani per l'opera, allora a ragione ritenuta audace, gli procurò quella meritata fama, che si ravvivò nel 1921, in occasione della celebrazione del cinquantenario della apertura della nuova via diretta fra Italia e Francia.

---

(1) G. MOLINARI, *Notizia biografica del Senatore Angelo Sismonda*, Torino, 1878 (dalla " Gazzetta Piemontese „, N. 33, giugno), Tip. Roux e Favale. — E. RICCOTTI, *Brevi notizie di Angelo Sismonda*, " Atti R. Acc. Sc. Torino „, XIV, 1878-79. — G. SPEZIA, *Cenno biografico di Angelo Sismonda*, " Annuario R. Univ. di Torino „, 1879-80 (1880) (con elenco delle pubblicaz.). — A. SOBRERO, *Angelo Sismonda e Bartolomeo Gastaldi;* commemorazione, " Ann. R. Acc. Agricolt. Torino „, XXII, 1879. — Q. SELLA, *Commemorazione di Angelo Sismonda* (con elenco delle pubblicaz.), " Atti R. Acc. Lincei „, Transunti, III, 1878-79. — A. GAUDRY, *Angelo Sismonda* (cenno necrologico), " Bull. Soc. Géol. de France „, VII, 1878-79. — A. ROCCATI, *In ricordo di Angelo Sismonda* (con ritratto), raccolta di lettere a Lui dirette (con elenco delle pubblicaz.), Torino, F. Bocca, 1922.

(2) Vedasi a questo riguardo anche l'elogio, all'esattezza delle previsioni del Sismonda, espresso dal Sella nell'adunanza della R. Accad. delle Scienze di Torino del 2 luglio 1865.

Fatta astrazione della parte, per altro scientificamente importante, avuta dal SISMONDA nello studio geotettonico per la galleria del Fréjus, l'opera sua di geologo resta documentata dai suoi scritti, dalle collezioni, specialmente litologiche, da Lui personalmente fatte nelle Alpi occidentali ed in Liguria, e dalla Carta geologica di Savoia, Piemonte e Liguria, pubblicata per cura del Governo nel 1862 (seconda impressione nel 1866). Questa parte meno conosciuta o dimenticata della vita scientifica del nostro geologo, credo opportuno di prendere ora brevemente in esame, perchè, considerando separati e nell'insieme gli accennati documenti della sua attività e della sua carriera di geologo, è possibile di formarsi un'idea adeguata della sua tempra di lavoratore appassionato ed instancabile, e del posto distinto che Egli occupa nella schiera degli illustri, che promossero gli studi geologici in Italia e raccolsero e coordinarono gli elementi dello schema fondamentale per la grande Carta geologica del Regno, che, con lavoro difficile e faticoso, necessariamente lento, si va preparando e perfezionando dall'apposito Ufficio statale.

Non è ora il caso di procedere ad una esposizione riassuntiva del contenuto delle memorie, parecchie delle quali voluminose, che in numero di oltre 50 furono pubblicate dal 1830 al 1872; esse, nello stato attuale della scienza, hanno ormai valore soltanto storico, che è evidentemente superato dal rapido progresso portato dagli studi e dalle scoperte più recenti. Ma appunto nel loro valore storico esse devono essere considerate, e non posso esimermi dal notare, che esse, mentre segnano nella loro successione cronologica il progressivo maturare delle idee dell'A. e l'allargarsi della visione geologica ch'Egli andava formandosi della vasta regione, hanno nelle descrizioni geognostiche delle vallate dei repertori di informazioni, che sono important per se stesse, riferendosi a dati di fatto tutt'ora apprezzabili, anche a chiarimento e interpretazione della carta geologica ora ricordata.

A chi considera l'opera del SISMONDA, senza riferirsi al tempo durante il quale essa si svolse e senza considerare quanto meno difficile sia ora la soluzione dei problemi stratigrafici, conseguentemente ai progressi della tectonica e della paleontologia, può parer strana la persistenza sua nell'errore relativo alla dibattuta questione sulla serie fossilifera di Petit-Cœur presso

Moutiers in Tarantasia, e di altre simili, coll'assurda deduzione del sincronismo di una fauna mesozoica con una flora paleozoica. Il quale errore certamente influì nell'impedirgli di meglio interpretare nella sua composizione ed estensione la imponente massa del suo giurassico metamorfico, e trarre tutto il partito da certe sue rivelatrici scoperte di fossili, nonchè dalla intuizione di una idea derivatane e più tardi dimostratasi fondamentalmente esatta entro i limiti di quella zona, che fu di fatto riconosciuta d'età mesozoica.

Ma bisogna ricordare che Egli era seguace di Élie de Beaumont, e che le sue idee erano subordinate alle vedute del celebre geologo francese allora imperanti, in particolare sulla mente del geologo piemontese suo allievo e collaboratore, suo amico ed ammiratore. Nè, a spiegare la ferma convinzione del Sismonda in questa " iliade interminabile ", come definì lo Stoppani, sul caso di Petit-Cœur, è fuor di luogo rammentare l'episodio significativo della questione sottoposta alla decisione (1855) della Società Geologica di Francia e risolta dalla maggioranza, docile all'autorità, nel senso delle idee di E. de Beaumont; di ammettere cioè come verità un errore di interpretazione, mentre trattavasi di riconoscere un esempio dei frequenti disturbi stratigrafici per rovesciamenti e contorcimenti.

Ed ora, che le cognizioni sul fenomeno glaciale e sulle glaciazioni neozoiche si considerano fra le meglio dimostrate conquiste scientifiche, può sorprendere il fatto che il Sismonda sia rimasto estraneo alle ricerche in questo campo, allora già assai promettente, e fedele alla supposizione dell'intervento di correnti diluviali nella spiegazione dell'origine dei depositi morenici prealpini e subalpini. Ma anche qui l'attaccamento alle vedute del maestro deve aver avuto non poca influenza nel determinare la sua opposizione alla nuova idea. Così avvenne che mancò alla bella carta geologica del Sismonda il complemento della distinzione e localizzazione dei depositi di origine e trasporto glaciale. È da notare per altro che gli scienziati, specialmente se prossimi al termine della loro carriera, e questo è il caso del Sismonda, sono spesso restii ad accogliere idee innovatrici, in particolare quelle che modificano profondamente o demoliscono teorie ritenute dimostrate o supposizioni credute verità. Già Q. Sella, riferendosi appunto al Sismonda, osservò che " la vec-

chiaia dei naturalisti è spesso amareggiata dallo spettacolo della caduta delle teoriche sulle quali fondarono i loro lavori „.

Leggendo gli scritti del Sismonda si ha la prova delle sue lunghe e diligenti esplorazioni geologiche negli " Stati sardi di terraferma „: e, se si pensa alle difficoltà che il geologo alpinista doveva allora incontrare e superare nelle perlustrazioni fuori delle grandi arterie stradali delle valli principali, ed agli scarsi mezzi dei quali disponeva il nostro geologo, noi, abituati ai moderni, rapidi mezzi di trasporto ed alle agevolezze portate dal turismo, possiamo, non senza meraviglia, valutare la somma di lavoro e le fatiche da Lui durate con ammirevole spirito di abnegazione, non ostante lunghe e penose infermità, nel compimento della grande e nobile iniziativa. Che Egli abbia visitato e percorso Savoia, Piemonte e Liguria nelle valli maggiori e minori è provato in modo ancora più evidente dalle collezioni sue litologiche, che si conservano nel nostro Museo, ordinate geograficamente per valli. Complessivamente sono oltre 3500 campioni, registrati in catalogo manoscritto, in due volumi in 4°, di facile consultazione, perchè provvisti di indici alfabetici riferentisi alle valli ed alle località di provenienza dei singoli campioni. Aggiungendo a questa grande raccolta quella minore, di circa 250 altri campioni, del " traforo Bardonecchia-Modane „, coll'indicazione per ciascun pezzo della distanza dagli sbocchi orientale e occidentale, abbiamo una chiara idea della importanza ed abbondanza dei materiali di documentazione e di studio con cui il Sismonda arricchì il Museo, del quale ben può dirsi in alto grado benemerito. L'ordinamento da Lui dato alle sue collezioni fu rispettato: così rimasero ai campioni le determinazioni sue colle altre indicazioni di provenienza e di giacitura, per modo che i riferimenti alle sue pubblicazioni ed alla Carta geologica ed i controlli riescono facili.

La Carta geologica (scala 1 : 500.000) è l'espressione grafica dei risultati delle indagini dirette sul terreno, continuate durante 28 anni, secondo il disegno propostosi nel 1834, mentre era in escursione con Élie de Beaumont: essa è il compimento dell'incarico ufficialmente affidato al Sismonda da Carlo Alberto nel 1846, con atto che, fra i tanti, attesta la mente illuminata ed aperta del Sovrano, e che assicurò al Piemonte il vanto e il merito d'essere il primo Stato italiano che deliberasse il rile-

vamento e la pubblicazione di una carta geologica. A questo atto del governo piemontese si deve riconoscere ed attribuire una notevole importanza per la storia della geologia italiana, in quanto che ad esso si raccorda il regio decreto del 1861, col quale il governo nazionale istituì una Giunta consultiva, della quale fece parte il SISMONDA, col còmpito di stabilire le norme per la formazione della Carta geologica del Regno; quella Giunta che assunse poi nome e funzione di R. Comitato Geologico.

Naturalmente nella compilazione della sua Carta il SISMONDA si giovò dei risultati degli studi di altri osservatori, ma ciò non diminuisce il merito suo e nulla toglie alla originalità del lavoro, col quale Egli eresse a se stesso un ricordo duraturo e significativo. La Carta segna una data nella cartografia geologica del Piemonte e regioni attigue, così come quella del R. Ufficio Geologico (scala 1: 400.000, 1908) ne segna una seconda: ma la pubblicazione della seconda, coi perfezionamenti dovuti al progresso della scienza in 50 anni, ha lasciato intatta l'importanza che viene alla prima dal suo valore intrinseco e dal fatto ch'essa rappresenta il risultato di un rilevamento compiuto, con tenacia veramente piemontese, da un solo studioso.

Nell'ultimo periodo dell'attività scientifica del SISMONDA nuovi orizzonti si aprirono alla geologia piemontese specialmente per opera di Bartolomeo Gastaldi: era inevitabile che l'accordo scientifico venisse a mancare fra il seguace fedele di una scuola ormai tramontata ed il forte campione di un nuovo indirizzo. — Nello studio della genesi e struttura delle catene montuose si procede con metodi rinnovantisi, che propongono la risoluzione dei nuovi problemi, che lo stesso progresso scientifico crea e senza interruzioni prospetta agli studiosi, quasi a convincerli, che il completo raggiungimento della verità scientifica è sempre lontano: informino, a questo proposito, le recenti scoperte e indagini sui carreggiamenti e la interpretazione e applicazione loro nella sintesi delle catene montuose. — Prima le concezioni di Ch. Lory, sulla distinzione delle zone alpine e sulla importanza della loro cronologia per una più esatta conoscenza della struttura delle Alpi occidentali, seguìto da Favre e da Gerlach anche nell'ammettere, come il SISMONDA, l'età mesozoica degli *schistes lustres*, poi l'intervento del Gastaldi, coi risultati delle sue ricerche e la novità delle sue interpretazioni, gettarono come

un'ombra sull'opera del Sismonda, che rimase quasi dimenticata. Ma, a tanti anni di distanza dalla morte dei due benemeriti geologi piemontesi (1878), considerando ora, alla luce delle più recenti conquiste della geologia alpina, le opere dell'uno e dell'altro, vediamo le ombre diradarsi, dimostrandosi ancora una volta, che il tempo rende giustizia e che la critica serena ed obbiettiva giova al giusto apprezzamento del merito.

L'interpretazione dei caratteri strutturali e morfologici delle Alpi piemontesi, e insieme le condizioni orotectoniche, furono meglio chiarite dopo che il Gastaldi ebbe il merito e la genialità di riconoscere e di sceverare nella compagine dei terreni delle Alpi stesse due grandi zone: l'inferiore detta dello gneiss centrale o degli elissoidi, e la superiore dei calcescisti, contraddistinta dalle pietre verdi. Nè il merito è attenuato dal fatto che il Gastaldi, suggestionato, si può dire, dalla prevalente cristallinità dei terreni delle due zone, dalle idee allora dominanti sulle cause del metamorfismo, ritenuto pressochè limitato ai terreni arcaici e del Paleozoico più antico, e dalle corrispondenze litologiche colla serie arcaica specialmente del Nord-America, abbia errato col riferimento fattone all'Arcaico ed al più antico Paleozoico: errore dimostrato dalle successive indagini e dalla scoperta di giacimenti di fossili mesozoici e dalle deduzioni che se ne dovettero trarre.

Anche il Sismonda riteneva che la maggior parte delle roccie cristalline stratiformi fossero sedimenti metamorfosati, osservando acutamente, a prova, che qua e là fra di esse sono intercalate roccie di evidente costituzione detritica; ed attribuiva al metamorfismo la scomparsa dei fossili dagli scisti cristallini. Per altro egli distingueva questi *gneiss di modificazione*, quelli stessi che fanno parte della zona detta dei calcescisti o delle pietre verdi e che riteneva di età giurassica, da altri *gneiss*, più profondi nella serie, che qualificava come *primitivi*. Furono certe sue scoperte di giacimenti con fossili giurassici, che lo indussero nell'inesattezza di ritenere d'età giurassica un complesso di terreni, che più esattamente avrebbe dovuto dire mesozoico, A parte questo meno esatto riferimento cronologico, del resto assai meno lontano dal vero che non fosse quello del Gastaldi, i concetti del Sismonda sono apprezzabili anche in confronto delle concezioni del suo collega. Nè è arrischiata l'opinione che la

Carta del SISMONDA, se non i suoi scritti, collo sviluppo in zona del *terreno giurassico metamorfico*, ch'essa presenta, e colla distribuzione e successione delle masse di *roccie primitive cristalline*, non sia estranea all'idea germogliata nella mente del Gastaldi sulla consistenza delle sue due zone e sulla loro fondamentale importanza nella costituzione e struttura dell'edificio alpino.

Ascanio Sobrero, nel discorso col quale commemorò alla Reale Accademia di Agricoltura i due colleghi ed amici suoi, SISMONDA e GASTALDI, perduti a distanza di pochi giorni, li riunì simpaticamente nel caldo elogio, tracciandone i profili, parlanti nel contrasto delle due figure di temperamento così diverso. Accennando egli delicatamente alle discrepanze ed agli apprezzamenti scientifici diversi che l'uno dall'altro distinguevano, soggiungeva giustamente, quasi a riconciliarli in morte: " non è a far meraviglia che questo fatto si avverasse; nè perciò la rinomanza del Sismonda andrà offuscata. Si pensi che la geologia è scienza moderna, e di rapidissimi progressi; che muta aspetto ogni giorno; che essa è scienza congetturale; che se il Sismonda prima si applicò allo studio del libro della natura, il trovò ancor vergine, mentre il Gastaldi, che a lui successe, potè giovarsi di quei maggiori lumi, che scaturivano dall'opera assidua di chi l'aveva preceduto ".

SISMONDA e GASTALDI furono soci della nostra Accademia, ed il primo vi tenne la carica di Segretario perpetuo: ma negli Atti accademici troviamo soltanto l'annuncio della loro morte col rimpianto del presidente per la grave perdita. Mancano le commemorazioni dirette a porre in rilievo le caratteristiche ed i meriti della attività scientifica dei due soci illustri; ed è per questa considerazione, che ho ritenuto opportuno di farne ora brevemente parola e di rendere omaggio alla loro memoria.

In sede degna, e vicini l'uno all'altro, stanno ora i busti dei due geologi nel nostro grande Museo di geologia e di paleontologia, che in massima parte è opera loro a prova del loro amore alla scienza e della loro illuminata liberalità. GASTALDI ci lasciò la sua ricca e preziosa collezione di fossili, e SISMONDA le collezioni litologiche e la raccolta sua di opere geologiche, con una miscellanea di memorie e di opuscoli rari d'importanza eccezionale; così come nel Museo di mineralogia, divenuto nelle mani del SISMONDA, affermò Q. Sella, uno dei più completi

e dei meglio ordinati d'Italia, sono apprezzatissimi ricordi di Lui i minerali ch'Egli raccolse e studiò e la parte mineralogica della sua biblioteca.

Mi compiaccio di questa occasione che la generosità dei donatori, ed il loro interessamento per una patria istituzione scientifica, mi ha offerto di ricordare i meriti e le benemerenze del Senatore ANGELO SISMONDA e del Conte LUIGI DI ROVASENDA. Viva riconoscenza io esprimo ancora ai donatori non solo nella mia qualità di direttore del Museo, ma anche come studioso della Scienza, a vantaggio della quale il SISMONDA ed il ROVASENDA volsero la loro mente e la loro attività di cultori appassionati e di ricercatori disinteressati.

Nelle passate generazioni le ricerche, gli studî, le collezioni nel campo della Storia Naturale, ed i viaggi con questi intenti esercitavano una attrattiva assai diffusa fra le persone colte e specialmente fra le ricche; e questo dilettantismo spesso creava dei naturalisti veri, i quali coi loro scritti e colle loro ricerche e raccolte rendevano segnalati servizi alla scienza: il nostro ROVASENDA ne fu un tipico esempio e campione. Dirò di più, questa generazione... spontanea di naturalisti veri fu nel secolo scorso il semenzaio di valorosi insegnanti di Storia Naturale nelle scuole medie ed anche nelle Università; anzi parecchi dei grandi maestri italiani, dei quali alcuni fondarono scuole rinomate nelle nostre Università, furono naturalisti autodidatti. Il SISMONDA ed il GASTALDI da giovani erano avviati l'uno all'esercizio della farmacia e l'altro all'avvocatura; ma vollero essere e furono geologi.

Questo tipo di naturalista va scomparendo, non solo perchè gli studî naturalistici si fanno sempre più rigorosamente scientifici e coordinati ad altre scienze in un indirizzo sintetico e filosofico, ma anche perchè nella tumultuosa vita odierna le necessità sociali, il bisogno fattosi più generale di rapidi guadagni, nonchè le esuberanti attrattive sportive, spingono i giovani a preferenza verso le applicazioni pratiche delle scienze, distogliendoli dallo studio delle scienze pure, segnatamente da quello delle Scienze naturali. Così si trascura, pur troppo anche per le limitazioni imposte, a questo riguardo, all'insegnamento medio, una fonte di alta coltura e di godimenti intellettuali, quali de-

rivano dalla conoscenza del mondo che ci circonda e delle sue meraviglie, dallo studio del suo passato e del suo divenire, dei fenomeni e delle leggi della vita, del coordinamento delle forze naturali e di tutto quanto eccita la ginnastica intellettuale e insegna e induce a meditare sulla realtà dei fatti. Nè abbastanza si considera che la scienza pura, nell'evolversi del pensiero e del sapere umano, segna il passo al progresso delle sue applicazioni pratiche, ed illumina nel tempo stesso le alte idealità. Ogni sforzo diretto a conservare alla Storia Naturale il prestigio di scienza altamente educatrice ed utile è per noi insegnanti un dovere; e, nel compimento di tale dovere, grande è l'aiuto che ci viene dal ricordo delle benemerenze e dall'esempio dei naturalisti che ci precedettero, e dall'interessamento degli intellettuali, che nello studio della nostra scienza riconoscono un necessario ed efficace fomito di coltura, di progresso e di ingentilimento dello spirito.

Sopra un caso particolare di un nuovo tipo di distorsioni elastiche che interessa alcuni problemi della pratica

Nota dell'Ing. PAOLO BONANNO
presentata dal Socio nazionale residente Somigliana

È noto che se si investono a forza l'uno sull'altro più tubi predisposti in modo che il diametro esterno iniziale di ciascuno di essi sia leggermente maggiore del diametro interno iniziale di quello che lo dovrà abbracciare, si determina nel complesso dei tubi così ottenuto uno stato di tensioni interne tale che tutte le fibre circolari del tubo interno risulteranno compresse, mentre quelle del tubo esterno saranno tutte tese; le fibre dei tubi intermedi saranno quindi in parte tese ed in parte compresse, procedendo dall'esterno verso l'interno.

Questo stato di tensioni interne, prodotto nel modo suddetto, dipende unicamente dalla differenza dei raggi iniziali delle superficie cilindriche che dovranno venire in perfetto contatto: è interessante quindi, dal punto di vista della pratica, stabilire un criterio che serva di base alla effettiva e diretta valutazione delle tensioni e delle compressioni che si sviluppano nei varî tubi, in funzione dell'accennata differenza di raggi.

Il problema che qui ci proponiamo di risolvere, comprende alcune importanti applicazioni a varî rami della tecnica: segnatamente nello studio della resistenza trasversale delle artiglierie (1),

(1) Una completa trattazione dell'argomento, che conduce per altra via a risultati sostanzialmente identici a quelli cui perveniamo nella presente Nota, è esposta dall'ing. G. Bianchi, *Teoria delle resistenze delle Artiglierie*. Ed. C. Pasta, Torino, 1911.

nel calcolo di un compressore ed infine nella moderna *blindatura* delle condotte forzate, la quale operazione consiste nell'applicare a caldo attorno al mantello della condotta dei cerchi aventi il diametro interno iniziale leggermente e costantemente più piccolo del diametro esterno della condotta.

Non c'intratterremo, per ragioni ovvie, nella discussione dei problemi tecnici testè accennati. Mentre ci riserviamo di ritornare, in altra parte, su qualcuno di detti problemi con qualche maggior dettaglio, ci limiteremo qui a risolvere il problema propostoci nella maniera più generale.

Consideriamo infatti due tubi cilindrici, coassiali, a sezione circolare, di eguale lunghezza e costituiti o no del medesimo materiale, che supporremo del resto elasticamente omogeneo per ciascuno dei due tubi.

Vedremo in seguito come il caso di un numero qualunque di tubi si riconduca a quello di due soltanto, che ora esaminiamo, invocando il principio della sovrapposizione degli effetti.

Indichiamo con σ_1, σ_2 e Σ rispettivamente: la superficie cilindrica esterna di raggio R_1, quella interna di raggio R_2 ed infine quella comune di contatto, di raggio R.

Sia poi ϵ la differenza iniziale, piccolissima, dei due raggi delle superficie sovrapposte alle due facce di Σ: chiameremo con α la faccia di Σ appartenente al tubo interno e con β la faccia opposta. Nella tecnica, alla differenza ϵ si dà il nome di *forzamento*.

È evidente che il complesso dei due tubi, investiti a forza l'uno dentro l'altro, e che quindi si trova in uno stato di tensione interna, può essere ricondotto al suo stato naturale praticando un taglio lungo la superficie cilindrica Σ ed asportando uno straterello cilindrico coassiale, di spessore costante ed eguale a ϵ.

Reciprocamente, lo stato di tensione interna che così abbiamo distrutto, lo si può identicamente riprodurre interponendo tra le due facce di contatto dei tubi, a partire dal loro stato naturale, un sottile strato cilindrico di spessore ϵ. Il problema propostoci equivale dunque a quello della determinazione della deformazione prodotta nei due tubi (a partire dal loro stato naturale) in virtù dello strato cilindrico di spessore ϵ. Una tale

deformazione dovrà far corrispondere, in omaggio alla realtà del fenomeno fisico, delle pressioni aventi la medesima intensità sulle due facce α e β di Σ; inoltre lo spostamento elastico che ne consegue dovrà essere continuo attraverso le fibre circolari dei due tubi, eccezion fatta per la fibra comune Σ, sulla quale lo spostamento elastico dovrà ammettere una discontinuità in direzione del raggio, costantemente eguale a ϵ in valore assoluto; infine le tensioni sulle superficie σ_1 e σ_2 limitanti il complesso e sulla base dei cilindri devono risultare nulle.

In altri termini, la deformazione cercata deve determinare uno stato di equilibrio elastico in assenza di forze di massa e di tensioni superficiali e deve far corrispondere allo spostamento elastico discontinuità assegnate sopra la superficie Σ, supponendo che le pressioni esercitantisi sulle due facce di Σ sieno eguali e di segno opposto.

Sotto questo punto di vista, il problema rientra in una questione più generale, ampiamente trattata dal prof. Somigliana, intorno alla possibilità ed all'esistenza di stati di tensione del tipo cui abbiamo or ora accennato e che ormai vanno compresi con il nome di *distorsioni elastiche di Somigliana* [2]; cosicchè la via che dobbiamo seguire per l'effettiva ricerca della soluzione del nostro problema è ormai nettamente tracciata.

Ed ecco in che modo procederemo.

Poichè i due tubi, in grazia della simmetria, si trovano uniformemente compressi sulle due facce α e β di Σ, gli spostamenti elastici che per ciascuno di essi verranno a determinarsi saranno espressi da funzioni del tipo [3]

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_r' &= Ar + \frac{B}{r} \\ w' &= e' z \end{aligned} \right.
$$

---

[2] C. Somigliana, *Sulle deformazioni elastiche non regolari.* "Atti del IV Congresso Intern. dei Matematici", Roma, aprile 1908.

Detto, *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* "Rend. Lincei", vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem. 1914, e vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem. 1915.

Detto, *Sulle discontinuità dei potenziali elastici.* "Atti R. Acc. Scienze di Torino", vol. 51, anno 1915-16.

[3] Vedi, ad es., H. Love, *On the math. theory of elasticity.* Cambridge, 1906, pag. 141.

per il tubo esterno, e

$$(2) \qquad \begin{cases} u_r'' = Cr + \frac{D}{r} \\ w'' = e'' z \end{cases}$$

per il tubo interno, ove A, B, C, D, e', e'' sono costanti arbitrarie da determinarsi con i dati del problema; u_r e w sono gli spostamenti elastici di un punto posto alla distanza r dall'asse dei due cilindri, che assumiamo per asse delle z, misurati rispettivamente nella direzione del raggio r e dell'asse z: l'origine coincida col punto di mezzo dell'asse dei due cilindri.

Denotando con P, incognita del nostro problema, l'intensità per unità d'area della pressione uniforme esercitantesi sulle due facce di Σ, le costanti suddette risultano legate dalle seguenti relazioni:

$$(a) \quad \begin{cases} A = \frac{R^2 P}{2(\lambda_1 + \mu_1)(R_1^2 - R^2)} - \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} e', \quad B = \frac{R_1^2 R^2 P}{2\mu_1 (R_1^2 - R^2)} \\ C = -\frac{R^2 P}{2(\lambda_2 + \mu_2)(R^2 - R_2^2)} - \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)} e'', \quad D = -\frac{R^2 R_2^2 P}{2\mu_2 (R^2 - R_2^2)} \end{cases}$$

nell'ipotesi, già espressa, che le pressioni delle superficie σ_1 e σ_2 sieno nulle e che non agiscano forze di massa.

Le costanti λ e μ sono le costanti dell'elasticità del materiale di cui sono costituiti i due tubi: esse sono espresse, in funzione del modulo di elasticità E e del coefficiente di Poisson η, dalle relazioni:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \eta = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Partendo dalle formole (1) e (2) è agevole ricavare, con le solite formule della teoria della elasticità, le tre componenti delle tensioni interne che si sviluppano in una fibra di raggio r.

Indicando rispettivamente con σ_r, σ_t e σ_z la tensione unitaria diretta secondo il raggio, quella tangenziale alla fibra ed infine quella, normale alle precedenti, e diretta secondo z, si perviene alle seguenti formole:

$$(3) \qquad \sigma_r' = \frac{R^2}{R_1^2 - R^2}\left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) P$$

$$(4) \qquad \sigma_t' = \frac{R^2}{R_1^2 - R^2}\left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right) P$$

$$(5) \qquad \sigma_z' = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{R^2 P}{R_1^2 - R^2} + \frac{\mu_1 (3\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_1 + \mu_1} e'$$

per il tubo esterno, e

$$(3') \qquad \sigma_r'' = - \frac{R^2}{R^2 - R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right) P$$

$$(4') \qquad \sigma_t'' = - \frac{R^2}{R^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right) P$$

$$(5') \qquad \sigma_z'' = - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot \frac{R^2 P}{R^2 - R_2^2} + \frac{\mu_2 (3\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_2 + \mu_2} e''$$

per il tubo interno.

Siccome sulle basi dei due cilindri non agisce nessuna forza superficiale, converrà imporre che le tensioni longitudinali σ_z' e σ_z'' date dalle (5) e (5′) sieno ovunque nulle, ciò che intanto ci fornisce le due equazioni

$$(6) \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{R^2 P}{R_1^2 - R^2} = - \frac{\mu_1 (3\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_1 + \mu_1} e'$$

$$(7) \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{R^2 P}{R^2 - R_2^2} = \frac{\mu_2 (3\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_2 + \mu_2} e'' .$$

Un'altra equazione si ricava esprimendo che la differenza degli spostamenti elastici radiali dei due tubi, in corrispondenza delle facce α e β di Σ, dev'essere eguale a ϵ, cioè scrivendo una condizione del tipo

$$u_r^{(\alpha)} - u_r^{(\beta)} = \epsilon .$$

I valori di $u_r^{(\alpha)}$ e $u_r^{(\beta)}$ si ricavano dalle prime delle (1) e (2) ponendo in esse $r = R$ e tenendo conto delle espressioni delle costanti A, B, C, D, e', e'' già determinate. Eseguendo la sostituzione, si perviene in definitiva alla equazione:

$$(8) \qquad R^3 \left[\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1 (3\lambda_1 + 2\mu_1)(R_1^2 - R^2)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2 (3\lambda_2 + 2\mu_2)(R^2 - R_2^2)} \right] + \\ + R \left[\frac{1}{\mu_1} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R^2} + \frac{1}{\mu_2} \frac{R_2^2}{R^2 - R_2^2} \right] = \frac{2\epsilon}{P}$$

la quale, unitamente alle (6) e (7) ed al gruppo (a), risolve completamente il problema.

Il massimo sforzo di tensione per il tubo esterno è sopportato dalla fibra di raggio R. Detto valore si ricava dalla (4) ponendo $r = R$ e tenendo presente la (8). Analogamente dalla (4') si ricava il valore massimo della compressione sopportata dalla fibra interna di raggio R_2. Indicando con T_{max} e P_{max} detti sforzi unitari di tensione e di compressione, ed introducendo i moduli di elasticità E_1 e E_2 dei due materiali ed i relativi coefficienti di Poisson η_1 e η_2, si ha:

$$(9) \qquad T_{\text{max}} = \frac{E_1 E_2 (R^2 - R_2^2)(R_1^2 + R^2) R \epsilon}{(R_1^2 - R^2)[(1-\eta_2) E_1 R^2 + (1+\eta_1) E_2 R_2^2] + (R^2 - R_2^2)[(1-\eta_1) E_2 R^2 + (1+\eta_2) E_1 R_2^2]}$$

$$(10) \qquad P_{\text{max}} = \frac{E_1 E_2 (R_1^2 - R_2^2)(R_2 + R_2^2) R \epsilon}{(R_1^2 - R^2)[(1-\eta_2) E_1 R^2 + (1+\eta_1) E_2 R_2^2] + (R^2 - R_2^2)[(1-\eta_1) E_2 R^2 + (1+\eta_2) E_1 R_2^2]}$$

Abbiamo esaminato il caso di due tubi soltanto, ma il procedimento da noi seguìto è valido qualunque sia il numero dei tubi.

Infatti, lo stato di deformazione che si crea in uno dei tubi, per esempio in quello interno, per il principio della sovrapposizione degli effetti, è eguale alla somma degli stati di deformazione corrispondenti ai varî forzamenti. Così, nel caso di tre tubi investiti a forza l'uno dentro l'altro, lo stato di deformazione relativo al tubo interno risulta punto per punto eguale alla somma degli stati di deformazione che si otterrebbero considerando separatamente il complesso dei primi due tubi e poscia l'insieme di questo complesso, supposto allo stato naturale, e del terzo tubo. Quest'ultima deformazione si può studiare analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso di due tubi soltanto; e supponendo che tutti e tre i tubi sieno costituiti di materiale differente l'uno dall'altro, avremo ancora che gli spostamenti elastici di ogni tubo saranno funzioni analoghe alle (1) e (2) e s'introdurranno così 9 costanti arbitrarie. Queste costanti risulteranno al solito determinate esprimendo che sulle superficie interna ed esterna limitanti l'insieme dei tre tubi si annullino le tensioni superficiali; come pure devono risultare nulle le tensioni sulle tre basi: con che si hanno in tutto 5 condizioni; le altre quattro si ricavano scrivendo che sulla superficie Σ di contatto fra il tubo interno e quello intermedio devono

essere continui tanto lo spostamento radiale quanto la pressione, mentre sulla superficie Σ' di contatto fra il tubo intermedio ed il terzo tubo deve risultare continua la pressione e lo spostamento radiale deve assumere la discontinuità assegnata, corrispondentemente al nuovo forzamento.

Nel caso generale di n tubi avremo $3n$ costanti arbitrarie e quindi $3n$ condizioni che le determinano.

Ritornando al caso di due tubi, e supposti entrambi costituiti dello stesso materiale, indicando con E, η le sue costanti elastiche si ricava dalla (8)

$$(8') \qquad P = \frac{1}{2} E \frac{(R_1^2 - R^2)(R^2 - R_2^2)}{R^3 (R_1^2 - R_2^2)} \epsilon \text{ (4)}$$

e le (8) e 10) divengono

$$(9') \qquad T_{\max} = \frac{1}{2} E \frac{(R^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)}{R (R_1^2 - R_2^2)} \epsilon$$

$$(10') \qquad P_{\max} = \frac{1}{2} E \frac{(R_1^2 - R^2)(R^2 + R_2^2)}{R (R_1^2 - R_2^2)} \epsilon .$$

In seguito, si hanno per le costanti e', e'' i valori

$$e' = -\eta \frac{R^2 - R_2^2}{R (R_1^2 - R_2^2)} \epsilon$$

$$e'' = \eta \frac{R_1^2 - R^2}{R (R_1^2 - R_2^2)} \epsilon .$$

Perciò, nel caso considerato che i tubi sieno dello stesso materiale, il tubo esterno *si accorcia* di

$$\eta \frac{R^2 - R_2^2}{R (R_1^2 - R_2^2)} l \epsilon$$

---

(4) L'espressione di P data dalla (8′) coincide perfettamente con quella esposta a pag. 27 della citata opera del BIANCHI, *Teoria delle resistenze delle Artiglierie*.

mentre quello interno *si allunga* di

$$\eta \frac{R_1^2 - R^2}{R(R_1^2 - R_2^2)} l \epsilon$$

essendo l la lunghezza iniziale dei due cilindri.

Gli spostamenti elastici espressi dalle (1) e (2) divengono allora:

$$(1') \quad \begin{cases} u_r' = \dfrac{(R^2 - R_2^2)\epsilon}{2R(R_1^2 - R_2^2)} \left[(1-\eta) r + \dfrac{1+\eta}{r}\right] \\ w' = -\eta \dfrac{(R^2 - R_2^2)\epsilon}{R(R_1^2 - R_2^2)} z \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} u_r'' = -\dfrac{(R_1^2 - R^2)\epsilon}{2R(R_1^2 - R_2^2)} \left[(1-\eta) r + \dfrac{1+\eta}{r}\right] \\ w'' = \eta \dfrac{(R_1^2 - R^2)\epsilon}{R(R_1^2 - R_2^2)} z \end{cases}$$

ed esse corrispondono appunto ad una distorsione di Somigliana determinata dalla discontinuità ϵ dagli spostamenti elastici radiali attraverso la superficie Σ di contatto dei due cilindri.

Un'osservazione resta ancora da fare. Perchè gli spostamenti elastici espressi dalle (1') e (2') corrispondano ad una distorsione di Somigliana è necessario che sia verificata al contorno del complesso costituito dai due cilindri una certa relazione integrale che ho segnalata in una mia Nota apparsa in questi *Atti* (5), pel caso dei corpi elasticamente omogenei. La relazione alla quale alludiamo è la seguente:

$$(11) \qquad \int_\sigma \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\Sigma \boldsymbol{u}_P \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma$$

in cui $\boldsymbol{s}$ è il vettore spostamento elastico relativo alla distorsione che si considera; $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario normale al contorno σ del corpo, diretto positivamente verso l'interno di esso;

---

(5) P. Bonanno, *Contributo alla teoria delle distorsioni elastiche*. “Atti R. Acc. Scienze di Torino„, vol. 59, adunanza 16 marzo 1924, disp. 9ª.

Σ la superficie lungo la quale si deve intendere tagliato il corpo per ricondurlo al suo stato naturale; $\boldsymbol{v}$ un vettore unitario normale alla faccia α di Σ, positivo verso l'interno del corpo, ed infine $\boldsymbol{u}_P$ un vettore variabile, funzione del punto P di Σ e che rappresenta la discontinuità dello spostamento elastico $\boldsymbol{s}$ attraverso Σ.

Nel nostro caso il vettore discontinuità $\boldsymbol{u}_P$ risulta composto di due vettori componenti: uno diretto radialmente dalla faccia α verso la faccia β di Σ e di grandezza costante ϵ, l'altro, parallelo all'asse z, misurato dalla differenza

$$w' - w'' = -\eta \frac{\epsilon}{R} z .$$

Il vettore $\boldsymbol{s}$ ha per componenti, secondo il raggio e secondo l'asse z, le espressioni date dalle (1') e (2'). Sostituendo quindi nella (11) ed eseguendo le integrazioni si trova che essa risulta pienamente verificata.

Gli spostamenti (1') e (2') corrispondono dunque all'effettiva distorsione di Somigliana che risolve il nostro problema.

Intorno all'espressione d'un complesso, funzione di variabile reale, in uno spazio ad n dimensioni

Nota di F. TAVANI
presentata dal Socio naz. resid. Pochettino

I. — Sia $F(t)$ un complesso funzione della variabile reale t, e tale che verifichi le condizioni perchè possa svilupparsi secondo una serie di Taylor (1):

$$(1) \quad F(t+h) = F(t) + hF'(t) + \frac{h^2}{2!} F''(t) + \dots \frac{h^n}{n!} [F^{(n)}(t) + k]$$

dove k è un complesso infinitesimo con h.

Da questa mi propongo dedurre uno sviluppo che rappresenti il complesso, in uno spazio ad n dimensioni.

Dinotiamo con I_1, I_2, $I_3 \dots I_n$ la seguenza di n vettori, ciascuno dei quali abbia per modulo l'unità, e sia perpendicolare a tutti i vettori che lo precedono nella seguenza. Ammettiamo inoltre che queste relazioni si mantengano, mentre i vettori variano come funzione della variabile reale, t.

Ciò s'esprime analiticamente mediante le relazioni seguenti nelle quali il simbolo d'operazione : | è quello del prodotto interno fra due vettori, esteso a vettori in uno spazio ad n dimensioni (2):

---

(1) V. *Analisi infinitesimale*, Prof. G. Peano, vol. II, pag. 85.

(2) V. *Philosophical Magazine*, aprile 1921, pag. 267, nota dell'autore " motion and Hyperdimensions ".

$$(A)\quad \begin{cases} I_2 \mid I_1 = 0 \\ I_3 \mid I_1 = 0 \quad I_3 \mid I_2 = 0 \\ I_4 \mid I_1 = 0 \quad I_4 \mid I_2 = 0 \quad I_4 \mid I_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

dalle quali s'ottiene per derivazione:

$$(A')\quad \begin{cases} I_2' \mid I_1 = -I_2 \mid I_1' \\ I_3' \mid I_1 = -I_3 \mid I_1' \quad I_3' \mid I_2 = -I_3 \mid I_2' \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

a queste s'aggiunga:

$$(B)\quad I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 \dots = I_n^2 = 1$$

dalle quali segue per derivazione:

$$(B')\quad I_1' \mid I_1 = 0 \quad I_2' \mid I_2 = 0 \quad I_3' \mid I_3 = 0 \dots I_n' \mid I_n = 0.$$

II. — Assegniamo al complesso $F(t)$ il significato d'un punto mobile P, funzione della variabile reale t (tempo), e che si muova in uno spazio ad n dimensioni, secondo le quali sono diretti i vettori $I_1, I_2, I_3 \dots I_n$.

In questo modo abbiamo esteso ad uno spazio ad n dimensioni, quelle relazioni, valide per lo spazio di tre dimensioni, che servono a stabilire la relazione

$$(2)\quad \frac{d^3P}{dt^3} = \left(v'' - \frac{v^3}{\rho^2}\right) I_1 + \left(\frac{3vv'}{\rho} - \frac{v^2}{\rho^2}\rho'\right) I_2 + \frac{v^3}{\rho\rho_1} I_3 \text{ (1)}.$$

È appunto la generalizzazione del metodo seguìto per ottenere la relazione anzidetta, che conduce alla formula più generale:

$$(3)\quad \frac{d^nP}{dt^n} = \sum_{n=1}^{n} \Phi_n(v, \rho) I_n \text{ (2)}.$$

---

(1) V. *Analisi infinitesimale*, Prof. G. Peano, vol. II, pag. 103.

(2) V. *Philosophical Magazine*, loc. cit.

I dettagli del metodo seguìto per giungere a questa relazione trovansi in una nota pubblicata nel “ Philosophical Magazine „.

Di questi ne richiamerò soltanto alcuni.

I vettori I_1 I_2 I_3, hanno ivi un significato analogo a quello che hanno nello spazio ordinario, cioè di tangente, normale e binormale alla curva descritta dal punto P. Inoltre delle relazioni seguenti, valide per lo spazio ordinario:

$$I_1 = \frac{P'}{\operatorname{mod} P'} \quad \text{e} \quad \left\{ I_2 = \frac{I_1'}{\operatorname{mod} I_1'}, \qquad I_2 = \frac{I_3'}{\operatorname{mod} I_3'} \right\} \text{ (1)}.$$

la prima rimane intatta, ed il gruppo delle altre due diventa per uno spazio ad n dimensioni:

$$\text{(C)} \quad \left\{ I_{n-1} = \frac{I_1'}{\operatorname{mod} I_1'}, \qquad I_{n-1} = \frac{I_2'}{\operatorname{mod} I_2'}, \qquad I_{n-1} = \frac{I_3'}{\operatorname{mod} I_3'} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots I_{n-1} = \frac{I_n'}{\operatorname{mod} I_n'} \right\}.$$

Il segno d'eguaglianza fra queste equazioni indica il parallelismo fra quantità vettoriali di modulo uno ed il significato geometrico di questo parallelismo non è che un'estensione di quello, facile a concepire, fra I_2 ed I_1', I_2 ed I_3' nello spazio ordinario.

Il significato geometrico delle quantità I_1' I_2' I_3'... I_n' viene stabilito mediante il concetto di curvatura e d'indicatrice sferica. L'estensione di questi concetti ad uno spazio di n dimensioni non offre nessuna difficoltà, ed essa ci conduce direttamente alla relazione:

$$\text{(C}_1\text{)} \qquad \rho_n = \frac{v}{\operatorname{mod} I_n'}$$

nella quale v è la velocità di P ossia $|P'|$ e ρ_n indica la curvatura, che corrisponde all'arco descritto sulla sfera indicatrice dal vettore parallelo al vettore I_n.

Sostituendo nei secondi membri delle equazioni (A') i valori

(1) V. *Philosophical Magazine,* loc. cit.

forniti dalla (C) per $I_1', I_2', I_3' \dots I_n'$ e facendo uso della relazione c' si ottiene la relazione generale:

$$(4) \qquad I'_{n-1} = \sum_{m=1}^{m=n} \left(-\frac{v}{\rho_m} I_m \right) + \frac{v}{\rho_{n-1}} I_{n-1}$$

la quale non è altro che la relazione generalizzata delle

$$I_2' = -\frac{v}{\rho_1} I_1 - \frac{v}{\rho_3} I_3, \qquad \text{ed} \qquad I_1' = \frac{v}{\rho_1} I_2 \ (^1).$$

III. — L'importanza di queste relazioni consiste in ciò che esse esprimono la variazione di un vettore diretto secondo la dimensione (n — 1$^{\text{esima}}$), in funzione di quello diretto secondo la dimensione n^{esima}.

Approfittando di questo fatto si possono esprimere le derivate successive di P col seguente procedimento:

Si formino le derivate successive di P partendo da

$$\frac{dP}{dt} = v I_1$$

e dopo ciascuna derivazione si sostituisca alla derivata del vettore d'indice p la sua espressione in funzione del vettore d'indice $p + 1$, ossia di quello perpendicolare a tutti i vettori precedenti, si giunge così all'espressione (2) della derivata $\frac{d^4P}{dt^4}$.

Non insisteremo sui dettagli di questo procedimento, già esposti in un'altra nota.

L'espressione di $\frac{d^3P}{dt^3}$ ricordata di sopra non è che un'illustrazione ovvia di questo procedimento, e da questa è facile passare, ripetendo lo stesso procedimento, all'espressione di $\frac{d^4P}{dt^4}$ cioè:

$$\frac{d^4P}{dt^4} = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_4 I_4$$

ove la derivata 4ª viene espressa in funzione dei vettori diretti in 4 dimensioni nel modo analogo a quello in cui la $\frac{d^3P}{dt^3}$ viene

(1) V. Peano, loc. cit., pag. 97 e 103, vol. II.

espressa in funzione dei vettori, diretti secondo le tre dimensioni, indicate dalla tangente, normale e binormale alla curva di P in uno spazio ordinario. I coefficienti dell'espressione di $\frac{d^3P}{dt^3}$ sono ben noti. Quelli per l'espressione di $\frac{d^4P}{dt^4}$ sono:

$$\alpha_1 = \left\{ \left(v'' - \frac{v^3}{\rho_1^2} \right)' - \frac{3v^2v'}{\rho^2} + \frac{v^3}{\rho_1^3}\rho_1' + \frac{v^4}{\rho_1^2\rho_3} \right\}$$

$$\alpha_2 = \left\{ \frac{vv''}{\rho_1} - \frac{v^4}{\rho_1^3} + \left(\frac{3vv'}{\rho_1} - \frac{v^2}{\rho_1^2}\rho_1' \right)' + \frac{v^4}{\rho_1\rho_2\rho_3} \right\}$$

$$\alpha_3 = \left\{ -\frac{3v^2v'}{\rho_1\rho_3} + \frac{v^3}{\rho_1^2\rho_3}\rho_1' - \left(\frac{v^3}{\rho_1\rho_3} \right)' \right\}$$

$$\alpha_4 = \frac{v^4}{\rho_1\rho_3\rho_4}$$

stabiliti secondo il processo suddetto, cioè derivando l'espressione di $\frac{d^3P}{dt^3}$ e sostituendovi ai valori di I_1' I_2' I_3' quelli espressi in funzione di I_2 I_3 I_4 dati dalla (4).

IV. — Giunti a tal punto è facile applicare l'espressione generale di $\frac{d^nP}{dt^n}$ data dalla (2) allo sviluppo di Taylor, indicato dalla (1), affine d'ottenere uno sviluppo ordinato secondo i vettori: I_1 I_2 $I_3 \dots I_n$.

Infatti la formola generale (2) applicata al caso di $n = 1, 2, 3, 4 \dots n$, fornisce le derivate successive di P:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha_1 I_1 , \qquad \frac{d^2P}{dt^2} = \beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 ,$$

$$\frac{d^3P}{dt^3} = \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \gamma_3 I_3 , \qquad \frac{d^4P}{dt^4} = \eta_1 I_1 + \eta_2 I_2 + \eta_3 I + \eta_4 I_4 ,$$

$$\frac{d^nP}{dt^n} = \ni_1 I_1 + \ni_2 I_2 + \ni_3 I_3 + \dots \ni_n I_n ,$$

dove i coefficienti di ciascuno sviluppo sono funzioni elementari della velocità di P, delle curvature ρ_1 ρ_2 $\rho_3 \dots \rho_n$ e loro derivate e sono ottenuti, come si è già spiegato, derivando i coefficienti della derivata d'ordine immediatamente inferiore, sostituendo quindi alle derivate I_1' I_2' $I_3' \dots$ i loro valori dati in funzione di I_2 I_3 I_4 secondo la relazione (4).

Sostituiamo alle derivate successive nello sviluppo di Taylor i valori anzidetti ed ordiniamo i termini, aggruppandoli secondo $I_1\ I_2\ I_3 \dots I_n$ si otterrà:

$$\text{(D)} \qquad F(h+t) = F(t) + \left(h\alpha_1 + \frac{h^2}{2}\beta_1 + \frac{h^3}{3!}\gamma_1 + \dots \frac{h^n}{n!}\ni_1\right) I_1 + \\ + \left(\frac{h^2}{2}\beta_2 + \frac{h}{3!}\gamma_2 + \dots \frac{h^n}{n!}\ni_2\right) I_2 + \left(\frac{h^3}{3!}\gamma_3 + \dots \frac{h^n}{n!}\ni_3\right) I_3 + \dots \\ + \frac{h^n}{n!}\ni_n I_n + \frac{h^n}{n!}k\,.$$

dove la legge di formazione di coefficienti è ovvia.

Questo è lo sviluppo a cui si voleva giungere.

Questo sviluppo è un complesso d'ordine n, distribuito secondo le dimensioni d'uno spazio n-dimensionale, ciascun termine rappresenta la componente del complesso in una delle dimensioni e ciascun coefficiente è la coordinata secondo la medesima.

Il fatto che il primo membro può rappresentare una quantità fisica ed il secondo membro ne rappresenta la distribuzione in un iperspazio ipotetico, costruito per una pura astrazione matematica, ci suggerisce alcune riflessioni:

Prendendo lo sviluppo suddetto (D) fino alla terza dimensione, e fino alla quarta avremo per la quantità: $|F(h+t) - F(t)|$ le due espressioni:

$$\text{(E)} \qquad \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

$$\text{(E}_1\text{)} \qquad \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_4^2}.$$

Ora nell'ipotesi che $F(t)$ essendo una quantità fisica, il valore di $|F(h+t) - F(t)|$ possa esserci fornito dall'osservazione, questo valore sarà comparabile con quello fornito dalle due formole (E) ed (E_1). Ora la formola (E_1) contiene la coordinata B_4 corrispondente alla 4ª dimensione indicata dal vettore I_4, ne seguirà quindi che se la formola E_1 fornisce un valore più vicino a quello osservato che la formola (E), ciò dovrà interpretarsi come l'effetto della coordinata corrispondente alla quarta dimensione. Di qui si ricava un metodo per verificare se l'iperspazio nel modo concepito da Riemann sia un ente fisico, oppure una mera astrazione matematica.

Il concetto d'iperspazio qui usato è quello stesso di Riemann [1]. Solo che mentre Riemann estese il sistema d'assi cartesiani ad n dimensioni, in questa nota io ho generalizzato ad n dimensioni il sistema: (T, N, B) - tangente - normale - binormale.

Nel campo poi della dinamica estesa allo spazio ad n dimensioni, la formola (2) fornisce un mezzo di calcolare le coordinate d'un vettore $\vec{q}$ esteso ad uno spazio ad n dimensioni e rappresentabile coll'espressione:

$$\vec{q} = q_1 I_1 + q_2 I_2 + q_3 I_3 + \ldots + q_n I_n \text{ [2]}.$$

---

[1] RIEMANN, *Ueber die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen*, 1867.
[2] V. COFFIN, *Vector Analysis*, pag. 204.

Sull'equilibrio di travature reticolari elastiche iperstatiche

Nota dell'Ing. OTTORINO SESINI

Presentata dal Socio nazionale residente C. Guidi.

Abbiasi una travatura reticolare nello spazio, formata di n nodi, numerati in un dato ordine da 1 ad n, aventi coordinate $x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n$, rispetto a tre assi cartesiani ortogonali x, y, z, e riuniti fra loro da a aste, articolate a cerniera alle estremità, pure numerate da 1 ad a, lunghe rispettivamente $l_1, l_2, \dots l_a$. I nodi siano caricati da forze esterne, e siano precisamente X_i. Y_i, Z_i, le componenti secondo gli assi coordinati, della forza applicata al nodo i^{mo}.

I nodi, od alcuni di essi, siano inoltre soggetti a vincoli, riducibili ad a' vincoli semplici (non più di 3 per ogni nodo), pure numerati da 1 ad a'.

Per l'asta generica m^{ma}, congiungente i nodi i^{mo} e k^{mo}, posto:

$$f_m = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - l_m^2;$$

deve essere soddisfatta l'equazione:

$$f_m = 0.$$

Le coordinate del nodo i^{mo}, costretto a mantenersi su di una superficie costituente il vincolo semplice h^{mo} dovranno soddisfare all'equazione:

$$\varphi_h\,(x_i, y_i, z_i) = 0.$$

Se con S_m indichiamo lo sforzo nell'asta generica m^{ma} (positivo se di tensione, negativo se di compressione), e con R_h la reazione esercitata dal vincolo h^{mo} sul nodo da essa vincolato

(assunto come senso positivo sulla normale al vincolo, secondo la quale agisce la R_h, quello diretto verso la regione in cui è $\varphi_h < 0$), le $3n$ equazioni di equilibrio che fornisce la statica dei sistemi rigidi, per la determinazione delle S e delle R, sono notoriamente le seguenti:

$$(1)\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{S_1}{2l_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{S_2}{2l_2}+\dots+\frac{\partial f_a}{\partial x_1}\frac{S_a}{2l_a}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{R_1}{\lambda_1}+\dots+\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial x_1}\frac{R_{a'}}{\lambda_{a'}}=X_1\\
\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{S_1}{2l_1}+\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{S_2}{2l_2}+\dots+\frac{\partial f_a}{\partial y_1}\frac{S_a}{2l_a}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\frac{R_1}{\lambda_1}+\dots+\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial y_1}\frac{R_{a'}}{\lambda_{a'}}=Y_1\\
\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{S_1}{2l_1}+\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\frac{S_2}{2l_2}+\dots+\frac{\partial f_a}{\partial z_1}\frac{S_a}{2l_a}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\frac{R_1}{\lambda_1}+\dots+\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial z_1}\frac{R_{a'}}{\lambda_{a'}}=Z_1\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{S_1}{2l_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{S_2}{2l_2}+\dots+\frac{\partial f_a}{\partial x_2}\frac{S_a}{2l_a}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{R_1}{\lambda_1}+\dots+\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial x_2}\frac{R_{a'}}{\lambda_{a'}}=X_2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\frac{S_1}{2l_1}+\frac{\partial f_2}{\partial z_n}\frac{S_2}{2l_2}+\dots+\frac{\partial f_a}{\partial z_n}\frac{S_a}{2l_a}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n}\frac{R_1}{\lambda_1}+\dots+\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial z_n}\frac{R_{a'}}{\lambda_{a'}}=Z_n
\end{array}\right.$$

avendo posto $\lambda_h^2=\left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial z_i}\right)^2$, dove x_i, y_i, z_i sono le coordinate del nodo vincolato dal vincolo h^{mo}.

Per una deformazione della travatura, piccolissima e compatibile coi vincoli esterni, fra le variazioni prime delle coordinate dei nodi (che per il nodo generico i^{mo} indichiamo con δx_i, δy_i e δz_i) e gli incrementi delle lunghezze delle aste (che per l'asta generica m^{ma} indichiamo con δl_m) sussistono notoriamente le $a+a'$ relazioni seguenti:

$$(2)\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{2l_1}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\delta y_1}{2l_1}+\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\delta z_1}{2l_1}+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\frac{\delta z_n}{2l_1}=\delta l_1\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{2l_2}+\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\delta y_1}{2l_2}+\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\frac{\delta z_1}{2l_2}+\dots+\frac{\partial f_2}{\partial z_n}\frac{\delta z_n}{2l_2}=\delta l_2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial f_a}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{2l_a}+\frac{\partial f_a}{\partial y_1}\frac{\delta y_1}{2l_a}+\frac{\partial f_a}{\partial z_1}\frac{\delta z_1}{2l_a}+\dots+\frac{\partial f_a}{\partial z_n}\frac{\delta z_n}{2l_a}=\delta l_a\\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{\lambda_1}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\frac{\delta y_1}{\lambda_1}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\frac{\delta z_1}{\lambda_1}+\dots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\frac{\delta z_n}{\lambda_1}=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{\lambda_{a'}}+\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial y_1}\frac{\delta y_1}{\lambda_{a'}}+\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial z_1}\frac{\delta z_1}{\lambda_{a'}}+\dots+\frac{\partial \varphi_{a'}}{\partial z_n}\frac{\delta z_n}{\lambda_{a'}}=0.
\end{array}\right.$$

La matrice dei coefficienti delle S e delle R nelle (1), e quella dei coefficienti delle δx, δy, δz, nelle (2), si ottengono l'una dall'altra scambiando le righe colle colonne.

Indicando brevemente con c_{11}, c_{12} ... $c_{1\,a+a'}$, i coefficienti delle S e delle R nella prima delle (1); con c_{21}, c_{22} ... $c_{2\,a+a'}$ i corrispondenti coefficienti nella 2ª delle (1), e così di seguito, le matrici suddette si possono scrivere come segue:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1\,a} & c_{1\,a+1} & \cdots & c_{1\,a+a'} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2\,a} & c_{2\,a+1} & \cdots & c_{2\,a+a'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{3n\,1} & c_{3n\,2} & \cdots & c_{3n\,a} & c_{3n\,a+1} & \cdots & c_{3n\,a+a'} \end{vmatrix}$$

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{3n\,1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{3n\,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1\,a} & c_{2\,a} & \cdots & c_{3n\,a} \\ c_{1\,a+1} & c_{2\,a+1} & \cdots & c_{3n\,a+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1\,a+a'} & c_{2\,a+a'} & \cdots & c_{3n\,a+a'} \end{vmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le (1) ammettano sempre soluzioni, qualunque siano i valori delle $X_1 \dots Z_n$, (ossia perchè vi sia sempre possibilità di equilibrio) è che sia $a+a' \geq 3\,n$, e la matrice (3) dei coefficienti abbia caratteristica massima, cioè $3\,n$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè la soluzione sia unica e determinata, per $X_1 \dots Z_n$ arbitrarie, è che sia $3_n = a + a'$ e che il determinante (3) sia diverso da 0.

Considerando invece le (2), posto in esse $\delta l_1, = \delta l_2 = \dots = \delta l_a = 0$, ossia supposte le aste rigide, sappiamo che se la caratteristica della matrice (4) è minore di $3n$, esistono soluzioni del sistema (2), diverse da $\delta x_1 = \delta y_1 = \dots = \delta z_n = 0$, ossia

la travatura può subire deformazioni, pur restando inalterate le lunghezze delle aste; la travatura è deformabile.

Se invece la caratteristica della matrice (4) è uguale a $3n$ (ossia è $a + a' \geq 3n$, e la matrice ha caratteristica massima) l'unica soluzione del sistema (2), posto in esso

$$\delta l_1 = \delta l_2 = \ldots = \delta l_a = 0,$$

è data da:

$$\delta x_1 = \delta y_1 = \ldots = \delta z_n = 0.$$

La travatura è indeformabile.

Perchè la travatura sia indeformabile col minor numero di aste possibile, ossia perchè essa sia strettamente indeformabile, deve essere $3n = a + a'$, ed il determinante (4) non deve essere nullo.

Si deducono così le note corrispondenze fra le condizioni di equilibrio statico e quelle geometriche di indeformabilità:

Possibilità di equilibrio con forze esplicite qualsiansi, equivale ad indeformabilità del sistema.

Un sistema staticamente determinato è strettamente indeformabile, e viceversa.

Quando $3n = a + a'$, i determinanti (3) e (4) differiscono dal noto determinante del Föppl solo per fattori che moltiplicano tutti gli elementi di una stessa riga o colonna, e per la presenza dei termini relativi ai vincoli esterni (ultime a' colonne del determinante (3) ed ultime a' righe del determinante (4)), che, per maggior generalità, si sono considerati insieme coi vincoli interni.

Vediamo ora quel che avviene se, invece di riguardare le aste come indeformabili, le supponiamo suscettibili di allungamenti elastici, funzioni lineari degli sforzi da esse sopportati, e precisamente poniamo $\delta l_m = \epsilon_m S_m + \alpha_m$ essendo ϵ ed α piccolissimi, noti e costanti per ciascuna asta (*).

Con questa ipotesi le (2), sostituendo in esse ai δl i corrispondenti $\epsilon S + \alpha$ e trasportando i termini ϵS nei primi membri,

(*) ϵ_m è l'allungamento elastico per uno sforzo $S_m = 1$; α_m è una variazione di lunghezza indipendente dallo sforzo, quale potrebbe essere quella dovuta ad una variazione di temperatura.

vengono a formare un sistema di $a + a'$ equazioni, contenenti non solo le δx, δy, e δz, ma anche le S.

Riunendo le (1) colle (2) così modificate, si ottiene un sistema di $3n + a + a'$ equazioni nelle $a + a' + 3n$ incognite $S_1, \dots S_a$ $R_1 \dots R_{a'}$ $\delta x_1 \dots \delta z_n$.

I secondi membri delle prime $3n + a$ equazioni sono arbitrari (forze esplicite ed allungamenti iniziali o termici delle aste); quelli delle ultime a' equazioni sono nulli.

Il determinante dei coefficienti delle S, R, δx, δy, δz, è il seguente:

$$(5)\quad \begin{vmatrix}
c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1a} & c_{1\,a+1} & \dots & c_{1\,a+a'} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2a} & c_{2\,a+1} & \dots & c_{2\,a+a'} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
c_{3n\,1} & c_{3n\,2} & \dots & c_{3n\,a} & c_{3n\,a+1} & \dots & c_{3n\,a+a'} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\epsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{11} & c_{21} & \dots & c_{3n\,1} \\
0 & \epsilon_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{12} & c_{22} & \dots & c_{3n\,2} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & \epsilon_a & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{1\,a} & c_{2\,a} & \dots & c_{3n\,a} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{1\,a+1} & c_{2\,a+1} & \dots & c_{3n\,a+1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{1\,a+a'} & c_{2\,a+a'} & \dots & c_{3n\,a+a'}
\end{vmatrix}$$

Gli elementi comuni alle prime $3n$ righe, ed alle ultime $3n$ colonne, sono tutti nulli; nel determinante formato dagli elementi comuni alle prime $a + a'$ colonne ed alle ultime $a + a'$ righe, sono diversi da 0 solo i primi a elementi della diagonale principale.

Condizione necessaria e sufficiente perchè, per un sistema dato di forze esplicite e di allungamenti iniziali delle aste, il problema ammetta una soluzione unica e determinata, è che sia diverso da 0 il determinante (5).

Se la matrice formata dagli elementi comuni alle prime $3n$ righe ed alle prime $a + a'$ colonne, ossia la matrice (3), ha caratteristica minore di $3n$, il determinante (5) è certamente nullo, perchè le sue prime $3n$ righe non hanno caratteristica massima.

Questo caso implica, come abbiamo detto, deformabilità del sistema, perciò impossibilità fisica di equilibrio, con forze esplicite arbitrarie.

Se invece la matrice suddetta ha caratteristica $3n$, e si suppone che le ϵ siano tutte diverse da 0, e positive, che per ciascun nodo non vi siano più di tre vincoli semplici e che tali vincoli siano tra loro indipendenti (cioè che l'effetto di uno non possa equivalere a quello di uno o due altri), si può dimostrare che il determinante (4) è sempre diverso da 0.

Infatti, supponiamo dapprima che sia $a + a' = 3n$; il determinante (5) è allora evidentemente uguale al prodotto dei due determinati (3) e (4) che, per ipotesi, sono diversi da 0.

Supponiamo invece che sia $(a + a') > 3n$. Il determinante (5), come si può vedere sviluppandolo secondo i minori contenuti nelle prime $a + a'$ colonne, risulta allora uguale alla somma di tutti i prodotti che si ottengono moltiplicando $a + a' - 3n$ delle ϵ tra di loro, e per il quadrato del minore formato dagli elementi comuni alle prime $3n$ righe (od alle ultime $3n$ colonne) ed a quelle tra le prime $a + a'$ colonne (od alle ultime $a + a'$ righe) che non contengono le ϵ sopra dette.

Basterà quindi dimostrare che tali prodotti, nessuno dei quali è negativo, essendo le ϵ tutte positive, non sono tutti nulli.

Anzitutto è evidente che di ϵ, diverse da 0, se ne possono sempre trovare $a + a' - 3n$, perchè abbiamo supposto che le ϵ non nulle siano in numero uguale ad a, e che sia $a' \leq 3n$.

Resta da dimostrare che fra i minori che si ottengono dalle prime $3n$ righe del determinante (5), ossia della matrice (3), sopprimendo $a + a' - 3n$ colonne, scelte fra le prime a, almeno uno è diverso da 0.

Osserviamo a questo scopo che la matrice formata dalle colonne $(a + 1)^{ma} \dots (a + a')^{ma}$ della matrice (3), cioè formata dai coefficienti delle R nelle (1), ha caratteristica a' (massima).

Infatti, esaminando la formazione di detta matrice, si vede che in essa, per ogni nodo soggetto ad un vincolo semplice, compaiono, in una stessa colonna 3 elementi (coseni direttori della normale al vincolo) necessariamente non tutti nulli, mentre gli altri elementi della stessa colonna e delle stesse 3 righe, sono tutti nulli.

Per ogni nodo soggetto a 2 (o 3) vincoli semplici, gli elementi (coseni direttori delle normali ai vincoli) comuni alle 3 righe corrispondenti a quel nodo, ed alle 2 (o 3) colonne riferentisi ai 2 (o 3) vincoli semplici, formano una matrice che ha certamente caratteristica 2 (o 3), altrimenti i vincoli non sarebbero, come abbiamo supposto, indipendenti.

Tutti gli altri elementi delle medesime tre righe, e quelli delle medesime 2 (o 3) colonne, sono nulli.

Si può dunque per ogni vincolo semplice trovare una riga contenente uno ed uno solo elemento non nullo. Per ogni vincolo doppio (o triplo) si possono trovare 2 (o 3) righe contenenti uno ed uno solo minore di ordine 2 (o 3) non nullo;

Siccome le righe e le colonne alle quali appartengono tali minori sono tutte diverse, se si forma un determinante di ordine a', colle a' righe così scelte, si vede facilmente che esso risulta uguale al prodotto dei sopradetti elementi e minori di ordine 2 e 3 che sono tutti diversi da 0.

Colle ultime a' colonne della matrice (3) si può dunque formare un minore M di ordine a', diverso da zero.

Se è $a' = 3n$ (caso particolare in cui tutti i nodi sono fissi), M è già di per sè un minore non nullo ottenuto dalla matrice (3) sopprimendo le $a + a' - 3n = a$ prime colonne.

Se $a' < 3n$, orlando il determinante M con un'altra riga e con un'altra colonna della matrice (3), si deve poter ottenere un altro minore di detta matrice, di ordine $a' + 1$, diverso da 0, perchè, se ciò non fosse possibile, per il teorema di Kronecker, la caratteristica della matrice (3) sarebbe $a' < 3n$, contrariamente all'ipotesi fatta.

Se $a' + 1 < 3n$, orlando il nuovo minore con un'altra riga e con un'altra colonna della matrice (3), si può sempre ottenere, per la ragione già detta, un minore di ordine $a' + 2$ diverso da 0; così procedendo si può sempre giungere ad ottenere un minore della matrice (3) di ordine $3n$, diverso da 0, e contenente tutti gli elementi delle ultime a' colonne.

In altre parole esiste un minore di ordine $3n$, diverso da 0, ottenuto dalla matrice (3) sopprimendo in essa $a + a' - 3n$ colonne, scelte fra le prime a.

Con ciò resta dimostrato che il determinante (5) è diverso da 0, ossia che in tutti i casi nei quali la statica dei sistemi

rigidi ci dice che vi è possibilità di equilibrio, l'introduzione dell'ipotesi di allungamenti elastici delle aste, funzioni lineari dei rispettivi sforzi, rende sempre la soluzione del problema unica e determinata, purchè naturalmente non vi siano per nessun nodo condizioni di vincolo tali da portare già di per sè indeterminatezza nei valori delle reazioni dei singoli vincoli semplici.

Basterebbe d'altronde fare anche per ciascun vincolo l'ipotesi di un cedimento elastico, funzione lineare della corrispondente reazione, per introdurre anche nei secondi membri delle ultime a' equazioni del sistema (2), termini analoghi a quelli delle prime a, e far sì che tutti gli elementi della diagonale principale del minore formato dai primi $a + a'$ elementi di ciascuna delle ultime $a + a'$ righe del determinante (5) siano maggiori di 0. Con ciò resta sempre escluso che il determinante (5) possa annullarsi, quando la caratteristica della matrice (3) è uguale a $3n$.

Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario

Nota di ENRICO BOMPIANI

presentata dal Socio naz. resid. Q. Majorana

§ 1. — Nozioni preliminari.

Nell'indirizzo inaugurato da Fubini [1] per lo studio di una superficie rispetto al gruppo delle collineazioni hanno importanza fondamentale tre forme differenziali (*forme normali di Fubini*), che in coordinate u, v asintotiche si possono scrivere:

$$(1)\qquad \varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv\,, \qquad \varphi_3 = 2\beta\gamma\,(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)\,, \qquad f_2 = n\, du^2 + \nu\, dv^2\,;$$

le due prime individuano la superficie nel gruppo delle applicabilità proiettive e, uguagliate a zero, definiscono sulla superficie le linee asintotiche e rispettivamente le linee di Darboux. È $\beta\gamma \neq 0$, se, come supporremo, la superficie non è rigata.

Alle forme (1) si può associare lo studio di un sistema di equazioni a derivate parziali

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\, x_u + \beta x_v + n x \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\, x_v + \gamma x_u + \nu x \end{cases}$$

---

(1) Delle numerose Memorie e Note dedicate dal Prof. G. Fubini a questo argomento cito solo le seguenti, alle quali dovrò più particolarmente riferirmi: *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie* ["Atti R. Accad. Sc. di Torino", vol. LIII (1918), pp. 1032-1043] e ["Rend. R. Acc. dei Lincei", vol. XXVII (1918), pp. 11-17 e 44-48].

completamente integrabile (sicchè β, γ, n, ν non sono del tutto arbitrarie). Assunte quattro soluzioni indipendenti, di cui una generica s'indicherà con $x(u, v)$, del sistema (2) come coordinate proiettive omogenee di un punto in uno S_3, per ogni coppia u, v, questo punto descrive, variando u, v, una superficie, *integrale* del sistema (2); tutte le superficie che così si ottengono (variando la quaterna di soluzioni da cui si parte) sono fra loro collineari.

Se si moltiplicano le x per una stessa funzione $\rho(u, v)$, affatto arbitraria purchè $\neq 0$ nel campo che si considera, le ρx possono assumersi come coordinate omogenee dello stesso punto rappresentato dalle x; le ρx non soddisfano più al sistema (2), ma ad un altro analogo dipendente da ρ. Sicchè la scelta del sistema (2), o se si vuole delle forme (1), implica una scelta ben determinata (a meno di una costante moltiplicativa) del fattore di omogeneità delle coordinate proiettive nei punti della superficie: le coordinate soddisfacenti alle (2) sono le *coordinate normali di Fubini.*

Questa scelta si riflette geometricamente nella determinazione di un tetraedro associato ad ogni punto O della superficie σ: esso ha per vertici i punti $O, O_1(x_u), O_2(x_v), O_3(x_{uv})$, e si dirà *tetraedro di Fubini*; la retta OO_3 è la *normale proiettiva* ([2]).

Se con X s'indicano coordinate correnti e si pone

$$(3)\qquad T = |X, x, x_u, x_v|, \qquad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|,$$
$$N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|, \qquad \Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|,$$

ove i secondi membri simboleggiano determinanti costruiti con le coordinate dei punti indicati, le equazioni $T=0$, $N_1=0$, $N_2=0$, $\Omega=0$ rappresentano le quattro faccie del tetraedro (e precisamente: il piano tangente, i due piani per le tangenti asintotiche e per la normale proiettiva, il piano della faccia opposta ad O).

Tutto ciò è notissimo, ma occorreva richiamarlo.

([2]) Per la determinazione geometrica di questo tetraedro può vedersi la mia Nota: *Nozioni di geometria proiettivo-differenziale relative ad una superficie dello spazio ordinario* [" Rend. R. Acc. dei Lincei ", vol. XXXIII (1924), pp. 85-90].

§ 2. — La quadrica di Lie.

Si consideri un'asintotica, per es. $dv = 0$, che indicheremo con u, passante per il punto O e la rigata costituita dalle tangenti alle asintotiche dell'altro sistema, linee $v\,(du = 0)$, nei punti di u: la quadrica osculatrice a questa rigata lungo la generatrice per O è la *quadrica di Lie* (³) relativa al punto O di σ.

Posto

$$H = -\frac{1}{\beta\gamma}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v} + \beta\gamma\right) = \textit{curvatura proiettiva media di } \sigma \;(^4),$$

la sua equazione è:

$$N_1 N_2 - T\Omega = \frac{1}{2}\beta\gamma H T^2. \tag{4}$$

La quadrica di Lie è legata invariantivamente al punto O di σ non soltanto per collineazioni ma anche per deformazioni proiettive (poichè dipende soltanto da β, γ e non da n e ν).

§ 3. — Calcolo di alcune espressioni.

Occorre aver presenti le successive derivate delle coordinate normali di Fubini, quali si traggono dalle (2).

Assumiamo $\varphi_2 = 2\,\beta\gamma\, du\, dv = ds^2$ come forma fondamentale per il calcolo di derivate covarianti; per distinguere queste dalle ordinarie porremo gli indici 1 e 2 in luogo di u e v; per la nostra φ_2 sono nulli tutt'i simboli di Christoffel tranne

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}, \qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}.$$

(³) L'equazione della quadrica di Lie in coordinate proiettive qualisiansi (non necessariamente normali) si trova in una aggiunta di F. Engel ad una Nota di P. Frank: *Asymptotenebenen eines Flächenpunktes* [“ Mathem. Zeitschrift „, Bd. 11 (1921), pp. 289-304].

(⁴) G. Fubini: *Fondamenti* (Torino), p. 1038; Fubini assume come curvatura media $2H + 2$.

Si ha il seguente specchio di derivate covarianti:

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = x_u\,, \qquad x_2 = x_v\,, \\ x_{11} = \beta x_2 + n x\,, \qquad x_{22} = \gamma x_1 + \nu x\,, \qquad x_{12} = x_{21} = x_{uv} \end{cases}$$

(le prime due equazioni di questa riga non sono altro che le (2) scritte coi simboli della derivazione covariante).

$$(6)\quad \begin{cases} x_{111} = \beta x_{uv} - \beta \dfrac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} x_v + n x_u + \left(\dfrac{\partial n}{\partial u} - 2n \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right) x \\ x_{112} = \beta\gamma x_u + c_1 x_v + \left(\beta\nu + \dfrac{\partial n}{\partial v}\right) x \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} x_{121} = x_{211} = c_1 x_v - \beta\gamma H x_u + \left(\beta\nu + \dfrac{\partial n}{\partial v}\right) x \\ x_{122} = x_{212} = c_2 x_u - \beta\gamma H x_v + \left(\gamma n + \dfrac{\partial \nu}{\partial u}\right) x \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} x_{221} = \beta\gamma x_v + c_2 x_u + \left(\gamma n + \dfrac{\partial \nu}{\partial u}\right) x \\ x_{222} = \gamma x_{uv} - \gamma \dfrac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} x_u + \nu x_v + \left(\dfrac{\partial \nu}{\partial v} - 2\nu \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\right) x \end{cases}$$

ove

$$c_1 = \beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} + n\,, \qquad c_2 = \gamma \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial u} + \nu$$

(ricordo che $c_1\, du^2 - c_2\, dv^2 = 0$ definisce le linee proiettive di curvatura ([5])).

In conseguenza si ha ($du_1 = du$, $du_2 = dv$):

$$(9)\quad \begin{aligned} \Sigma\, x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t = {} & x_{uv}\,(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) + \\ & + x_u \Big[n\, du^3 - \gamma \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} dv^3 + \\ & \qquad + \left(3\beta\gamma + 2 \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v}\right) du^2\, dv + 3 c_2\, du\, dv^2\Big] + \\ & + x_v \Big[\nu\, dv^3 - \beta \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du^3 + \\ & \qquad + \left(3\beta\gamma + 2 \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v}\right) du\, dv^2 + 3 c_1\, du^2\, dv\Big] + \\ & + x \Big[\left(\frac{\partial n}{\partial u} - 2n \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right) du^3 + 3\left(\beta\nu + \frac{\partial n}{\partial v}\right) du^2\, dv + \\ & \qquad + 3\left(\gamma n + \frac{\partial \nu}{\partial u}\right) du\, dv^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial v} - 2\nu \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\right) dv^3\Big]. \end{aligned}$$

([5]) G. FUBINI: *Fondamenti* (Torino), p. 1038.

Dopo ciò siamo in grado di valutare T, N_1, N_2, Ω in un punto O' preso sopra una curva uscente da un punto O della superficie in direzione diversa da quelle asintotiche. In questa ipotesi può assumersi come parametro sulla curva l'*arco* $s=\int^{O'}\sqrt{\varphi_2}$. Se si pone $u_i'=\frac{du_i}{ds}$ e s'indicano con δ i differenziali controvarianti calcolati in base a φ_2 dalle coordinate x di O si passa alle coordinate x' di O' con le

$$(10)\qquad x'=x+\frac{dx}{ds}ds+\frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}ds^2+\frac{1}{3!}\frac{d^3x}{ds^3}ds^3+\dots$$

essendo [6]

$$\frac{dx}{ds}=\sum_1^2{}_r\, x_r u_r', \qquad \frac{d^2x}{ds^2}=\Sigma x_r\frac{\delta^2 u_r}{\delta s^2}+\Sigma x_{rs}u_r' u_s'$$

$$\frac{d^3x}{ds^3}=\Sigma x_r\frac{\delta^3 u_r}{\delta s^3}+3\,\Sigma x_{rs}u_r'\frac{\delta^2 u_s}{\delta s^2}+\Sigma x_{rst}u_r' u_s' u_t'.$$

Posto $(x, x_u, x_v, x_{uv})=\Delta$ i valori in O' di T, N_1, N_2, Ω possono scriversi

$$(11)\qquad T/\Delta=-\sum_2{}_i T_i\,,\qquad N_1/\Delta=\sum_1{}_i N_{1i}\,,\qquad N_2/\Delta=-\sum_1{}_i N_{2i}\,,$$

$$\Omega/\Delta=1+\sum_2{}_i\Omega_i$$

l'indice i indicando il grado in ds del termine che si considera. E si ha:

---

(6) G. Fubini: *Fondamenti* (Torino), p. 12.

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
T_2 &= u'\, v'\, ds^2 , \qquad T_3 = \frac{ds^3}{3!}\,(\beta u'^3 + \gamma v'^3) \\
N_{11} &= v'\, ds , \qquad N_{12} = \frac{ds^2}{2}\left(\frac{\delta^2 v}{\delta s^2} + \beta u'^2\right) \\
N_{13} &= \frac{ds^3}{3!}\left\{ \frac{\delta^3 v}{\delta s^3} + 3\beta u' \frac{\delta^2 u}{\delta s^2} + \nu v'^3 - \beta \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\, u'^3 + \right. \\
&\qquad \left. + 3 c_1\, u'^2 v' + \left(3\beta\gamma + 2\,\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v}\right) u'\, v'^2 \right\} \\
N_{21} &= u'\, ds , \qquad N_{22} = \frac{ds^2}{2}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta s^2} + \gamma v'^2\right) \\
N_{23} &= \frac{ds^3}{3!}\left\{ \frac{\delta^3 u}{\delta s^3} + 3\gamma v' \frac{\delta^2 v}{\delta s^2} + n u'^3 - \gamma \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\, v'^3 + \right. \\
&\qquad \left. + 3 c_2\, v'^2 u' + \left(3\beta\gamma + 2\,\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v}\right) u'^2\, v' \right\} \\
\Omega_2 &= \frac{ds^2}{2}\,(n u'^2 + \nu v'^3) \\
\Omega_3 &= \frac{ds^3}{3!}\left\{ 3\left(n u' \frac{\delta^2 u}{\delta s^2} + \nu v' \frac{\delta^2 v}{\delta s^2}\right) + \left(\frac{\partial n}{\partial u} - 2n\,\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right) u'^3 + \right. \\
&\qquad + \left(\frac{\partial \nu}{\partial v} - 2\nu\,\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\right) v'^3 + 3\left(\beta\nu + \frac{\partial n}{\partial v}\right) u'^2 v' + \\
&\qquad \left. + 3\left(\gamma n + \frac{\partial \nu}{\partial u}\right) u'\, v'^3 \right\} .
\end{aligned}
\right.
$$

Conviene osservare fin d'ora le relazioni

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
& u'\, N_{11} - v'\, N_{21} = 0 \\
& N_{11}\, N_{21} - T_2 = 0 \\
& N_{11}\, N_{22} + N_{12}\, N_{21} = \frac{ds^3}{2}\left(u' \frac{\delta^2 u}{\delta s^2} + v' \frac{\delta^2 v}{\delta s^2} + \beta u'^3 + \gamma v'^3\right) = \\
&\qquad = \frac{ds^3}{2}\,(\beta u'^3 + \gamma v'^3) \\
& \text{ovvero} \\
& N_{11}\, N_{22} + N_{12}\, N_{21} - T_3 = 2\, T_3 \\
& u' N_{13} - v' N_{23} = \frac{ds^3}{3!}\left\{ u' \frac{\delta^3 v}{\delta s^3} - v' \frac{\delta^3 u}{\delta s^3} + 3\left(\beta u'^2 \frac{\delta^2 u}{\delta s^2} - \gamma v'^2 \frac{\delta^2 v}{\delta s^2}\right) + \right. \\
&\qquad + 2\left[\left(n + \frac{3}{2}\,\beta\,\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right) u'^2 - \left(\nu + \frac{3}{2}\,\gamma\,\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) v'^2\right] u' v' - \\
&\qquad \left. - \left(\beta\,\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\, u'^4 - \gamma\,\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\, v'^4\right) \right\} .
\end{aligned}
\right.
$$

§ 4. — Quadriche aventi per generatrici le tangenti asintotiche in un punto della superficie.

Si consideri il sistema lineare ∞^4 delle quadriche aventi per generatrici in un punto O di σ le tangenti asintotiche di σ. Una quadrica del sistema ha un'equazione del tipo

$$N_1 N_2 = (h_1 N_1 + h_2 N_2 + h_3 \Omega + h T) T \tag{14}$$

con h, h_1, h_2, h_3 costanti arbitrarie. Se essa non è degenere, come vogliamo supporre, $h_3 \neq 0$. Per $h_3 = +1$, $h_1 = h_2 = 0$, $h = \frac{1}{2} \beta\gamma H$ si ha la quadrica di Lie.

Consideriamo su σ un elemento regolare di curva uscente da O, in direzione diversa da quelle asintotiche, e su di essa consideriamo un punto O', di coordinate (10); per O' conduciamo una trasversale *generica* (cioè non passante per O, nè infinitamente vicina ad una retta del piano tangente ivi) e cerchiamo il punto, prossimo ad O, in cui incontra la quadrica (14), che indicheremo con O_Q e il punto d'intersezione O_T col piano tangente.

Per individuare la trasversale passante per O' assumiamo su di essa ad arbitrio un punto C di coordinate

$$x_c = \frac{x_{uv}}{\beta\gamma} + \lambda x_u + \mu x_v + \nu x \tag{15}$$

con λ, μ, ν affatto arbitrarî: il coefficiente di x_{uv}, che s'è posto $= \frac{1}{\beta\gamma}$, è necessariamente $\neq 0$ poichè la trasversale è generica (nel senso preciso sopra dichiarato). Per il punto C si ha

$$T/\Delta = -1/\beta\gamma\,, \quad N_1/\Delta = \mu\,, \quad N_2/\Delta = -\lambda\,, \tag{16}$$
$$\Omega/\Delta = \nu \qquad (\text{in } C).$$

Per un punto generico della trasversale, di coordinate $\tau x_c + x'$ si ha quindi, utilizzando le (11), (12)

$$T/\Delta = -\tau/\beta\gamma - \sum_2^3 T_i\,, \qquad N_1/\Delta = \tau\mu + \sum_1^3 N_{1i}\,, \tag{17}$$
$$N_2/\Delta = -\tau\lambda - \sum_1^3 N_{2i}\,, \qquad \Omega/\Delta = 1 + \tau\nu + \sum_2^3 \Omega_i\,.$$

Le intersezioni della trasversale con la quadrica (14) si hanno sostituendo le espressioni (17) in (14); ciò fatto risulta l'equazione in τ

$$(18)\quad \tau^2\left[\lambda\mu-\frac{h_1\mu}{\beta\gamma}+\frac{h_2\lambda}{\beta\gamma}-\frac{h_3\nu}{\beta\gamma}+\frac{h}{(\beta\gamma)^2}\right]+$$
$$+\tau\left[\left(\lambda-\frac{h_1}{\beta\gamma}\right)\Sigma N_{1i}+\left(\mu+\frac{h_2}{\beta\gamma}\right)\Sigma N_{2i}+\right.$$
$$\left.+\left(-h_1\mu+h_2\lambda+h_3\nu+2\frac{h}{\beta\gamma}\right)\Sigma T_i-\frac{h_3}{\beta\gamma}(1+\Sigma\Omega_i)\right]+$$
$$+\Sigma N_{1i}\Sigma N_{2i}+\{-h_1\Sigma N_{1i}+h_2\Sigma N_{2i}-h_3(1+\Sigma\Omega_i)\}\Sigma T_i+$$
$$+h(\Sigma T_i)^2=0$$

(se si limitano superiormente le Σ al valore $i=3$ dell'indice l'equazione ora scritta è esatta fino ai termini d'ordine ≤ 3; gli altri termini d'ordine ≥ 4 e ≤ 6 che vi figurano *non* sono tutti i termini di tali ordini che dovrebbero figurarvi; ma a noi interessano soltanto i primi).

Indichiamo con a il coefficiente (indipendente dai differenziali) di τ^2. L'equazione precedente, limitando la trascrizione ai termini d'ordine più basso, si scrive pure:

$$(19)\qquad a\tau^2-\frac{h_3}{\beta\gamma}\tau+(1-h_3)\,T_2=0$$

e questa dà per la radice prossima a zero, τ_Q, corrispondente ad O_Q

$$(20)\qquad \tau_Q=\frac{\beta\gamma}{h_3}(1-h_3)\,T_2+\ldots$$

Il valore τ_T di τ corrispondente ad O_T è invece, a norma delle (17):

$$(21)\qquad \tau_T=-\beta\gamma\,(T_2+\ldots).$$

Preso un punto P ad arbitrio sulla trasversale, corrispondente ad un valore τ_P di τ (non infinitesimo), il birapporto $(O'\,O_T\,O_Q\,P)$ vale

$$\frac{\frac{1}{h_3}(1-h_3)\,T_2+\ldots}{T_2+\ldots\left(\frac{1}{h_3}-1\right)T_2+\ldots}\cdot\frac{\tau_P+\beta\gamma\,T_2+\ldots}{\tau_P};$$

il valor limite per $O' \to O$ è $= 1 - h_3$ e dipende soltanto dal punto O e da h_3.

Si consideri in un punto O *di* σ *una quadrica contenente le due tangenti asintotiche relative ad* O. *Se per un punto* O′ *prossimo ad* O *si conduce una trasversale ad arbitrio che tagli la quadrica in un punto* O_Q *(prossimo ad* O*) e il piano tangente in* O *nel punto* O_T, *e se sulla trasversale si prende ad arbitrio un punto* P, *il valor limite del birapporto* $(O' \, O_T \, O_Q \, P)$ *quando* O′ *tende ad* O *(sopra una curva che non sia tangente ad una asintotica) è un invariante proiettivo di* σ *e della quadrica, che non dipende affatto dalla curva su cui si muove* O′, *dalla trasversale e dal punto* P *su di essa* (7).

Detto invariante non muta se alla quadrica data se ne sostituisce un'altra avente in comune con quella (oltre alle tangenti asintotiche in O*) una conica passante per* O.

§ 5. — **L'elemento lineare proiettivo di Fubini, φ_3/φ_2.**

Il risultato precedente è per sè interessante ma non ci permette di esplorare l'intorno del punto O su σ (visto che quell'invariante dipende soltanto da O). L'esplorazione si può compiere spingendo più innanzi l'indagine.

Quell'invariante è zero quando $h_3 = 1$, cioè per la quadrica di Lie e per tutte (e sole) le quadriche aventi in comune con essa (le tangenti asintotiche in O e) una conica passante per O: cerchiamo il termine principale dell'infinitesimo che per $O' \to O$ dà lo zero.

---

(7) Questo teorema vale, più in generale, per due superficie aventi in un punto comune le stesse tangenti asintotiche: ed è del tutto analogo ad un teorema di C. Segre sulle curve [v. *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*; “Rend. R. Acc. dei Lincei„, vol. VI (1897), pp. 168-175]; e il teor. relativo alle superficie si dimostra con gli stessi mezzi usati dal Segre per le curve. A me occorreva, per le indagini successive, giungere alla determinazione dell'invariante per la via che ho seguìta.

Se in quest'ipotesi, $h_3 = 1$, si riprende la (18), si ha, in luogo della (19), la

$$(22) \qquad a\tau^2 - \frac{1}{\beta\gamma}\tau + 2T_3 + T_2(h_2 du - h_1 dv) = 0$$

la cui radice prossima a zero è

$$\tau_Q = \beta\gamma\,[2T_3 + T_2(h_2 du - h_1 dv)] + \ldots$$

i puntini indicando termini d'ordine > 3; mentre τ_T è dato sempre dalla (21).

Il termine principale del birapporto $(O' \, O_T \, O_Q \, P)$ vale

$$2\frac{T_3}{T_2} + (h_2 du - h_1 dv) = \frac{1}{3}\frac{\varphi_3}{\varphi_2} + h_2 du - h_1 dv.$$

Il termine principale del birapporto costruito per la quadrica di Lie e per quelle che la tagliano in una conica passante per O *dipende soltanto dalla tangente in* O *alla curva su cui si muove* O' *per tendere ad* O *e non dipende affatto dagli elementi successivi di questa curva nè dalla trasversale per* O' *nè dal punto* P *su di essa.*

Se in particolare si prende proprio la quadrica di Lie (od un'altra formante fascio con essa e col piano tangente contato due volte) $h_1 = h_2 = 0$; e di più si precisa la posizione (arbitraria) di P prendendolo nell'altra intersezione ($\neq O_Q$ e non prossima ad O) della trasversale con la quadrica, allora il birapporto $(O' \, O_T \, O_Q \, P)$ serve a definire, secondo le vedute di Cayley-Klein, la misura proiettiva della distanza $O' \, O_Q$ rispetto alla quadrica scelta come assoluto. Si ha allora l'enunciato seguente (più ristretto del precedente, ma più espressivo):

Il birapporto che serve a definire la distanza proiettiva dal piano tangente in O *di un punto* O' *situato sopra una curva uscente da* O *(nell'intorno del 3° ordine almeno) misurata sopra una trasversale generica per* O' *e assumendo come assoluto la quadrica di Lie (o una formante fascio con essa e col piano tangente contato due volte) è indipendente (nel suo termine principale) sia dalla trasversale che da* O' *e dipendente solo dalla tangente in* O *alla curva sulla quale* O' *tende ad* O. *Il suo valore è* $\frac{1}{3}\frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{1}{3}$ *dell'elemento lineare proiettivo di Fubini.*

Come si sa ([8]) e come ora risulta anche dall'interpretazione geometrica, il rapporto φ_3/φ_2 è indipendente dalla normalizzazione.

§ 6. — **Osservazioni complementari.**

Si è supposto, nei §§ precedenti, che la quadrica considerata (avente per generatrici in O le tangenti asintotiche di σ) non sia un cono e che la curva sulla quale O' si fa tendere ad O non abbia ivi per tangente una tangente asintotica.

Manteniamo la prima ipotesi e discutiamo il caso che *l'elemento di curva* OO' *appartenga tutto ad un'asintotica.* Sia questa la $dv = 0$ passante per O, ed il punto O' abbia le coordinate

$$x' = x + x_u\, du + \frac{1}{2}\, x_{uu}\, du^2 + \frac{1}{3!}\, x_{uuu}\, du^3 + \ldots \tag{23}$$

Preso ad arbitrio il punto C, le cui coordinate sono date da (15), si trova con un calcolo analogo a quello del § 4 che:

$$\lim_{O' \to O} (O'\, O_T\, O_Q\, P) = 1 - \frac{h_3}{3}\,;$$

quindi come nel caso generale (v. § 4) questo limite non dipende dalla trasversale nè dal punto P, ma solo da σ e dalla quadrica considerata (anzi solo da h_3). *Per la quadrica di Lie quel limite* è $= 2/3$.

Anche in questo caso il maggior interesse è relativo all'annullarsi di quel limite; il che avviene ora per $h_3 = 3$: *queste quadriche sono caratterizzate dal fatto di avere un contatto del 3° ordine con ciascuna delle asintotiche in* O ([9]).

([8]) G. Fubini: *Fondamenti* (Lincei), p. 14. Una interpretazione diversa di φ_3/φ_2 trovasi nella Nota di E. Cech: *Sur la géometrie d'une surface et sur le facteur arbitraire des coordonnées homogènes* [" Rend. R. Acc. Lincei ", vol. XXXI (1922), pp. 475-478].

([9]) È notevole il fatto che il contatto di 3° ordine con una asintotica porta di conseguenza il contatto di 3° ordine della quadrica anche con l'altra; sicchè esistono ∞^3 quadriche siffatte, una di esse essendo caratterizzata dai valori di h, h_1, h_2.

Per queste quadriche il termine principale dell'infinitesimo a cui dà luogo il birapporto $(O' \, O_T \, O_Q \, P)$ è:

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial \log \beta^5 \gamma^7}{\partial u} + 4 h_2\right) du$$

e dipende soltanto da σ e dalla quadrica (pel tramite di h_2) ma non dalla trasversale nè da P [10].

§ 7. — **La forma normale φ_2 di Fubini.**

Dato il punto O di σ, si diano alle sue coordinate curvilinee u, v gli incrementi du, dv (cioè si consideri una direzione uscente da O e da essi individuata); e sulle asintotiche per O si prendano i due punti

$$O' \qquad x' = x + x_u \, du + \frac{1}{2} x_{uu} \, du^2 + \frac{1}{3!} x_{uuu} \, du^3 + \ldots$$

$$O'' \qquad x'' = x + x_v \, dv + \frac{1}{2} x_{vv} \, dv^2 + \frac{1}{3!} x_{vvv} \, dv^3 + \ldots$$

Cerchiamo le intersezioni, C', C'' (infinitamente vicine ad O', O''), della retta $O' \, O''$ con la quadrica (14).

Per un punto $x' + \tau x''$ della retta $O' \, O''$ i valori di T, N_1, N_2, Ω, sono dati da

$$T/\Delta = -\frac{1}{3!}(\beta \, du^3 + \tau\gamma \, dv^3) - \frac{1}{4!}\left(\beta \frac{\partial \log \beta^3 \gamma}{\partial u} du^4 + \right.$$
$$\left. + \tau\gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^3}{\partial v} dv^4\right) + \ldots$$

$$N_1/\Delta = \tau \, dv + \frac{1}{2}\left(\beta \, du^2 + \tau \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} dv^2\right) + \frac{\beta}{3!} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial u} du^3 + \ldots$$

$$N_2/\Delta = - du - \frac{1}{2}\left(\tau\gamma \, dv^2 + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} du^2\right) - \tau \frac{\gamma}{3!} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial v} dv^3 + \ldots$$

$$\Omega/\Delta = 1 + \tau + \ldots$$

---

[10] Le quadriche aventi un contatto del 4° ordine con l'asintotica u uscente da O sono caratterizzate da $h_2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial \log \beta^5 \gamma^7}{\partial u}$; e analogamente il contatto del 4° ordine con l'asintotica v porta $h_1 = \frac{1}{4} \frac{\partial \log \beta^7 \gamma^5}{\partial v}$.

I valori di τ corrispondenti ai punti C', C'' sono quindi le radici dell'equazione

$$(24) \qquad \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{h_3}{3!}\right)\gamma\, dv^3+\dots\right]\tau^2+[du\, dv+\dots]\,\tau+ \\ +\left(\frac{1}{2}-\frac{h_3}{3!}\right)\beta\, du^3+\dots=0.$$

Il birapporto $(O'\,C'\,C''\,O'')$ è dato dal rapporto delle due radici della (24); il suo termine principale è

$$(25) \qquad \left(\frac{1}{2}-\frac{h_3}{3!}\right)^2\beta\gamma\, du\, dv=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{h_3}{3!}\right)^2\varphi_2 .$$

Se la quadrica considerata è quella di Lie ($h_3=1$), il termine ora scritto vale $\varphi_2/18$; se è un cono, con vertice in O ($h_3=0$), si ha invece $\varphi_2/8$; in ogni caso, a meno di un fattore numerico ben determinato (dipendente unicamente dalla quadrica scelta), si ha il significato geometrico della forma normale φ_2 di Fubini.

Se $h_3=0$, il cono può anche spezzarsi in due piani contenenti le tangenti asintotiche (purchè, s'intende, nessuno dei due piani divenga infinitamente vicino al piano tangente); in tal caso il birapporto considerato è anche il birapporto dei due piani ora detti e di quelli che dalla loro retta d'intersezione (che può assumersi ad arbitrio, purchè non infinitamente vicina al piano tangente) proiettano i due punti $O'\,O''$. Sicchè:

Si consideri un punto O *di* σ *e una qualsiasi quadrica avente ivi per generatrici le tangenti asintotiche di* σ. *Se sulle due asintotiche uscenti da* O *si prendono i punti* O′ *e* O″ *corrispondenti agli incrementi* du *e* dv, *la retta* O′ O″ *taglia la quadrica in due punti, il cui birapporto con i precedenti ha per infinitesimo principale la forma normale* φ_2 *di Fubini moltiplicata per un coefficiente numerico dipendente solo dalla quadrica* ($=1/18$ *per quella di Lie*). In particolare, *se da un punto generico si proiettano sul piano tangente le due corde* O O′ *e* O O″, *il birapporto di queste proiezioni e delle due tangenti asintotiche vale* $\varphi_2/8$ *(qualunque sia il centro di proiezione).*

§ 8. — **Osservazioni complementari.**

1ª) Se $h_3 = 3$, cioè se, come s'è visto (§ 6), la quadrica che si considera ha contatto del 3° ordine con le asintotiche uscenti da O, il calcolo precedente va modificato, tenendo conto nel coefficiente di τ^2 e nel termine noto della (24) dei termini di 4° grado; e si trova che il termine principale del birapporto considerato è

$$\left[\frac{\partial \log \beta^7 \gamma^5}{\partial v} - 4 h_1\right] \left[\frac{\partial \log \beta^5 \gamma^7}{\partial u} + 4 h_2\right] \frac{\beta \gamma}{(4!)^2} du^2 \, dv^2.$$

2ª) Nel § precedente si è condotto il calcolo con coordinate normali di Fubini, quindi si può supporre che il risultato ottenuto dipenda da questa normalizzazione (come del resto ne dipende la posizione di O', O'' sulle asintotiche).

Il risultato acquista maggior rilievo dal fatto ch'esso è indipendente dalla normalizzazione: o in altri termini *la costruzione geometrica data fornisce proprio la forma normale di Fubini* φ_2, quali si siano le coordinate; quindi non solo permette di ritrovarla ma ne mette in luce l'importanza intrinseca per la metrica-proiettiva della superficie.

Infatti se si ripete il calcolo di T, N_1, N_2, Ω a partire, invece che dalle x, dalle ρx, essendo ρ una funzione qualsiasi di u, v, i termini scritti nella (24), i soli che abbiano influenza nel calcolo del birapporto, vengono tutti alterati per uno stesso fattore: e ciò non muta il risultato.

L'effetto della normalizzazione si risentirebbe nei termini successivi a φ_2 nello sviluppo del birapporto.

§ 9. — **Invarianti proiettivo-differenziali di una curva appartenente ad una superficie: la prima curvatura proiettiva.**

In possesso del significato geometrico di φ_2 e φ_3, procuriamoci ora gli invarianti proiettivo-differenziali (del 2° e del 3° ordine) di una curva tracciata sulla superficie.

Invariante differenziale del 2° ordine è, come ha osservato Fubini [11], la *curvatura asintotica*

$$\frac{\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)}{\varphi_2{}^{3/2}}\,. \tag{26}$$

Tale è pure ogni espressione ottenuta aggiungendo alla precedente un invariante dipendente dai soli differenziali primi; fra queste vogliamo sceglierne una avente un significato proiettivo semplice.

Allo scopo, sopra una curva uscente da O (in direzione non asintotica) prendiamo un punto O', come al § 3, e proiettiamo la corda $O\,O'$ da un punto qualsiasi della normale proiettiva sul piano tangente: si otterrà una retta t' (passante per O); calcoliamone il birapporto con la tangente t in O alla curva e con le due tangenti asintotiche $t_1\,t_2$ (pure in O).

Il piano, passante per la normale proiettiva, di equazione $h_1\,N_1 + h_2\,N_2 = 0$ contiene il punto O', di coordinate x' date dalle (10) se

$$h_1\,\Sigma\,N_{1i} = h_2\,\Sigma\,N_{2i}$$

da cui

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{du}{dv}\left(1 - \frac{\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)}{\varphi_2} - \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi}_3}{\varphi_2} + \ldots\right)$$

essendo $\overline{\varphi}_3 = 2\,\beta\gamma\,(\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3)$. Si ha perciò

$$(t,\,t',\,t_1,\,t_2) = 1 + \frac{\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)}{\varphi_2} + \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi}_3}{\varphi_2} + \ldots$$

che naturalmente tende ad 1 per $O' \to O$. La parte principale del $\log\,(t, t', t_1, t_2)$ è

$$\frac{\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)}{\varphi_2} + \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi}_3}{\varphi_2} \tag{27}$$

e rappresenta, in senso proiettivo, quando si assuma come assoluto nel fascio di centro O la coppia di tangenti asintotiche, l'angolo (infinitesimo) $t\,t'$. Questo angolo diviso per l'elemento

---

[11] G. Fubini: *Fondamenti* (Torino), p. 1038, § 3.

lineare $ds = \varphi_2^{1/2}$ della superficie in direzione t può assumersi come (prima) curvatura proiettiva.

I sistemi ∞^2 di linee per i quali la curvatura proiettiva è funzione lineare dei parametri della direzione t, definiti dall'equazione differenziale del 2° ordine

$$\frac{\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)}{ds^3} = -\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi}_3}{ds^3} + m_1\,\frac{du}{ds} + m_2\,\frac{dv}{ds}\,.$$

sono i *sistemi assiali* ([12]) di curve sulla superficie, caratterizzati geometricamente dal fatto che i loro piani osculatori in un punto formano fascio intorno ad un asse (determinato da m_1, m_2).

Come curvatura proiettiva di una linea della superficie in un suo punto O *può assumersi il limite del rapporto fra l'angolo proiettivo della tangente* t *in* O *con la proiezione normale sul piano tangente di una corda uscente da* O *e l'elemento* ds *in direzione* t: *essa è data dall'espressione* (27) *divisa per* ds; *e riesce funzione lineare dei parametri di* t *solo per i sistemi assiali di linee sulla superficie.*

Se si volesse l'interpretazione geometrica della curvatura asintotica di Fubini (26), basterebbe osservare che per la geodetica di φ_2 tangente alla curva in esame la curvatura proiettiva, di cui ci è noto il significato geometrico, vale $\frac{1}{2}\frac{\overline{\varphi}_3}{\varphi_2^{3/2}}$: quindi la differenza fra la curvatura proiettiva della curva e quella della geodetica tangente in O è proprio la curvatura asintotica della curva.

Se ne ha dunque la seguente interpretazione:

Sulla curva uscente da O *e sulla geodetica di* φ_2 *ad essa tangente si prendano i punti* O′ *e* O″ *e si proiettino le corde* O O′ *e* O O″ *da un punto della normale proiettiva sul piano tangente:*

([12]) G. Fubini: *Fondamenti* (Torino), p. 1035, Caso I (ove però è da porre $\overline{\psi}_3 = -\frac{1}{2}\overline{\varphi}_3$); e più esplicitamente nelle mie Note: *Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme* [" Rend. R. Acc. dei Lincei ", vol. XXXII (1923), pp. 376-380]; *Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario* [" Bollettino dell'Unione Matem. Italiana ", anno III (1924), pp. 10-16]. Dico che un sistema assiale è *associato* ad una congruenza quando questa è costituita dagli assi dei fasci di piani osculatori, ecc.

l'angolo proiettivo di queste due proiezioni (cioè il log. del birapporto formato da esse e dalle due tangenti asintotiche in O*) diviso per l'elemento* ds $= \varphi_2^{1/2}$ *nella direzione delle due curve ha per limite, al tendere di* O' *e* O'' *ad* O, *la curvatura asintotica* (26) *della curva data.*

Un altro modo per ottenere un invariante differenziale del 2° ordine (non sostanzialmente diverso dal precedente) si ha imitando il procedimento già seguìto per trovare il significato geometrico di φ_3/φ_2 (§ 5). Precisamente: la trasversale allora considerata per O' doveva essere *generica* cioè non infinitamente vicina al piano tangente; che cosa accade nell'ipotesi opposta?

Se il punto O' tende ad O sopra una curva uscente da O in direzione du/dv, il piano tangente alla superficie σ in O' tende ad incontrare il piano tangente in O nella tangente coniugata alla du/dv, cioè congiungente il punto x col punto $x_u\, du - x_v\, dv$. Perciò una retta per O' infinitamente prossima ad una tangente in O a σ potrà individuarsi assegnando il punto O_T della tangente coniugata in cui incontra il piano tangente, le cui coordinate sono del tipo $hx + x_u\, du - x_v\, dv$. Precisiamo la questione prendendo $h = 0$, cioè O_T nel punto d'intersezione della tangente coniugata a du/dv con la polare reciproca della normale proiettiva rispetto alla quadrica di Lie (cioè con lo spigolo $O_1\, O_2$ del tetraedro di Fubini). Il birapporto dei punti $O'\, O_T$ con i punti ove la loro congiungente incontra la quadrica di Lie vale

$$-1 + \sqrt{3}\, \frac{\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) + \frac{1}{2}\,\bar{\varphi}_3}{(\varphi_2^{3/2}\,\varphi_3)^{1/2}}\, ds^{1/2} + \ldots$$

(s'intende che dev'essere $\varphi_2\,\varphi_3 \neq 0$); il termine principale dell'infinitesimo che segue -1, diviso per $\sqrt{3}\, ds^{1/2}$, è un invariante di curvatura (il rapporto di questo alla curvatura proiettiva, già introdotta, dà il significato geometrico dell'invariante, del 1° ordine, $\varphi_3/\varphi_2^{3/2}$ dipendente soltanto dalla direzione in O della curva su cui si calcola).

Il logaritmo del quoziente del birapporto ora considerato all'analogo costruito per la geodetica tangente, diviso per $\sqrt{3}\, ds^{1/2}$, vale

$$\frac{\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)}{(\varphi_2^{3/2}\,\varphi_3)^{1/2}} \tag{28}$$

ed è pure un invariante, per applicabilità proiettive, del 2° ordine [13].

§ 10. — Invarianti proiettivo-differenziali del 3° ordine di una curva: la torsione proiettiva. Sezioni piane.

Si considerino due curve uscenti da un punto O della superficie σ (in direzione non asintotica) e aventi ivi un contatto del 2° ordine; e su di esse, nell'intorno del 3° ordine di O si prendano i punti O', $\bar{O}'$. Le proiezioni, da un punto della normale proiettiva sul piano tangente, delle corde OO', $O\bar{O}'$ formano con le due tangenti asintotiche in O un birapporto il cui logaritmo (angolo proiettivo delle due proiezioni) è un invariante differenziale del 3° ordine delle due curve in O. Se una delle due curve è la sezione prodotta su σ dal piano osculatore in O all'altra si ha un invariante differenziale della curva in O.

Sulle due curve, sopralineando le grandezze che si riferiscono ad $\bar{O}'$, si ha $\delta = \bar{\delta}$, $\delta^2 = \bar{\delta}^2$ mentre $\delta^3 \neq \bar{\delta}^3$; quindi se $\lambda N_1 + N_2 = 0$ è l'equazione del piano per la normale proiettiva contenente O' dev'essere $\lambda = \Sigma N_{2i}/\Sigma N_{1i}$; e analogamente per il piano normale contenente $\bar{O}'$, $\bar{\lambda} = \Sigma \bar{N}_{2i}/\Sigma \bar{N}_{1i}$ e perciò il birapporto cercato vale

$$\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\sum_1^2 N_{2i} + N_{23}}{\sum_1^2 N_{2i} + \bar{N}_{23}} \, \frac{\sum_1^2 N_{1i} + \bar{N}_{13}}{\sum_1^2 N_{1i} + N_{13}} = 1 + \frac{N_{23} - \bar{N}_{23}}{\sum_1^2 N_{2i}} - \frac{N_{13} - \bar{N}_{13}}{\sum_1^2 N_{1i}} + \ldots$$

cioè, tenendo conto delle (12) e del fatto che nelle differenze $N_{23} - \bar{N}_{23}$, $N_{13} - \bar{N}_{13}$ si elidono i termini contenenti soltanto

---

[13] Quest'ultima espressione conserva il suo valore comunque si prenda il punto O_T sulla tangente coniugata a quella di partenza, non necessariamente sullo spigolo $O_1 O_2$.

Se sulla superficie è dato un sistema ∞^1 di linee, definito in modo intrinseco, p. es. il sistema delle linee canoniche (supposte non indeterminate), uno degli invarianti precedenti, calcolato in ogni punto per la linea che vi passa, fornisce un invariante differenziale della superficie stessa.

differenziali d'ordine < 3, e trascrivendo solo i termini d'ordine più basso nello sviluppo di $\lambda/\bar{\lambda}$,

$$\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = 1 + \frac{1}{3}\beta\gamma\left[\left(u'\frac{\delta^3 v}{\delta s^3} - v'\frac{\delta^3 u}{\delta s^3}\right) - \left(u'\frac{\bar{\delta}^3 v}{\delta s^3} - v'\frac{\bar{\delta}^3 u}{\delta s^3}\right)\right] ds^2.$$

Il logaritmo di questo birapporto (o più esattamente il suo infinitesimo principale) diviso per $\frac{1}{3}ds^2$ vale

$$(29) \qquad \beta\gamma\left[\left(u'\frac{\delta^3 v}{\delta s^3} - v'\frac{\delta^3 u}{\delta s^3}\right) - \left(u'\frac{\bar{\delta}^3 v}{\delta s^3} - v'\frac{\bar{\delta}^3 u}{\delta s^3}\right)\right]$$

ed è un invariante proiettivo-differenziale del 3° ordine relativo alle due curve considerate.

Supponiamo ora che $\bar{O}'$ sia preso sulla sezione di σ col piano osculatore in O all'altra curva. L'equazione di questo piano è $\alpha_0\, T + u'\, N_1 + v'\, N_2 = 0$ con

$$\alpha_0 = \beta\gamma\left(u'\frac{\delta^2 v}{\delta s^2} - v'\frac{\delta^2 u}{\delta s^2}\right) + \beta\gamma\,(\beta u'^3 - \gamma v'^3);$$

l'appartenenza di $\bar{O}'$ ad esso è espressa, in forza delle (12), da

$$(30) \qquad -\beta\gamma\left(u'\frac{\bar{\delta}^3 v}{\delta s^3} - v'\frac{\bar{\delta}^3 u}{\delta s^3}\right) = 3\beta\gamma\left(\beta u'^2\frac{\delta^2 v}{\delta s^2} - \gamma v'^2\frac{\delta^2 u}{\delta s^2}\right) - \\ - \frac{1}{2}\beta\gamma\left(u'\frac{\delta^2 v}{\delta s^2} - v'\frac{\delta^2 u}{\delta s^2}\right)\frac{\varphi_3}{ds^3} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_3\bar{\varphi}_3}{ds^6} + \frac{\bar{\psi}_2}{ds^2} - \frac{\bar{\varphi}_4}{ds^4}$$

ove si sono utilizzate le posizioni di Fubini ([14])

$$\bar{\varphi}_3 = 2\beta\gamma\,(\beta\, du^3 - \gamma\, dv^3)$$

$$\bar{\psi}_2 = \left(n + \frac{3}{2}\beta\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right)du^2 - \left(\nu + \frac{3}{2}\gamma\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right)dv^2$$

$$\bar{\varphi}_4 = \beta^2\gamma\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\,du^4 - \beta\gamma^2\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\,dv^4.$$

([14]) G. Fubini: *Fondamenti* (Lincei), p. 16 e 45, ove è riconosciuto il carattere covariante delle forme seguenti.

In forza della (30) l'invariante (29), dipendente ormai dagli elementi della sola curva in esame, d'ordine ≤ 3, e che perciò possiamo chiamare *torsione proiettiva della curva*, si scrive S/φ_2^3 essendo

$$(31)\quad S = \beta\gamma\,(du\,\delta^3 v - dv\,\delta^3 u)\,\varphi_2 - \frac{1}{2}\,\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\,\varphi_3 + \\ + 3\beta\gamma\,(\beta\,du^2\,\delta^2 u - \gamma\,dv^2\,\delta^2 v)\,\varphi_2 - \frac{1}{4}\,\varphi_3\,\overline{\varphi}_3 + \overline{\psi}_2\,\varphi_2^2 - \overline{\varphi}_4\,\varphi_2.$$

L'equazione $S = 0$ rappresenta le sezioni piane della superficie.

Un altro modo per giungere ad un invariante differenziale del 3° ordine di una curva, si ha utilizzando la quadrica di Lie come assoluto di una metrica proiettiva e calcolando in questa metrica la distanza del punto O' della curva dal piano ad essa osculatore in O: cioè il logaritmo del birapporto di O' e dei tre punti nei quali la retta congiungente O' al polo del piano osculatore in O alla curva incontra il piano osculatore e la quadrica di Lie.

Detto logaritmo, diviso per $ds^{3/2}/\sqrt{3}$, vale

$$(32)\qquad \frac{S}{\varphi_3^{1/2}\,\varphi_2^{9/4}}$$

essendo S dato dalla (31).

Anche questo invariante potrebbe assumersi come torsione proiettiva della curva; il rapporto degli invarianti (31) e (32) dà ancora un'altra interpretazione geometrica di $\varphi_3/\varphi_2^{3/2}$ [15].

---

[15] La presenza di φ_3 a denominatore della (32) porta ad escludere nel calcolo precedente le curve uscenti da O in una delle direzioni di Darboux. Ciò è naturale conseguenza del fatto che la quadrica di Lie ha in una di queste direzioni un contatto del 3° ordine con la superficie. La stessa circostanza va rilevata a proposito della (28).

La seconda via seguìta per giungere ad un invariante differenziale del 3° ordine della curva (servendosi della quadrica di Lie), non esige la conoscenza della normale proiettiva (cioè di una preventiva normalizzazione delle coordinate proiettive).

§ 11. — La terza forma fondamentale.

Assumiamo come terza forma fondamentale di una superficie, atta ad inviduarla, insieme a φ_2, φ_3, nel gruppo delle collineazioni, quella che uguagliata a zero fornisce le linee proiettive di curvatura della superficie stessa:

$$(33) \qquad \left(n + \beta \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}\right) du^2 - \left(\nu + \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}\right) dv^2.$$

Per trovarne il significato geometrico calcoliamo la torsione proiettiva S/φ_2^3 delle linee assiali associate alla congruenza delle normali proiettive. Queste linee sono definite dall'equazione

$$(34) \qquad \beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) + \beta\gamma\,(\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3) = 0$$

e questa, differenziata controvariantemente rispetto a φ_2, dà

$$(35) \qquad \beta\gamma\,(du\,\delta^3 v - dv\,\delta^3 u) + 3\beta\gamma\,(\beta\,du^2\,\delta^2 u - \gamma\,dv^2\,\delta^2 v) = \\ = \frac{1}{2}\,\varphi_3 \left(\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\,du - \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\,dv\right).$$

Giovandosi delle (34) e (35) l'espressione (31) di S diviene

$$S = \left[\left(n + \beta \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}\right) du^2 - \left(\nu + \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}\right) dv^2\right] \varphi_2^2,$$

sicchè la torsione proiettiva di quelle linee è uguale alla forma (33) divisa per ds^2.

Il valore della terza forma fondamentale (33) *relativa ad un punto e ad una direzione della superficie si ottiene moltiplicando per* ds^2 *la torsione proiettiva della linea assiale, associata alla congruenza delle normali proiettive, uscente dal punto nella direzione assegnata.*

È così pienamente raggiunto lo scopo che mi ero proposto di assegnare un significato geometrico semplice delle tre forme fondamentali di una superficie e degli invarianti delle curve tracciate su di essa, rispetto al gruppo delle collineazioni.

Resti dell'uomo preistorico nelle Colline di Torino

Nota del Socio naz. resid. FEDERICO SACCO

Da un quarantennio che percorro in tutti i sensi le Colline torinesi per ricerche geologiche e paleontologiche, rarissimamente ebbi a riscontrarvi resti paleoetnologici, per cui penso essere ormai opportuno di pubblicare quel poco che vi potei constatare.

Anzitutto è a notarsi come, data la posizione delle Colline torinesi, fronteggianti a Nord le Alpi ed il grande piano padano, coi rispettivi fenomeni dell'epoca diluvio-glaciale (quindi di freddo e di umidità, nonchè di grandi nevicate, di innondazioni e di paludi), è logico che l'uomo primitivo non abbia potuto giungere od almeno svilupparsi in tali regioni torinesi durante il periodo paleolitico (che corrisponde alla seconda metà dell'epoca glaciale pr. d.), ma ci sia giunto e fermato solo essenzialmente nel periodo neolitico, sviluppandovisi poi meglio in seguito.

Tuttavia questo sviluppo dovette essere per lungo tempo un po' lento e limitato se consideriamo che le Colline torinesi, per quanto coperte di foreste e ricche di selvaggina, specialmente Cervidi (1), rimasero per una gran parte dell'Era qua-

(1) Per dare un'idea dell'ambiente e del clima dei Colli torinesi nell'Epoca glaciale basta ricordare l'abbondanza dei resti di Molluschi di tipo alpino rinvenuti nel loess (Vedi F. Sacco, *I terreni quaternari della Collina di Torino*, 1887), la presenza dell'*Elephas antiquus* (trovato dal Parona presso Testona), del *Cervus eurycerus* (che riscontrai in Val Salice), di numerose Marmotte (di cui parecchi resti si raccolsero nelle vicine colline astesi), ecc.

ternaria un po' isolate e di non facile arrivo. Infatti esse non solo ebbero per lungo tempo un clima freddo-umido, ma erano circondate a nord e ad ovest dalla grande regione fluvio-paludosa della pianura padana, tanto più che questa sino a quasi la metà del Quaternario riceveva anche tutte le copiosissime acque scendenti dalla cerchia delle Alpi Marittime; inoltre tali colline si presentavano poi anche staccate a Sud dalla regione ligure-langhiana in causa dell'immensa fiumana del Tanaro (raccogliente anche le acque dell'Ellero, Pesio, Gesso e Stura) che, apertasi la via, verso la metà dell'Era quaternaria, attraverso la regione collinoso-sabbiosa del braidese-albigese, incise in breve il suo amplissimo alveo tra l'Astigiana e le Langhe, costituendo così una barriera fluviale di non facile attraversamento, oltre ad ampliarsi poi (in connessione colle acque della Bormida, della Scrivia, ecc.) nel vasto piano alessandrino che rimase anch'esso in stato fluvio-paludoso per molto tempo.

In conclusione l'isolamento completo del rilievo collinoso di Torino-Casale-Valenza, che costituì una vera isola allungata in mezzo al mare pliocenico, continuò in parte a persistere (cangiando solo dal regime marino a quello fluviale) per lungo tempo attraverso l'Era quaternaria, spiegandoci la relativa scarsità dei resti paleoetnologici in questa caratteristica regione, che del resto non presentava quei ricoveri naturali (sottoroccie, caverne e simili) che spesso trovansi nelle regioni montuose, specialmente se calcaree.

Ciò posto passiamo brevemente in esame tali pochi resti.

***

Nell'estate del 1885 passeggiando col compianto Conte L. di Rovasenda sulla collinetta (Bric) della sua villa presso Sciolze in cerca di fossili, egli mi fece osservare una speciale terra brunastra che appariva sul fianco meridionale di detto rilievo, ad una decina di metri dalla sommità. Venutomi il sospetto che si trattasse di materiale carbonioso di antico focolare, pregai l'ottimo amico di far eseguire uno scavo dal suo giardiniere; al che avendo egli accondisceso colla solita squisita cortesia, grande fu la nostra contentezza quando, a circa mezzo metro

dalla superficie, in terreno rimaneggiato, apparvero varii cocci di stoviglie grossolane, rossiccie e brunastre, liscie od ornate da semplici graffiti, nonchè qualche ossame che mi parve di Cervide, materiale che portai a Torino per studio.

In seguito il Rovasenda fece allargare ed approfondire lo scasso ricavandone altro materiale, ma analogo a quello escavato sul principio.

Altre e svariate cure mi distolsero dall'esame ulteriore di questi resti che appena accennai a pag. 634 del lavoro sopra " Il Bac. terz. del Piemonte „ (1889); ma ora siccome, per dono munifico della Marchesa Clotilde Terzi, figliuola del Conte Rovasenda, la sua preziosa Collezione è passata al Museo geologico dell'Università di Torino, col gentile consenso del suo Direttore, Prof. C. F. Parona, potei esaminare con comodo anche il materiale del Rovasenda assieme al mio (che da questo momento passo alla Collezione Rovasenda) e ne faccio ora cenno brevemente.

Il materiale ceramico è ridotto purtroppo a frammenti, senza possibilità di una ricostruzione un po' completa; ma ciò, per quanto ebbi ad esaminare sul sito, non dipende generalmente da rottura prodotta nell'opera di escavazione, ma deve risalire all'epoca del rigetto dei manufatti quando già rotti e quindi inutili. Questi resti ceramici sono rappresentati da due tipi abbastanza distinti che in sito apparivano frammischiati, cioè:

a) Ciotole di varia grandezza, leggermente svasate ed un po' panciute verso l'alto, generalmente a fondo piano, qualche volta col margine di detto fondo un po' rialzato; il materiale è rossastro (talora un po' annerito dall'uso), di pasta grossolana, tanto che talora fra l'argilla impura, incompletamente impastata e mal cotta, sonvi persino commisti varii granuli e ghiaiette. Taluni elementi sono però di pasta un po' meno grossolana.

Alcune di queste ciotole sono foggiate molto irregolarmente e grossolanamente, a superficie appena lisciata a mano o con un qualche istrumento analogo ad una spatola; molte invece presentano una ornamentazione molto primitiva che consta essenzialmente di irregolari incavi a scodelline (fig. 1, 2) (come veggonsi pure in certi vasi delle torbiere di S. Giov. Bosco, nella stazione neolitica di Alba, in quella di Vayez in Val Susa, ecc.), oppure di irregolari depressioni o larghi solchi

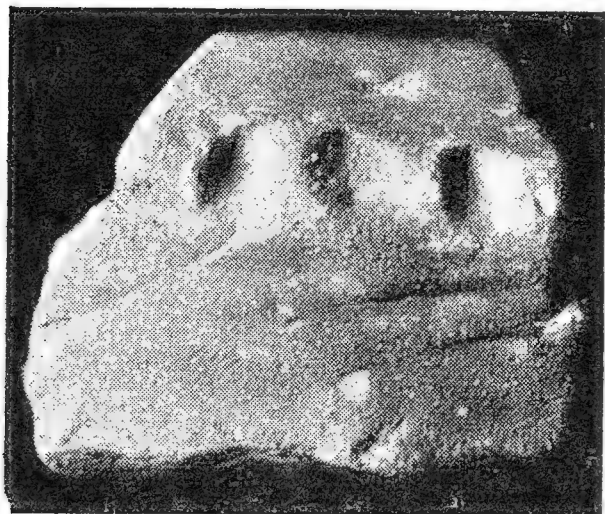



Fig. 1 ($^1/_2$ gr. nat.).

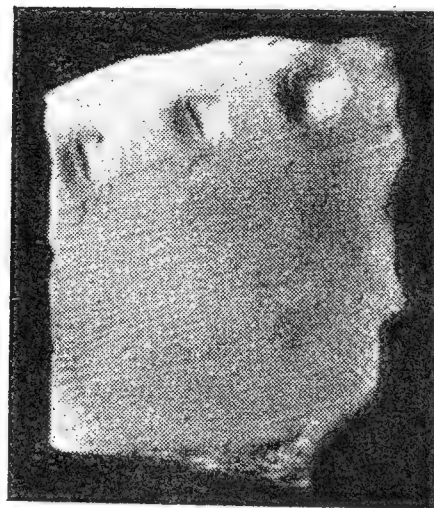



Fig. 2 ($^1/_2$ gr. nat.).

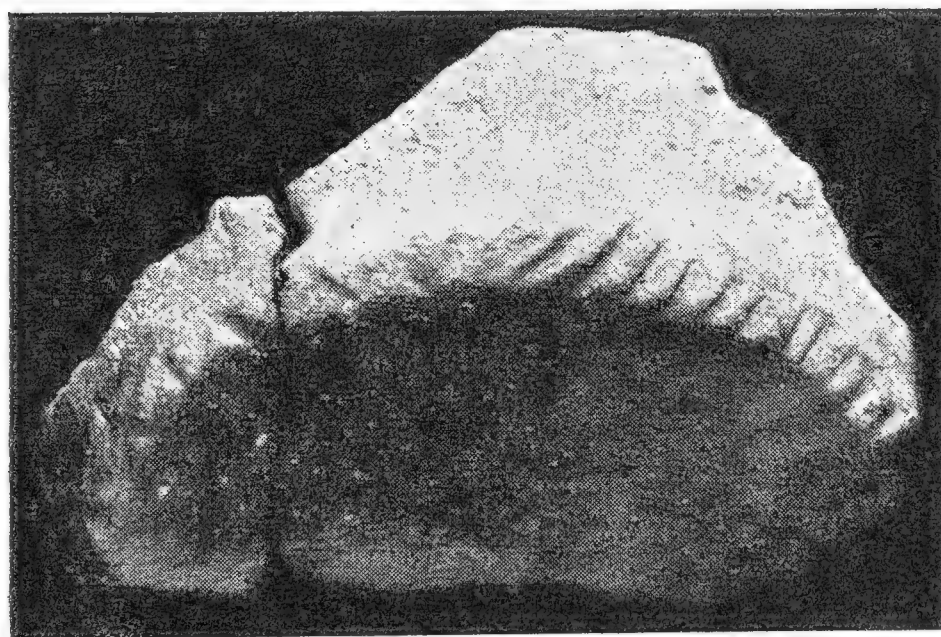



Fig. 3 ($^1/_2$ gr. nat.).

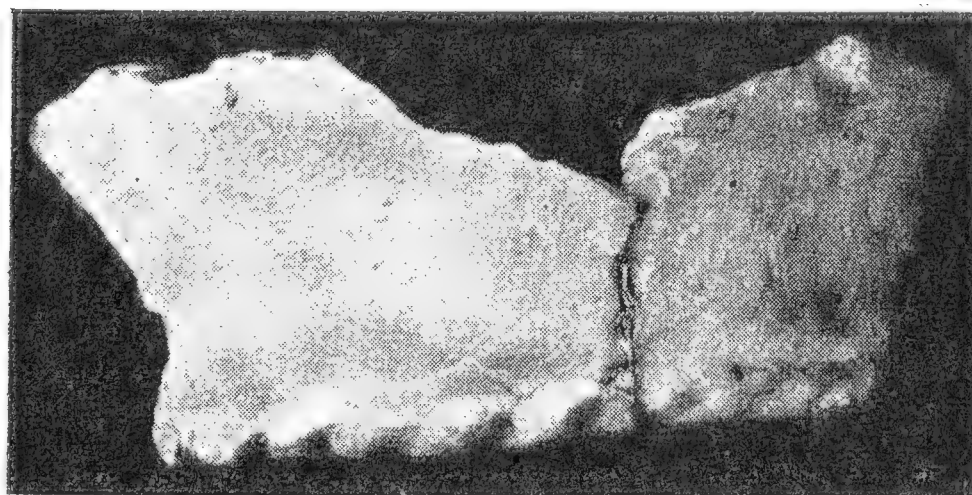



Fig. 4 ($^1/_2$ gr. nat.).

obliqui (figg. 3, 4, 5) stati fatti nella parte marginale rialzata esterna del fondo della ciotola, quali pure esistono in certe stoviglie della stazione di Alba. Invece sulla superficie esterna superiore o media dei vasi sonvi spesso speciali solchi a zig-zag,

Fig. 5 ($^1/_2$ gr. nat.).

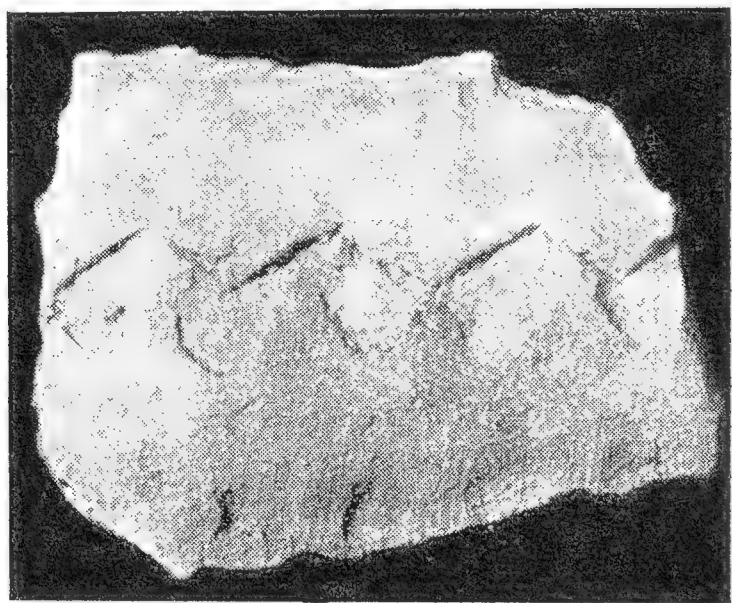



Fig. 6 ($^1/_2$ gr. nat.).

semplici (fig. 6) o doppi (fig. 7), di rado accompagnati da un solchetto lineare; cioè con ornamentazioni analoghe a quelle di certi vasi raccolti in Piemonte nella Torbiera di Mercurago, nella stazione neolitica di Alba, ecc. e che del resto riveggonsi in certe Palafitte, per es. del Veneto, probabilmente già del primo periodo del bronzo.

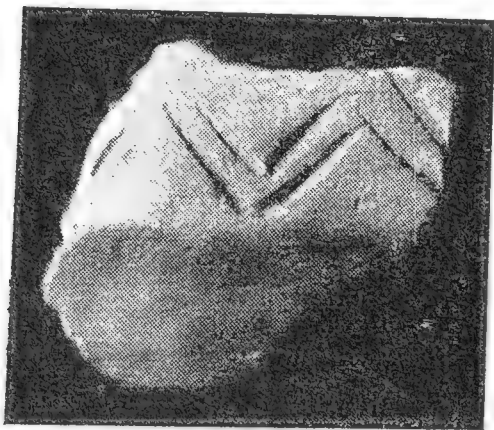



Fig. 7 ($^1/_2$ gr. nat.).

La superficie esterna ed interna di questi manufatti è generalmente liscia o quasi liscia, talora però presentasi finamente ma irregolarmente striatellata (figg. 2, 6), ciò che sembra interpretabile non come ornamentazione, ma semplicemente per fregagione fatta dal vasaio con una specie di tessuto grossolano nel foggiare e levigare la ciotola.

Per tali ornamentazioni primitive il vasaio usò sia semplicemente la punta delle dita (come per certe scodelline irregolari interpretabili come impronte digitali), sia punte di legno o di osso (come per i solchi), sia il calcaneo di un Cervide (animali che dovevano abbondare allora in queste regioni) che

fu infatti trovato assieme a detti cocci con apparenza di oggetto assai maneggiato e la cui punta sembra adattarsi a certi incavi dei cocci, ma che può forse anche essere stato adoperato per altro scopo (fig. 8).

b) Vasi, foggiati più o meno ad anfora o simile, di pasta relativamente fine, brunastri (1), più o meno panciuti o angolosi (fig. 9), ben levigati, a base generalmente stretta (per quanto a margine un po' esteso) piatta o convessa (fig. 10);

Fig. 8 ($^1/_2$ gr. nat.).

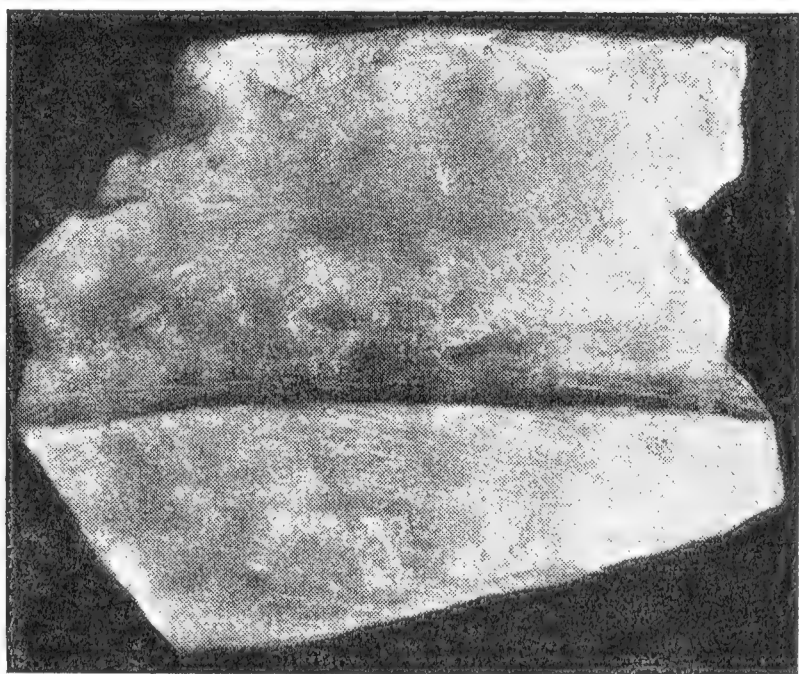



Fig. 9 ($^1/_2$ gr. nat.).

nella parte superiore tali vasi vanno rapidamente restringendosi in modo da presentare all'esterno una specie di ampia gronda circolare, più o meno incavata, limitata in basso da una angolosità mentre in alto essa costituisce il margine un po' espanso, svasato, dell'apertura del manufatto (fig. 11); più di rado il vaso presenta invece nella sua parte esterna, media, una specie di cordone depresso, circolare; non vi appaiono speciali ornamentazioni, salvo, raramente, qualche seghettatura del margine o bocca del vaso.

(1) La tinta bruna sembra originata da una specie di spalmatura di materiale argilloso impuro ricco di ossido di ferro assieme ad un po' di materiale carbonioso.

Vasi di forma un po' analoga furono trovati in Piemonte presso Sesto-Calende, nelle torbiere di Mercurago, ecc.; essi hanno una fisionomia un po' meno antica delle grossolane stoviglie rossastre, ricordando fittili analoghi dell'epoca del bronzo; ma la mescolanza dei due tipi di vasellame in sito non parrebbe appoggiare l'idea di una vera successione dell'uso del tipo fine a quello del tipo grossolano, ma piuttosto, in generale, di un uso promiscuo o quasi.

Dall'esame complessivo di questo materiale sembra che si possa dedurre trattarsi dei residui di un cosidetto *fondo di capanna* del periodo neolitico superiore passante al periodo del bronzo (se pure non è già attribuibile a quest'ultimo periodo),

Fig. 10 ($^1/_2$ gr. nat.).

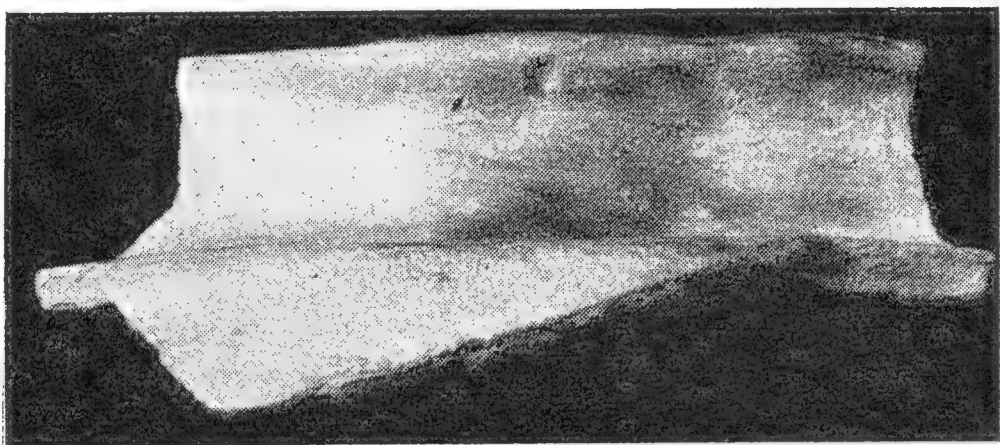



Fig. 11 ($^1/_2$ gr. nat.).

mostrando varie analogie con residui di stoviglie dei depositi dei palafitticoli, il cui periodo di maggior sviluppo corre appunto dalla fine del Neolitico a tutto il periodo del Bronzo.

Notisi che non solo i disegni sovraccennati, ma anche la mescolanza dei due tipi ceramici, uno di pasta grossolana rossastra e l'altro di pasta fine brunastra, si riscontrano pure nella famosa stazione neolitica di Alba, in certe Palafitte, e del resto nello stesso Neolitico di Creta sotto il Palazzo di Knoss, ecc. corrispondendo il fatto, sia a due usi diversi (cioè grossolani e fini), come permane qualcosa d'analogo anche oggigiorno, sia a due provenienze o fabbriche diverse, una più o meno locale, l'altra più o meno lontana.

È però curioso come nella stazione di Sciolze non siasi rinvenuta nessuna di quelle anse o di quei manichi, quali spesso osservansi nelle stoviglie di molte stazioni neolitiche e delle

Palafitte. Del resto è un fatto abbastanza frequente che, pur essendovi grandi somiglianze nei manufatti di depositi diversi anche lontani, ogni stazione preistorica ha generalmente qualcosa di speciale, qualche carattere proprio (per pasta ceramica, per ornamentazione, ecc.), ciò che deve corrispondere ad industrie locali, in rapporto a differenze individuali, cioè direi dell'operaio ceramico, od a materiale argilloso diverso, ecc.

La posizione elevata e dominante del Bricco di Sciolze rende logica e naturale tale abitazione dell'uomo primitivo sui Colli torinesi, lasciandoci supporre che altre consimili già esistettero nelle parti alte di dette Colline, dove però l'erosione naturale, la costruzione e la coltivazione devono averne quasi distrutte generalmente le traccie. Qualche scavo, anche sul Bricco di Sciolze, sarebbe forse opportuno.

***

Anche relativamente scarso è il materiale preistorico di accette, generalmente di Pietre verdi, che trovansi invece abbastanza frequentemente nell'Appennino ligure e nelle Langhe, ma in complesso sempre più raramente nell'Astigiana meridionale (vedi quelle di Vinchio, di Mombercelli, ecc.) ed in quella settentrionale fasciante i Colli di Torino-Casale. Di questa regione è una bella accetta verdognola, di Serpentina, un po' appiattita, della lunghezza di circa 105 millim. per una larghezza massima di circa 40 mm.; da un lato, quello appena sgrossato che doveva servire per l'immanicamento, è tozza ed irregolarmente appuntita; dall'altro, allargato a spatola, costituente la parte utile, è levigata sulle due faccie e tagliente sui margini (fig. 12).

Fu rinvenuta in un vallone a Sud di Sciolze, nella regione detta Castellero, dove si osservarono ruderi romani (1). Accette consimili furono già raccolte nei contorni dalle Colline torinesi: così per. es. l'ascia di cloromelanite trovata dalla Sig.ra Gastaldi

(1) Trovasi ora nel R. Museo di Antichità di Torino al quale fui lieto offrirla.

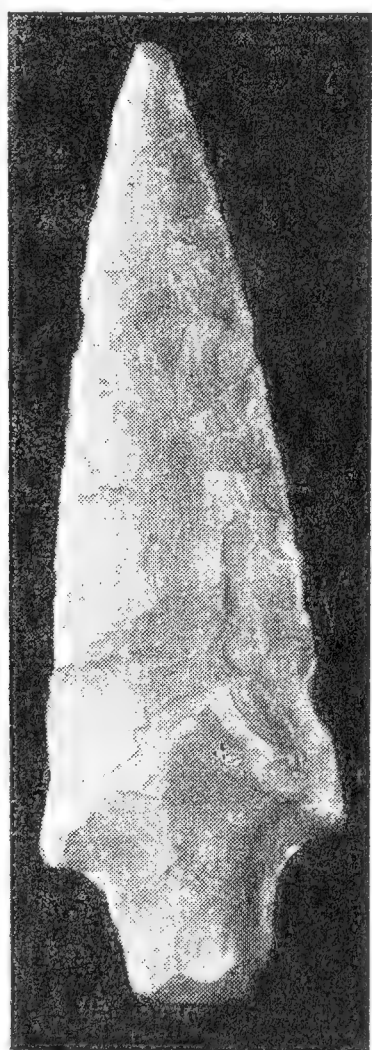
presso Moriondo torinese (vedi Gastaldi, 1876); una accetta di Anfibolite granatifera con bellissimo taglio, lunga cent. 11 e $^1/_2$ e larga cent. 5 circa, raccolta nel 1904 presso Torre del Pino torinese (vedi Barocelli, 1919); un'analoga accetta di Anfibolite granatifera presso Mombello, ed altra nei dintorni di Ceresole d'Alba; un'ascia di Diorite afanitica (vedi Gastaldi, 1876), raccolta sui fini del territorio di Torino nell' argilla superficiale che ammanta le falde dei Colli torinesi sulla destra del Po presso la borgata Sassi in un grande scavo fatto per estrazione di materiale da mattoni; una bella accetta di Serpentina, levigata, a margine tagliente (lunga cent. 10 e larga cent. 5 circa), trovata in Valle Andona (Vedi Barocelli, 1919); quivi fu pure raccolta una specie di accetta, subtriangolare, grossolana, di Calcare bianco dolomitico cristallino, a margine irregolarmente tagliente, larga circa 15 cent. per 7 di altezza (Vedi le " Note di Paletnografia piemontese „ (1919) di Barocelli); un' ascia raccolta nelle colline di Refrancore (tra l'Astigiana ed il Casalese), regione assai interessante perchè vi si trovarono pure cuspidi di selce e, secondo l'archeologo Maggiora-Vergano, sul fondo di Val Gaminella vi si sarebbero scoperti anticamente alcuni residui di palafitte.

Fig. 12 (gr. nat.).

Così pure ascie analoghe a quella sovracitata di Sciolze si raccolsero sia nelle torbiere di Borgo Ticino, di S. Giovanni del Bosco, ecc., sia anche nelle regioni di pianura circostante ai Colli torinesi, così a Caresana presso Vercelli, a S. Germano di Pinerolo, ecc.

***

Pure poco frequente sui Colli torinesi sono i rinvenimenti di punte di selce, ad uso di freccia o di punta di lancia o di coltello.

Trovai alcuni anni fa una Cuspide di selce assai ben lavorata a scheggiatura, taglientissima ai margini, ben conservata, appena rotta all'estremità del restringimento basale (lunga circa 65 millim., larga al massimo 21 millim., con spessore di circa

Pig. 13 (gr. nat.).

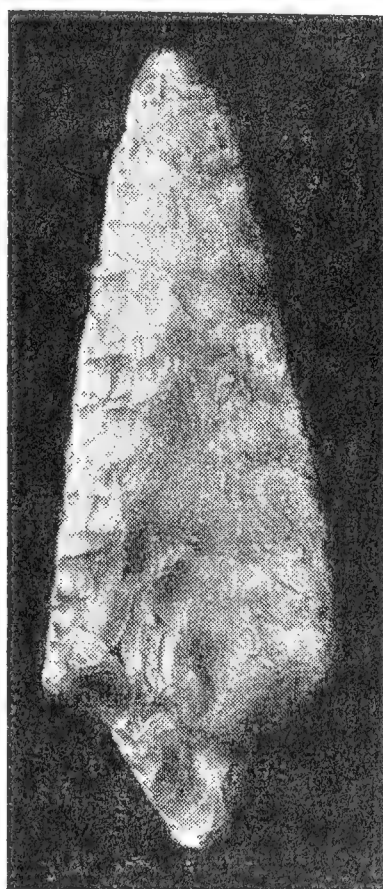



Fig. 14 (gr. nat.).

6 millim.); giaceva alla superficie del terreno in una vecchia stradicciola incisa in una zona sabbiosa fossilifera del Miocene, presso la C. Morra a Sud di Cinzano (fig. 13) (1).

Ricordo che un'altra punta di selce si raccolse nella collina di Ozzano (come già accennai a pag. 634 del lavoro sopra i *Bac. terz. Piemonte* [1889]), ed altre nelle colline di Refran-

(1) È ora conservata nel R. Museo di antichità a cui mi feci dovere di offrirla.

core, di foggia analoga a quelle trovate nelle torbiere delle colline moreniche (per es. a Mercurago), oltre che nella regione di piaɯura (per es. nel Vercellese).

Ricordo qui incidentalmente che pochi anni fa potei acquistare un'analoga Cuspide di selce (che qui riproduco per comparazione) (fig. 14) stata raccolta nell'alluvione sabbiosa superficiale presso l'ultimo pozzo (verso monte) della Condotta dell'acqua potabile del Sangone, tra Sangano e Trana all'incirca. È conservata nel Museo geologico del Politecnico di Torino, al quale credetti mio dovere di offrirla per il suo punto di rinvenimento.

Per chiudere l'esame dei resti dell'uomo preistorico rinvenuti nei Colli torinesi è da ricordarsi il frammento di anello di Serpentina stato raccolto nelle Colline di Chieri andando verso Villa Isnardi (V. Gastaldi, "Framm. di Paleoetn. ital." del 1876), e specialmente lo splendido pseudoanello ornamentale largo, piatto, verde, di Cossaite (varietà sodica di Onkosina), già illustrato dal Gastaldi in detto lavoro, e stato rinvenuto, sui fini del territorio di Torino, presso borgata Sassi, scavando, per materiale da laterizi, l'argilla impura giallo-rossastra che ammanta spesso le falde delle Colline di Torino sulla destra del Po. Tali oggetti ornamentali debbono però già riferirsi ad un'epoca abbastanza avanzata del periodo dei metalli.

Concludendo, dai pochi resti sovraccennati si può dedurre che, date le condizioni climatiche ed idrografiche delle Colline torinesi, l'uomo vi potè solo giungere, ed in numero limitato, nel periodo neolitico, essenzialmente come cacciatore proveniente specialmente dall'Appennino ligure (tanto favorevole allo sviluppo dell'uomo primitivo pel suo clima, per le sue caverne, ecc.) attraverso le Langhe, l'alto Monferrato ed il Tortonese; costruì qua e là più o meno presto misere capanne o consimili stazioni all'aperto sull'alto di certe colline più adatte per abitazione, estesa visione e conseguente difesa; continuò poi lentamente lo sviluppo umano in queste regioni collinose nel periodo dei metalli, mai però con molta intensità, come pare indicare la relativa scarsezza di resti preistorici di tale periodo riscontrati finora in tali regioni collinose, finchè si giunse alla penetrazione romana.

Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari

Nota di ALESSANDRO TERRACINI

Presentata dal Socio nazionale residente C. Segre.

Le superficie che godono della proprietà indicata nel titolo sono già state considerate, con maggiore o minore ampiezza, da vari Autori [1]. Qui esse, nel Capitolo II, sono studiate sistematicamente, e in modo particolare dal punto di vista del loro comportamento nelle trasformazioni per congruenze W, che dà luogo a un elegante teorema di permutabilità. Il metodo adoperato è quello della geometria infinitesimale sintetica. Ho anche stabilito per la stessa via (nel Capitolo I) quei teoremi fondamentali sulla teoria generale delle congruenze W, che poi occorreva applicare; sia per la compiutezza della ricerca sintetica, sia perchè mi pare che da tale trattazione l'intima ragione geometrica di alcune teoremi, ormai classici, esca meglio lumeggiata che non dalle precedenti dimostrazioni analitiche.

---

[1] Per indicazioni bibliografiche rimandiamo alle opere citate nella mia Nota: *Sulle superficie le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe*, "Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena", serie V, vol. V (1919-20), dove ho determinato esplicitamente le superficie coi due sistemi di asintotiche in complessi lineari; citiamo inoltre LAGALLY, *Ueber Flächen mit sphärischen Krümmungslinien...*, Inaugural Dissertation, München, 1903. Per altre citazioni cfr. FUBINI e ČECH, *Lezioni di geometria proiettiva differenziale* (in preparazione).

Quanto ai teoremi del Capitolo I, essi sono tutti noti: in particolare ricordiamo che quelli dei nⁱ 2, 3 e 5 si trovano, dimostrati analiticamente, in BIANCHI: *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*, "Rend. del Circ. Matem. di Palermo", t. XXV (1908).

Capitolo I.

Alcune proprietà fondamentali delle congruenze W dal punto di vista della geometria sintetica.

§ 1. — Sulle trasformazioni asintotiche delle curve.

1. — È ben noto che due curve sghembe si dicono trasformate asintotiche l'una dell'altra quando sono asintotiche su una stessa rigata, vale a dire quando sono riferite fra loro in modo che il piano osculatore a ciascuna delle due curve in un suo punto generico passi per il punto corrispondente dell'altra.

Nel seguito avremo a considerare delle quaterne di curve (A), (B), (C), (D), tali che ciascuna è in trasformazione asintotica con la consecutiva, e l'ultima con la prima, in modo che partendo da un punto generico A della curva (A) si giunge con quelle successive trasformazioni, per il tramite dei punti B, C, D rispettivamente appartenenti alle curve (B), (C), (D), proprio di nuovo al punto A. Una tale quaterna sarà brevemente designata col termine di *quaterna di curve in trasformazione asintotica.*

È chiaro che quattro punti omologhi di una tale quaterna non possono essere sempre complanari, senza essere sempre tutti e quattro allineati.

2. — *Se* (A), (B), (C), (D) *è una quaterna di curve sghembe in trasformazione asintotica, la rigata* (AB) *luogo della retta* AB, *e quella* (CD) *luogo della retta* CD *sono falde focali di una congruenza* W (per la quale quelle generatrici sono corrispondenti).

Il teorema è evidente nel caso che quattro punti corrispondenti A, B, C, D siano sempre allineati, e che perciò le quattro curve considerate siano asintotiche di una stessa rigata; la congruenza W in questione essendo in questo caso costituita dalla congruenza (a falde focali coincidenti) delle tangenti alle asintotiche curve di questa rigata.

Nella ipotesi opposta, se A_1, B_1, C_1, D_1 è una quaterna di punti corrispondenti delle quattro curve infinitamente vicina

alla A, B, C, D, le quattro rette AB, $A_1 B_1$, CD, $C_1 D_1$ appartengono alla congruenza lineare H avente per direttrici le rette $B C_1$, $B_1 C$ (sghembe fra loro, perchè se no la retta BC descriverebbe una sviluppabile); come risulta osservando che ciascuna delle quaterne A_1, B_1, C_1, B; A, B, C, B_1; B, C, D, C_1; B_1, C_1, D_1, C è costituita da punti complanari. Per un motivo analogo, le stesse quattro rette appartengono alla congruenza lineare K avente per direttrici le rette sghembe $A D_1$ e $A_1 D$. Anzi, siccome le rette direttrici delle due congruenze lineari H e K si possono ritenere distinte, e a due a due sghembe fra loro — in accordo con la circostanza che A, B, C, D non sono complanari —, ne viene che le quattro rette AB, $A_1 B_1$, CD, $C_1 D_1$ appartengono ad una schiera rigata (non degenere). L'asserto risulta pertanto dimostrato, la congruenza W essendo appunto quella descritta da questa schiera al variare del punto A.

È poi ovvio che *alle asintotiche curve* (A) *e* (B) *della rigata* (AB) *corrispondono sulla* (CD) *rispettivamente la* (D) *e la* (C).

3. — *Se delle tre curve sghembe* (A), (B), (C) *la prima e la terza sono trasformate asintotiche della seconda, esistono* ∞^1 *curve sghembe* (D), *ciascuna delle quali forma con le tre precedenti una quaterna* (A), (B), (C), (D) *di curve in trasformazione asintotica.*

Lasciamo a parte il caso ovvio che tre punti A, B, C corrispondenti siano sempre allineati. Allora, mantenendo le notazioni di prima, e chiamando p. es. α il piano osculatore in A alla curva (A), una curva (D) che soddisfaccia alla condizione richiesta deve essere ricercata — in base al teorema del n. 2 — fra le asintotiche di una rigata (a) luogo di una retta a del fascio $A\alpha$, tale che appartengano a una schiera le rette BC, $B_1 C_1$, a e la generatrice a_1 della (a) uscente da A_1. Effettivamente, fissata per A una posizione generica, e condotta arbitrariamente la a nel fascio $A\alpha$ (cioè presa arbitrariamente la a fra le rette *osculanti* la (A) in A), la congruenza lineare avente per direttrici $A_1 B$ e $A B_1$ contiene da un lato le tre rette a, BC e $B_1 C_1$ (perchè la a e la $A_1 B$ stanno entrambe in α, e per motivazioni analoghe a quelle del n. precedente), e, con esse, la schiera rigata cui esse appartengono; e d'altro lato il fascio $A_1 \alpha_1$; perciò quella schiera e questo fascio hanno in comune una

retta a_1. Analogamente a_1 definisce una ulteriore retta della (a). L'asintotica della (a) corrispondente alla linea (C) della rigata descritta da BC si può assumere come linea (D).

L'arbitrarietà della soluzione dipende dalla arbitrarietà della scelta della retta iniziale a nel fascio $A\alpha$. — Da quanto si è detto risulta anche che nel modo esposto si ottengono tutte le possibili linee (D).

§ 2. — Il teorema di permutabilità per le trasformazioni asintotiche fra superficie rigate.

4. — Adottiamo la denominazione, ormai diffusa, secondo la quale le due superficie focali di una congruenza W si dicono ciascuna trasformata asintotica dell'altra. Inoltre, intendiamo definita la locuzione di *quaterna di superficie in trasformazione asintotica* in modo del tutto conforme a quello stabilito per le curve al n. 1.

5. — *Se di tre superficie rigate* [2] (a), (b), (c) *la prima e la terza sono trasformate asintotiche della seconda, esistono* ∞^1 *rigate* (d) *ciascuna delle quali forma con le tre precedenti una quaterna* (a), (b), (c), (d) *di rigate in trasformazione asintotica. Inoltre, se* (A), (B), (C), (D) *è una quaterna di curve in trasformazione asintotica, e le tre rigate* (a), (b), (c) *dell'enunciato contengono come asintotiche rispettivamente le tre prime curve* [3], *fra le rigate* (d) *ve n'è una che contiene come asintotica la* (D) [4].

Indico (mantenendo per il resto le precedenti notazioni) con a, b, c tre generatrici corrispondenti delle rigate date, con a_1, b_1, c_1 la terna delle generatrici corrispondenti infinitamente vicina, e cogli stessi simboli i punti rappresentanti quelle rette sulla V_4^2 rappresentativa dello spazio rigato in S_5, V_4^2 che, qui in seguito, designeremo con Φ.

---

[2] Qui, e in seguito, si intendono escluse le sviluppabili.

[3] s'intende, in modo che p. es. la trasformazione asintotica fra (a) e (b) subordini fra (A) e (B) proprio la trasformazione asintotica da cui queste due curve sono legate nella quaterna.

[4] con un'avvertenza analoga alla precedente.

Anzitutto, dico che ognuna fra le rette d va ricercata nella schiera individuata dalle corrispondenti rette a, b, c. Infatti, nello S_5 della Φ, dalla circostanza che ciascuna delle due quaterne di punti $a, a_1, b, b_1; b, b_1, c, c_1$ sta in un piano, segue che i sei punti considerati stanno in uno S_3 (5), e perciò i punti a, b, c stanno nei piani di una sviluppabile ordinaria: se anche i corrispondenti punti d non stessero in tali piani, per la retta ac (sempre in S_5) passerebbero i piani di due fra queste sviluppabili, ciò che importerebbe, nello spazio ordinario, che le rigate (a) e (c) sarebbero costituite di rette osculanti una stessa linea sghemba (cfr. la nota (5)).

Ciò posto, riferiamoci alla seconda parte dell'enunciato. La schiera rigata delle tre rette a, b, c (osculanti rispettivamente la linea (A) in A, ecc.) contiene come generatrice una retta d osculante in D la (D); infatti ciascuna di quelle tre rette incontra e la AC e la BD, cosicchè per D passa una retta della loro schiera, che, incontrando la AC, viene a stare nel piano osculatore alla (D) in D. — Allora, la congruenza lineare cui appartengono le rette a, a_1, b, b_1, c, c_1 contiene anche la retta d e l'infinitamente vicina d_1; e siccome, inoltre, le quattro rette a, a_1, d, d_1 stanno nella congruenza lineare che ha per direttrici AD_1 e A_1D, congruenza distinta dalla precedente, così le quattro rette a, a_1, d, d_1 stanno in una schiera.

Così risulta dimostrato che la rigata (d) costruita a partire da una qualsiasi fra le ∞^1 curve (D) che, insieme con tre asintotiche corrispondenti $(A), (B), (C)$ rispettivamente di $(a), (b), (c)$, dà una quaterna in trasformazione asintotica, è trasformata asintotica della (a), corrispondendosi generatrici come la a e la d. Un risultato analogo vale per (d) e (c).

Per completare la dimostrazione, occorre però ancora stabilire che le corrispondenze che, in tal modo, vengono poste tra i singoli punti di una generatrice d e quelli delle corrispon-

---

(5) e, si può supporre, non in uno spazio meno ampio; perchè allora (nello spazio ordinario) o la schiera abc risulterebbe fissa, ciò che è assurdo, oppure le tre rigate (a), (b), (c) sarebbero costituite da rette osculanti una stessa linea sghemba. In questo caso, particolarissimo, e così in quello che anche solo (a) e (c) fossero costituite in tal modo, il ragionamento va completato diversamente.

denti a e c sono tali che da ogni punto di d si torna al punto stesso attraverso i consecutivi passaggi per i punti corrispondenti di a, b, c. Ora la corrispondenza della d in sè che prende origine in tal modo è evidentemente una proiettività, per la quale sono uniti il punto D e anche ciascuno dei due punti (eventualmente coincidenti) in cui d si appoggia alle due rette direttrici della congruenza lineare $aa_1 bb_1 cc_1 dd_1$; la proiettività è dunque identica.

§ 3. — Sulle congruenze rettilinee W in generale.

6. — Se due superficie (γ) e (δ) sono l'una trasformata asintotica dell'altra, in modo che alle asintotiche γ di un (primo) sistema sulla superficie (γ) corrispondano le δ sulla (δ), le rigate R(γ) e R(δ) delle tangenti principali del secondo sistema nei punti di due asintotiche corrispondenti del primo sistema sono sempre trasformate asintotiche l'una dell'altra (s'intende, in modo da subordinare fra quelle due asintotiche la stessa corrispondenza puntuale subordinata dalla corrispondenza fra le due superficie date).

Basta, per verificarlo, applicare il teorema del n. 2 a due coppie di asintotiche corrispondenti infinitamente vicine (le quali formano precisamente una quaterna di curve in trasformazione asintotica) ([6]).

7. — *Se due superficie sono l'una trasformata asintotica dell'altra, le coordinate di una retta che descriva la congruenza* W *di cui esse sono le falde focali sono soluzioni di una stessa equazione di Laplace* (le cui caratteristiche corrispondono alle asintotiche di quelle superficie).

Basterà mostrare che le rette della congruenza W uscenti dai vertici di un quadrilatero infinitesimo p. es. della prima

---

([6]) Nel caso che una, o entrambe le superficie (γ) e (δ) siano rigate, essendo rettilinee proprio le asintotiche dei sistemi considerati, bisogna modificare la dimostrazione. Per es., si può ancora ricorrere allo stesso teorema del n. 2, dopo aver stabilito che esso vale ancora quando a qualcuna delle curve sghembe in esso considerate, con le sue rette osculanti, si sostituisce una retta considerata come asse di una congruenza lineare speciale.

superficie determinato da due asintotiche infinitamente vicine di un sistema e due dell'altro, appartengono ad una schiera (perchè da ciò segue appunto l'enunciato, mediante il passaggio per il consueto S_5).

Sotto questa forma, il teorema è vero se le due superficie date, siano esse Σ e Θ, sono entrambe quadriche. Infatti, se esse sono anche solo rigate qualunque, le rette della congruenza W in questione uscenti dai punti di una generatrice stanno in una schiera, e due consecutive fra queste schiere stanno in una congruenza lineare. Per le quadriche, applicando l'osservazione ai due sistemi di generatrici, se ne trae appunto l'enunciato.

Se Σ e Θ sono rigate qualunque, il teorema è ancora vero, come si vede sostituendo a esse le relative schiere quadriche osculatrici lungo generatrici corrispondenti. Invero, tali due schiere (che hanno in comune una coppia di rette) sono a loro volta falde focali di una congruenza W, che subordina la medesima corrispondenza che la originaria congruenza W fra i punti di quelle due generatrici, e anche fra quelli della coppia di generatrici corrispondenti infinitamente vicina a quella. Perciò, essendo il teorema già dimostrato per queste due schiere quadriche, segue che esso vale anche per Σ e Θ.

Finalmente, se Σ e Θ sono superficie qualunque, si applica anzitutto ad esse l'osservazione del n. 6: allora (con quelle notazioni) p. es. la rigata $R(\gamma)$ ha in comune con $\Sigma \equiv (\gamma)$ due asintotiche γ infinitamente vicine, e le tangenti principali del secondo sistema nei punti di γ. Perciò, siccome in base al precedente capoverso la proprietà da dimostrare sussiste già per $R(\gamma)$ e $R(\delta)$, essa si trasporta, per il loro tramite, alle superficie originarie.

Viceversa, *se le coordinate delle rette di una congruenza sono soluzioni di una stessa equazione di Laplace (non parabolica), sulle sue falde focali Σ e Θ si corrispondono le asintotiche.*

Basta verificare che se, per es. sulla Σ, esistono due sistemi ∞^1 di linee (corrispondenti alle caratteristiche di quella equazione di Laplace), tali che le quattro rette della congruenza che escono dai vertici di un quadrilatero infinitesimo della Σ determinato da due linee infinitamente vicine di un sistema e da due dell'altro appartengono sempre ad una schiera, quei due sistemi coincidono con quelli delle asintotiche. Ora, chiamiamo P

un punto generico della Σ, P_1 e P_2 i punti ad esso infinitamente vicini rispettivamente su una linea del primo, o del secondo sistema (rispettivamente linea λ e linea μ) e μ_1 la linea del secondo sistema uscente da P_1. Dalle ipotesi fatte segue che le due rigate delle rette della congruenza uscenti dai punti di μ e da quelli di μ_1 sono trasformate asintotiche l'una dell'altra, corrispondendosi le generatrici che escono dai punti di una stessa linea del primo sistema (p. es. da P e da P_1). Queste due rigate, $\rho(\mu)$ e $\rho(\mu_1)$, sono tangenti alla Σ rispettivamente lungo μ e lungo μ_1; cosicchè il piano tangente alla $\rho(\mu)$ in P passa per P_1, cioè incontra proprio in P_1 la generatrice di $\rho(\mu_1)$ che esce da questo punto; vale a dire, il punto di $\rho(\mu_1)$ corrispondente al punto P della $\rho(\mu)$ è proprio P_1. Perciò la retta PP_1 è tangente in P e in P_1 rispettivamente a $\rho(\mu)$ e a $\rho(\mu_1)$; dunque essa si può considerare come intersezione dei piani tangenti in quei punti a quelle rigate, e perciò alla stessa Σ. La retta PP_1 è pertanto tangente principale della Σ; e i due sistemi di linee considerati sono proprio quelli delle asintotiche.

8. — Il teorema di permutabilità per trasformazioni asintotiche di superficie qualunque.

Se di tre superficie la prima e la terza sono trasformate asintotiche della seconda, esistono ∞^1 superficie ciascuna delle quali si può considerare come una quarta superficie, che con le tre precedenti forma una quaterna in trasformazione asintotica (7).

Chiamando (α), (β), (γ) le tre superficie date, nell'ordine, corrispondendosi su esse le asintotiche α, β e γ, si fissino le asintotiche corrispondenti $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, e si considerino le rigate $R(\alpha_0)$, $R(\beta_0)$, $R(\gamma_0)$ definite come sopra. Di queste tre rigate, per l'osservazione del n. 6, la prima e la terza sono trasformate asintotiche della seconda. Se δ_0 è una qualsiasi fra le ∞^1 curve che (v. n. 3) con $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ costituiscono una quaterna in trasformazione asintotica, esiste (n. 5) una rigata $R(\delta_0)$ che contiene δ_0 come asintotica, tale che la quaterna di rigate $R(\alpha_0)$, $R(\beta_0)$, $R(\gamma_0)$, $R(\delta_0)$ è in trasformazione asintotica: sia δ_1 la sua asin-

(7) La dimostrazione che segue presuppone che si tratti di superficie non rigate: nell'ipotesi contraria essa va modificata.

totica corrispondente alle asintotiche $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ infinitamente vicine ad $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Analogamente si passi da δ_1 ad un'altra linea δ_2 infinitamente vicina, e così via.

Nasce in questo modo un sistema ∞^1 di curve $\delta_0, \delta_1, \delta_2$, ecc. Dico che la superficie loro luogo soddisfa alle condizioni richieste per il teorema di permutabilità. Infatti, anzitutto la superficie appare come inviluppo delle ∞^1 superficie rigate $R(\delta_0)$, $R(\delta_1)$, ecc., avendo per caratteristiche appunto le varie linee δ; perciò, siccome queste sono asintotiche per quelle rigate, tali sono anche per la superficie inviluppo. Poi, la retta che congiunge per es. un punto della δ_1 al corrispondente punto della α_1, tocca ivi $R(\delta_1)$ e $R(\alpha_1)$, quindi anche rispettivamente la superficie costruita è la prima superficie data.

In tal modo, si ottengono tutte le superficie del teorema di permutabilità.

Capitolo II.

Sulle superficie le cui asintotiche di un sistema appartengono a complessi lineari.

9. — *Se una falda focale di una congruenza rettilinea* W *è una rigata sghemba* (g), *sulla seconda falda focale le asintotiche corrispondenti alle generatrici rettilinee di* (g) *appartengono — in quanto non siano esse pure rettilinee — a complessi lineari* [8].

Se infatti γ è una di queste asintotiche e g la corrispondente generatrice di (g), la considerazione delle ∞^1 rette della congruenza che hanno i loro fuochi rispettivamente su queste due linee mostra che per ogni punto della curva γ, entro il corrispondente piano osculatore, passa una retta di una congruenza lineare fissa; ciò che è sufficiente a dedurne l'appartenenza di γ a un complesso lineare.

---

[8] Cfr. anche per la dimostrazione che segue il n. 2 di Segre: *Sulle congruenze rettilinee* W *di cui una od ambe le falde focali sono rigate,* "Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino", vol. XLIX (1913).

10. — Sussiste anche il teorema inverso [9]: precisamente, *se* (γ) *è una superficie le cui asintotiche curvilinee* γ *di un sistema appartengono a complessi lineari, essa è trasformata asintotica di* ∞ *rigate sghembe (le cui rette generatrici corrispondono proprio a quelle asintotiche). Ogni retta generica dello spazio è contenuta* (come generatrice) *in una almeno fra queste rigate.*

Chiamo Γ il complesso lineare cui appartiene un'asintotica generica γ; e cerco se è possibile scegliere, entro ognuno degli ∞^1 complessi lineari Γ, una sua retta g in modo che la superficie rigata (g) che è luogo di g venga a godere della proprietà che la congruenza lineare speciale delle rette ad essa tangenti nei punti di una sua generatrice generica g stia sempre entro il corrispondente complesso lineare Γ.

Per maggior chiarezza, trasportiamo il problema nello S_5 della Φ rappresentativa delle rette dello spazio; e consideriamo, in esso, la linea (P_Γ) luogo dei poli — rispetto alla Φ — degli ∞^1 S_4 immagini dei complessi Γ. La ricerca della rigata (g) si traduce nella ricerca di una linea (g) tracciata sulla Φ, tale che la retta ad essa tangente in un suo punto generico g — retta polare dello S_3 immagine della congruenza lineare speciale testè nominata — passi per il polo P_Γ dello S_4 immagine di Γ. Perciò tutto si riduce a far sì che le rette tangenti alla linea (g) si appoggino tutte quante alla linea (P_Γ) (in punti variabili). Ora, se per ogni punto della Φ si immaginano le rette che lo congiungono alle intersezioni del proprio S_4 tangente con la linea (P_Γ), queste rette tangenti inviluppano sulla Φ uno o più sistemi ∞^3 di linee. Ciascuna di queste linee soddisfa alle proprietà richieste per la linea (g), solo che si abbia cura di scartare da esse le rette [10] della Φ appoggiate alla (P_Γ).

---

[9] Questo teorema inverso mi fu comunicato recentemente dal Fubini, con una dimostrazione analitica: un cenno di esso, pure con dimostrazione analitica, si trova in una lettera a me inviata da M. Lagally nel novembre del 1920.

[10] Queste rette non costituiscono che un sistema di dimensione < 3, perchè, se no, la linea (P_Γ) giacerebbe sulla Φ, e questo non può avvenire perchè allora i complessi Γ sarebbero speciali, ciò che non è compatibile con l'ipotesi che le linee γ siano curve. Per questo stesso motivo le linee (g) costruite sono immagini di rigate sghembe (e non sviluppabili).

Ritornando ora allo spazio ordinario, se da un punto P, scelto genericamente su una asintotica γ della superficie (γ), si conduce la retta t del corrispondente complesso lineare Γ appoggiata alla corrispondente retta g di una, fissata arbitrariamente, fra le ∞^3 rigate sghembe (g) ora costruite, è manifesto che questa retta è tangente, non solo alla (γ) nel punto P, ma anche alla rigata (g) nel punto gt. Al variare del punto P su γ, e dell'asintotica γ sulla (γ), la t descrive dunque una congruenza W nelle condizioni richieste.

Dalla dimostrazione risulta anche che *le* ∞^3 *rigate del precedente enunciato non dipendono dalla superficie* (γ) *considerata in sè, ma solo dagli* ∞^1 *complessi lineari* Γ *cui appartengono le sue asintotiche* (fissati i quali, la determinazione di (γ) dipende ancora da una funzione arbitraria; cfr. più avanti il n. 12); e ancora che *due qualunque fra quelle* ∞^3 *rigate sono falde focali di una stessa congruenza* W (corrispondendosi quelle loro generatrici che corrispondono ad una stessa asintotica γ [11]).

Infine, *non esistono altre congruenze* W *delle cui falde focali l'una coincida con la data superficie* (γ) *e l'altra sia rigata, in modo che le rette generatrici della rigata corrispondano alle asintotiche* γ [12]; giacchè se (g) è una rigata che, con la superficie (γ), stia nella relazione richiesta, le rette che toccano le due superficie rispettivamente nei punti di un'asintotica γ e della generatrice corrispondente g costituiscono una rigata tangente a (γ) lungo γ e pertanto contenente γ come asintotica. Perciò tale rigata non può essere una schiera; la congruenza lineare spe-

---

[11] Viceversa, sarebbe facile verificare che è questo il solo caso in cui tre rigate sono a due a due falde di congruenze W non degeneri (cioè non ridotte a sistemi di rette condotte per i punti di una curva nei rispettivi piani osculatori), in guisa che le generatrici corrispondenti si raggruppino in ∞^1 terne.

[12] Invece, può darsi che esistano altre congruenze W le cui falde focali sono la (γ) e una superficie rigata, in modo però che le asintotiche γ corrispondono alle asintotiche *curve* della rigata. È chiaro che ciò avviene quando, e solo quando, sulla (γ) le asintotiche dell'altro sistema (quello non contenente le γ) appartengano esse pure a complessi lineari. E in tal caso, se esse sono curve, esistono ∞^3 (sole) rigate nelle condizioni richieste; se sono rettilinee, quelle rigate, in base a teoremi notissimi, dipendono da una funzione arbitraria.

ciale cui essa appartiene risulta contenuta in Γ, e la superficie (g) è proprio una di quelle dianzi costruite.

11. — Le superficie del tipo considerato — che saranno chiamate brevemente superficie (γ) — godono della proprietà che *due asintotiche* γ *generiche sono fra loro proiettive* (corrispondendosi su esse i punti segati dalle asintotiche dell'altro sistema) [13]. Chiamiamo infatti $R(\gamma)$ la rigata delle tangenti, nei singoli punti di un'asintotica γ, alle asintotiche dell'altro sistema, rigata le cui generatrici appartengono a una congruenza lineare: come è noto e si ritrova anche subito, le asintotiche curvilinee di $R(\gamma)$ (fra cui è appunto la γ) sono fra loro proiettive (corrispondendosi i punti su esse segati alle singole generatrici). Siccome allora la (γ) appare come inviluppo delle ∞^1 superficie $R(\gamma)$, le asintotiche γ essendo le caratteristiche, ne segue la proprietà enunciata.

12. — Volendo costruire una superficie (γ) le cui asintotiche γ di un sistema, generalmente curve, appartengano a complessi lineari, *si possono assegnare ad arbitrio gli* ∞^1 *complessi lineari* Γ *(non speciali) cui debbono appartenere quelle asintotiche, e un'asintotica* γ_0 *appartenente ad un complesso* Γ_0, *prescelto fra quegli* ∞^1: *con ciò la superficie* (γ) *resta pienamente determinata.* Invero, considero la congruenza lineare in cui Γ_0 viene segato dal complesso lineare Γ_1 ad esso infinitamente vicino entro la ∞^1 assegnata, e la rigata della congruenza formata dalle rette di questa che escono dai singoli punti di γ_0. Questa rigata ammette come asintotica γ_0; e le varie sue asintotiche curve appartengono ai vari complessi lineari del fascio $\Gamma_0 \Gamma_1$: essa possiede dunque un'asintotica γ_1 (infinitamente vicina a γ_0) nel complesso lineare Γ_1. Analogamente si passa da γ_1 a un'ulteriore asintotica γ_2; e (γ) viene costruita come luogo delle successive curve $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, ecc., che risultano effettivamente sue asintotiche (cfr. la fine del n. 11). Ed è chiaro che non esistono altre superficie soddisfacenti alle condizioni richieste.

---

[13] La dimostrazione che segue non differisce da quella che, nella mia Nota citata in [1], ho dato per le superficie con le asintotiche dei due sistemi in complessi lineari.

In questo modo poi, *se gli* ∞^1 *complessi* Γ *sono condotti ad arbitrio per le congruenze lineari speciali delle tangenti ad una rigata* (g) *lungo le singole sue generatrici, si ottengono tutte le seconde falde focali delle congruenze* W *di cui* (g) *è prima falda focale.*

13. — Assegnata una superficie (γ) del tipo considerato, le ∞^1 congruenze lineari *caratteristiche* per gli ∞^1 complessi lineari Γ (certo distinte fra loro se le asintotiche dell'altro sistema non sono generalmente rettilinee) dànno luogo a due superficie rigate (g') e (g'') — eventualmente parti di un stessa rigata — luoghi delle loro direttrici g' e g''.

Supponiamo che g' e g'' siano generalmente distinte: cioè che la superficie (γ) non sia fra quelle che più avanti (v. il n. 14) chiameremo *superficie speciali.* Ebbene, attraverso l'interpretazione nello S_5, dove la retta $g'g''$, quale polare di un S_3 variabile in una sviluppabile ordinaria, descrive essa stessa una sviluppabile ordinaria, è chiaro che *le due rigate* (g') *e* (g'') *sono falde focali di una stessa congruenza* W, corrispondendosi su esse appunto due generatrici quali la g' e la g''.

Viceversa, *partiamo da due rigate* (g') *e* (g'') *falde focali di una congruenza* W, *e fissiamo una corrispondenza arbitraria fra i punti di due loro generatrici corrispondenti prefissate,* g_0' *e* g''_0: dico che *esiste una (anzi due) superficie* (γ) *ben determinata, con un sistema di asintotiche,* γ, *in complessi lineari, per la quale le tangenti principali dell'altro sistema si appoggiano a generatrici corrispondenti delle rigate* (g') *e* (g''), *determinando fra* g'_0 *e* g''_0 *proprio la corrispondenza prefissata.* Infatti, l' interpretazione in S_5 mostra intanto l'esistenza di una ∞^1 di complessi lineari Γ inviluppanti la ∞^1 di congruenze lineari aventi per direttrici le coppie del tipo g', g''. Chiamiamo, in particolare, Γ_0 quello fra questi complessi, che ha per congruenza caratteristica la $g'_0\, g''_0$: costruita allora la rigata delle congiungenti punti corrispondenti (nella corrispondenza prefissata) di g'_0 e g''_0, si chiami γ_0 una sua asintotica appartenente al complesso Γ_0 (ne esistono certo due, eventualmente parti di una stessa curva); e si applichi il teorema del n. 12 agli attuali ∞^1 complessi lineari Γ e alla γ_0: la superficie (γ) così ottenuta soddisfa alle condizioni richieste (nè ve ne sono altre).

14. — Nel caso, escluso nel n. precedente, che per una data superficie (Υ) sia sempre $g' \equiv g''$, diremo che la (Υ) è una superficie *speciale*: la particolarità interessa non la superficie considerata in sè, ma la ∞^1 dei suoi complessi lineari Γ.

Tra le superficie trasformate asintotiche di una data rigata (g) *ve ne sono infinite di speciali*: e precisamente *la determinazione dei relativi* ∞^1 *complessi lineari* Γ *dipende da un'equazione di Riccati*. Infatti, nello S_5, la ricerca della linea (P_Γ) luogo dei poli, rispetto alla Φ, degli S_4 rappresentanti i complessi Γ è ricondotta (cfr. la fine del n. 12) alla ricerca di una linea (P_Γ) tracciata sulla sviluppabile circoscritta alla linea (g) della Φ, e tale che le sue tangenti tocchino la Φ stessa. Che l'equazione differenziale ordinaria in cui si traduce la ricerca di tale linea sia di Riccati, risulta dall'osservare che il birapporto dei quattro punti di intersezione di quattro linee (P_Γ) con una retta variabile tangente alla linea (g) è costante; in quanto, per due fra queste rette infinitamente vicine fra loro, quelle due quaterne di punti appaiono come segate su due tangenti di una conica da altre quattro tangenti della medesima conica ([14]).

Se per ognuno degli ∞^1 *sistemi di complessi lineari* Γ che, secondo il teorema precedente, si possono costruire a partire da una data rigata (g) *si immagina la rigata* (g′) *luogo delle direttrici delle congruenze lineari speciali caratteristiche, due qualunque fra queste rigate* (g′) *sono ancora falde focali di una congruenza* W (corrispondendosi rette direttrici che corrispondono ad una stessa generatrice g). Infatti, con le stesse notazioni di sopra, nello S_5, le ∞^1 linee (g') rappresentanti le rigate (g') appaiono come i luoghi dei punti di contatto della Φ con le tangenti alle ∞^1 linee $(P\ )$: se g' e $\overline{g}'$ sono due fra questi punti di contatto, relativi ai punti P_Γ e $\overline{P}_\Gamma$ delle retta t tangente alla linea (g) nel suo punto g, g'_1 e $\overline{g}'_1$ i loro infinitamente vicini rispettivamente sulla (g') e sulla $(\overline{g}')$, λ e λ_1 le coniche segate dalla Φ sul piano osculatore a (g) in g e sull'analogo piano infinitamente vicino (coniche che

---

([14]) Se la rigata di partenza è una schiera (e solo allora) le linee (P_Γ) sono rette (inviluppanti una conica); i complessi Γ sono quelli contenenti una stessa congruenza lineare speciale (fissa, ma arbitraria) di rette tangenti alla schiera lungo una sua generatrice; e le superficie (Υ) relative sono tutte rigate di congruenze lineari speciali.

risultano fra loro tangenti nel punto g di t), si ha che si incontrano su t le rette tangenti a λ e a λ_1 in g' e g'_1, e anche la tangenti in $\overline{g}'$ e $\overline{g}'_1$; donde si trae l'esistenza di una prospettività che muta λ in λ_1, g' e $\overline{g}'$ rispettivamente in g'_1 e $\overline{g}'_1$; restando così provato l'asserto.

Per le superficie (γ) speciali, il teorema del n. 13 viene sostituito dal seguente: *si parta da una rigata qualunque* (g'), *e poi si tracci, in modo generico, una rigata* (r_0) *contenuta in una (qualsiasi) congruenza lineare speciale avente per direttrice una generatrice prefissata* g'_0 *della* (g'): *esiste una superficie* (γ) SPECIALE *ben determinata, con un sistema di asintotiche,* γ, *in complessi lineari, per la quale le tangenti principali dell'altro sistema si ripartiscono fra* ∞^1 *congruenze lineari speciali aventi per direttrici le singole generatrici della* (g'), *in modo che quelle corrispondenti alla* g'_0 *costituiscano precisamente la* (r_0). Invero, la consueta rappresentazione in S_5 mostra intanto l'esistenza di ∞^1 congruenze lineari speciali, fra cui quella che contiene la (r_0), che sono caratteristiche per una ∞^1 di complesse lineari Γ: dopo di che, si può ragionare come al n. 13.

15. — Ritorniamo ora a superficie (γ) qualunque, con un sistema di asintotiche, γ, in complessi lineari; e riprendiamo il primo teorema del n. 12: al variare della linea γ_0 entro il complesso Γ_0, e restando fissi gli ∞^1 complessi lineari Γ, si ottengono infinite superficie, *dipendenti da una funzione arbitraria*, con le asintotiche di un sistema appartenenti a quei complessi lineari. Ebbene, *due qualunque fra quelle superficie sono falde focali di una congruenza* W, corrispondendosi su esse le asintotiche appartenenti ad uno stesso complesso lineare. La verifica è immediata, riducendosi all'osservazione che, se γ e $\overline{\gamma}$ sono due asintotiche di quelle due superficie, siano (γ) e ($\overline{\gamma}$), appartenenti ad uno stesso complesso lineare Γ, una retta condotta da un punto di γ a toccare ($\overline{\gamma}$) in un punto di $\overline{\gamma}$ sta nel complesso Γ e, come tale, tocca la (γ) nel punto di partenza.

In base a osservazioni già fatte (n. 10), *se l'insieme delle superficie testè nominate si completa con l'aggiunta delle* ∞^3 *rigate che sono trasformate asintotiche di una qualunque fra esse, tutte queste superficie sono ancora, a due a due, falde di congruenze* W.

16. — *Ma due superficie* (γ) *e* (δ), *ciascuna delle quali abbia le asintotiche di un sistema* (rispettivamente γ e δ) *appartenenti a complessi lineari* (rispettivamente Γ e Δ), *possono,* come ora si vedrà, *essere le falde focali di una congruenza* W (corrispondendosi appunto quei sistemi di asintotiche), *in modo che i complessi lineari delle asintotiche corrispondenti siano generalmente distinti.*

Proponiamoci di trovare appunto tutte le coppie di superficie che si trovano nelle condizioni ora dette.

Anzitutto, *se* (γ) *e* (δ) *sono due superficie nelle condizioni ora esposte,* dico che *le* ∞^1 *congruenze* $\Gamma\Delta$ (intersezioni di complessi lineari corrispondenti) *sono caratteristiche per una* ∞^1 *di complessi lineari.* Infatti (cfr. il n. 7 del Cap. I) le quattro rette della supposta congruenza W uscenti dalle intersezioni di due asintotiche infinitamente vicine, γ e γ_1, del sistema γ, con due asintotiche infinitamente vicine dell'altro sistema — sulla superficie (γ) — appartengono a una schiera rigata. Ciò significa che esiste una congruenza W le cui falde focali rigate (infinitamente vicine) sono costituite dalle rette della primitiva congruenza W uscenti rispettivamente dai punti di γ e di γ_1. Ora, di queste rigate, la prima sta nella congruenza lineare $\Gamma\Delta$, e la seconda nella congruenza lineare infinitamente vicina: ma allora quelle due congruenze lineari, contenendo rispettivamente le due falde rigate di una congruenza W, stanno in un complesso lineare (come è noto, e si verifica subito direttamente ricorrendo alla rappresentazione in S_5).

Prima di procedere, facciamo la seguente osservazione: *se due curve* γ *e* δ, *trasformate asintotiche l'una dell'altra, appartengono rispettivamente ai complessi lineari distinti* Γ *e* Δ, *e se per ognuno dei loro punti, entro il corrispondente piano osculatore, si conduce la retta* [15], *rispettivamente* g *e* d, *appartenente a un complesso lineare prefissato,* H, *si ottengono due rigate* (g) *e* (d) *che sono falde focali di una congruenza* W (la corrispondenza fra le loro generatrici essendo quella data dalla corrispondenza fra γ e δ). Infatti due generatrici infinitamente vicine della (g), g e g_1, uscenti rispettivamente dai punti G e G_1 di γ, e le due

---

[15] o più generalmente *una* retta, se si vuole includere il caso che H coincida con Γ oppure con Δ.

loro corrispondenti della (d), d e d_1, — uscenti da D, D_1 — stanno da un lato nella congruenza lineare avente per direttrici $G D_1$ e $G_1 D$, e d'altro lato nel complesso lineare H che, per posizioni generiche di g, non contiene certo la nominata congruenza lineare ([16]): quindi g, g_1, d, d_1 appartengono ad una schiera rigata.

17. — Ciò posto, prima di dare l'effettiva soluzione del problema posto al principio del n. 16, conviene distinguere le trasformazioni asintotiche fra due superficie (γ) e (δ) del tipo considerato in due classi. In una *prima classe* porremo le trasformazioni asintotiche di cui si è detto al n. 15. Nella *seconda classe* collocheremo invece tutte quelle trasformazioni asintotiche, per le quali asintotiche corrispondenti stanno in complessi lineari generalmente distinti, e anche quelle che, pure appartenendo già alla prima classe, hanno tuttavia in comune con le trasformazioni asintotiche ora nominate la particolarità che ciascuna delle rigate luoghi delle congiungenti punti corrispondenti di un'asintotica γ e di un'asintotica δ sta in una congruenza lineare (anzichè in un complesso lineare, come avviene per le altre superficie della prima classe). Queste ultime trasformazioni stanno dunque contemporaneamente nella prima e nella seconda classe.

Per le trasformazioni della seconda classe, sussiste la seguente proposizione: *assegnata una superficie* (γ) *con un sistema di asintotiche,* γ, *in complessi lineari* Γ, *per trovare nel modo più generale una superficie* (δ) *sua trasformata asintotica della seconda classe, si assuma ad arbitrio, entro ogni complesso* Γ, *una congruenza lineare* C, *in modo che le* ∞^1 *congruenze così ottenute siano caratteristiche per una* ∞^1 *di complessi lineari, e si tracci per ogni punto di ogni asintotica* γ *la retta della corrispondente congruenza* C: *la congruenza* $\mathfrak{g}$ *così ottenuta è una congruenza* W, *e la sua seconda falda focale fornisce la superficie* (δ) *richiesta.*

Nota (γ), *ogni superficie* (δ) (la cui determinazione dipende da una funzione arbitraria) *si ottiene (senza quadrature) con sole operazioni di derivazione.*

([16]) Infatti, ne seguirebbe che ad H apparterrebbero entrambe le curve γ e δ, contro l'ipotesi.

Che, chiamando C le congruenze lineari in cui stanno le rigate congiungenti i punti corrispondenti di un'asintotica γ e della omologa $\mathfrak{d}$ (vale a dire le congruenze $\Gamma\Delta$, se $\Gamma \not\equiv \Delta$), esse si debbano scegliere come nel precedente enunciato, risulta dal primo teorema del n. 16 (che, con la sua dimostrazione, continua a valere pure per le superficie che appartengono contemporaneamente anche alla prima classe); ed è anche chiaro che, così scelte le C, non si possono ottenere superficie $(\mathfrak{d})$ nelle condizioni richieste, se non col procedimento ora indicato. Per dimostrare poi che effettivamente le superficie dell'enunciato risolvono il problema, si osservi anzitutto che la retta della congruenza $\mathfrak{J}$ uscente da un punto di un'asintotica γ viene a stare certamente in Γ, dimodochè la (γ) è una falda focale della congruenza $\mathfrak{J}$. Poi, le rette di questa congruenza uscenti dai punti di due asintotiche γ infinitamente vicine della (γ) stanno nel complesso lineare H congiungente le relative congruenze lineari C infinitamente vicine tra loro; e quindi costituiscono, secondo l'osservazione finale del n. 16 (applicata a quelle due asintotiche che, appunto, sono trasformate asintotiche l'una dell'altra), le due falde focali di una congruenza W. Perciò le quattro rette della congruenza $\mathfrak{J}$ uscenti dai punti d'intersezione di due asintotiche γ infinitamente vicine con due asintotiche, pure infinitamente vicine, dell'altro sistema, stanno in una schiera; e la congruenza $\mathfrak{J}$ è una congruenza W. Quindi, sulla sua seconda falda focale è asintotica ogni linea $\mathfrak{d}$ luogo dei suoi punti di contatto con le rette di $\mathfrak{J}$ uscenti dai punti di una linea γ. E poichè la rigata di queste rette tocca ovviamente quella seconda falda lungo la $\mathfrak{d}$, ne viene che $\mathfrak{d}$ è anche asintotica su quella rigata; e siccome questa sta nella congruenza lineare C, così la $\mathfrak{d}$ sta effettivamente in un complesso lineare Δ (per C) ([17]).

Quanto alla ricerca effettiva delle superficie $(\mathfrak{d})$, tra le costruzioni a ciò necessarie secondo quanto ora si è dimostrato, la sola per la quale non sia senz'altro evidente che essa non

---

([17]) Il dubbio che le superficie $(\mathfrak{d})$ così costruite rientrino tutte fra quelle del n. 15 si elimina in base al grado di arbitrarietà della soluzione; anzichè da una funzione arbitraria, le superficie $(\mathfrak{d})$ fornite dalla costruzione e rientranti effettivamente fra quelle, dipendono solo da 4 costanti arbitrarie, come si verifica facilmente.

equivale che a operazioni di derivazione, è quella che consiste nel tracciamento delle ∞^1 congruenze lineari C. Ora, la ricerca di queste congruenze, nello S_5 rappresentativo, trasformata con la polarità rispetto alla Φ, equivale alla ricerca di una superficie sviluppabile contenente una curva assegnata (P_H). Si può applicare allora una costruzione indicata, per un altro scopo, dal Prof. Segre [18], che conduce appunto a sole operazioni di derivazione: basta condurre per gli ∞^1 S_3 osculatori di (P_H) altrettanti S_4 e cercarne il terzo inviluppo (luogo delle intersezioni di quattro S_4 consecutivi). La costruzione va modificata se la linea (P_H) sta in uno S_3; ma anche in tal caso si vede facilmente che essa si traduce ancora, analiticamente, in operazioni dello stesso tipo.

Osserviamo infine che, *per le coppie di superficie considerate in questo n., le asintotiche* γ *della* (γ) *sono tutte proiettive alle asintotiche* δ *della* (δ), ciò che subito discende dalla considerazione della rigata che tocca le due superficie rispettivamente secondo una linea γ e la corrispondente linea δ.

18. — Prima di proseguire, dobbiamo fare una breve digressione relativa alle trasformazioni asintotiche fra curve appartenenti a complessi lineari.

Anzitutto, riteniamo suddivise anche queste trasformazioni in due *classi*, in modo del tutto analogo a quello definito al principio del n. 17. Dimostriamo allora che *se, nel teorema del Cap. I n. 3, si suppone che ciascuna delle tre curve* (A), (B), (C) — che riteniamo senz'altro non siano asintotiche su una stessa rigata — *stia in un complesso lineare, ognuna delle* ∞^1 *curve* (D) *sta ancora in un complesso lineare se le trasformazioni asintotiche fra* (A) *e* (B) *e fra* (B) *e* (C) *appartengono alla* STESSA *classe, mentre, se quelle trasformazioni appartengono a classi* DIVERSE, *fra le curve* (D) *ve ne è una e una sola che sta in un complesso lineare.*

Invero, chiamando A, B, Γ rispettivamente i complessi lineari di (A), (B), (C), e (D) una qualsiasi fra le curve del teorema citato,

---

(18) V. il n. 7 della sua Nota: *Le congruenze rettilinee* W *aderenti a due superficie rigate*, "Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino", vol. XLII (1907).

se $A \equiv \Gamma$, le rette DA e CD, osculanti rispettivamente di (A) e di (C), stanno in $A \equiv \Gamma$. E siccome esse sono generalmente distinte, ne segue che il piano polare di D rispetto al complesso lineare considerato è proprio il piano ivi osculatore alla (D). Dunque questa curva — e lo stesso vale, naturalmente, per la (B) — sta in quel complesso lineare.

Si supponga invece $A \not\equiv \Gamma$, e, per ora, che ciascuna delle due rigate (AB), (BC) stia in una congruenza lineare. Dei due complessi A e Γ, uno al più può coincidere con B; supponiamo p. es. che sia $A \not\equiv B$. Allora, se si costruisce la linea (D) col procedimento seguìto nella dimostrazione del Cap. I n. 3, ne risulta che la retta AD appartiene costantemente al complesso lineare che congiunge la sua posizione iniziale con la congruenza lineare cui appartengono, per ipotesi, le generatrici della (BC). E siccome la retta AD sta anche nel complesso A, ne segue che la (AD) sta in una congruenza lineare; e perciò la (D), che è una sua asintotica, sta in un complesso lineare. Il ragionamento cadrebbe soltanto se il complesso A contenesse la congruenza lineare a cui, per ipotesi, appartengono le generatrici della rigata (BC): ma questo caso non si può presentare, perchè allora la rigata (AB), contenuta nella congruenza intersezione dei due complessi lineari A e B, entrambi contenenti la congruenza lineare di (BC), e la rigata (BC) starebbero in una stessa congruenza lineare, e le curve (A), (B), (C) sarebbero asintotiche su una stessa rigata, contro l'ipotesi.

Finalmente si faccia l'ultima ipotesi che resta possibile: che cioè sia $A \not\equiv \Gamma$, e p. es. $A \equiv B$, in modo però che la rigata (AB) non stia in una congruenza lineare. Allora, se la (D) deve stare in un complesso lineare Δ, questo complesso appartiene al fascio $B\Gamma$, perchè nell'ipotesi opposta la congruenza lineare $\Gamma\Delta$ cui apparterrebbe la rigata (CD) trasformata asintotica della (AB) verrebbe a stare nel complesso B, contro l'ipotesi. Però è certo $\Delta \not\equiv A$, perchè, se no, il ragionamento esposto nel primo capoverso della dimostrazione porterebbe a conchiudere $B \equiv \Gamma$. Quindi la rigata (AD) sta in una congruenza lineare, $A\Delta$, che coincide con quella cui appartiene (BC). Da tutto questo risulta che, volendo che una linea (D) ottenuta a partire da (A), (B), (C) col procedimento del Cap. I n. 3 stia in un complesso lineare, occorre — con le notazioni di quel n. — scegliere inizialmente

la retta a (osculante la (A) nel suo punto prefissato genericamente A) nella congruenza $\mathsf{B}\,\Gamma$, ciò che determina univocamente tale posizione iniziale. E, con questa scelta, quel procedimento mostra che effettivamente (D) sta in un complesso lineare.

19. — Ciò posto, si ha per le superficie (γ) il seguente teorema di permutabilità: *se nel teorema di permutabilità per le trasformazioni asintotiche di una superficie si suppone di partire da tre superficie* (α), (β), (γ) *aventi ciascuna un sistema di asintotiche in complessi lineari, ognuna delle* ∞^1 *superficie che con quelle dà una quaterna in trasformazione asintotica ha ancora le asintotiche di un sistema in complessi lineari, se le trasformazioni asintotiche fra* (α) *e* (β) *e fra* (β) *e* (γ) *appartengono alla* MEDESIMA *classe, mentre fra quelle* ∞^1 *superficie ve ne è una e una sola dotata di tale proprietà, quando quelle due trasformazioni asintotiche appartengono a classi* DIVERSE.

Basta, per convincersene, riprendere la dimostrazione del teorema del Cap. I n. 8, tenendo presente il risultato testè stabilito: con le notazioni di quel n., risulta che per δ_0 vi sono ∞^1, oppure una posizione possibile; da essa è determinata univocamente δ_1 pure in un complesso lineare; ecc., ecc.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Maggio 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Peano, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Herlitzka, Pochettino e il Segretario Mattirolo che legge il verbale della precedente adunanza, approvato senza osservazioni.

Scusano l'assenza i Soci Sacco, Parona, D'Ovidio.

Il Presidente dà comunicazione di una lettera della *Société Géologique de Belgique* nella quale si annuncia alla nostra Accademia che la Società celebrerà nel giorno 27 di luglio il primo cinquantenario della sua fondazione.

L'Accademia delibera di dare incarico al suo Socio corrispondente Jean Massart di volerla rappresentare a tale solennità.

Similmente si delibera di dare incarico al nostro Socio corrispondente Prof. Antonio Garbasso di rappresentare il nostro Sodalizio nell'occasione che in Firenze si celebrerà il primo centenario della insigne *Accademia Medico-Fisica Fiorentina*.

Dopo di che non essendovi comunicazioni di lavori l'adunanza è dichiarata chiusa.

L'Accademico Segretario
Oreste Mattirolo

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIX, Disp. 13ª, 1923-1924

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1924

CLASSI UNITE

Adunanza del 25 Maggio 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci Peano, Parona, Mattirolo, Grassi, Panetti, Sacco e Pochettino il quale funge da Segretario;

della Classe di Scienze morali storiche e filologiche: i Soci Patetta, Prato, Faggi, Jannaccone e Solari.

Scusano l'assenza i Soci Guidi, Schiaparelli, Cian, Vidari, Brondi e Luzio.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza delle Classi unite (8 luglio 1923).

Il Presidente fa dar lettura dal Socio Faggi della Relazione della Commissione per il Premio Gautieri per la letteratura (triennio 1920-22). Apre quindi la discussione su detta Relazione; nessuno prendendo la parola, il Presidente avverte che nella prossima seduta a Classi unite verrà aggiudicato il Premio Gautieri.

Il Socio Jannaccone domanda alcuni schiarimenti sui criteri che si seguono nel prendere in considerazione, ai fini del Premio Gautieri, lavori ed opere non espressamente presentati

dai loro autori. Il Presidente dà gli schiarimenti richiesti. A questo proposito stesso il Socio Faggi domanda se non sarebbe meglio limitare l'esame alle sole opere presentate onde evitare alla Commissione aggiudicatrice l'assunzione di una responsabilità piuttosto grave. Il Presidente risponde ciò essere impossibile dovendosi rispettare il Regolamento della Fondazione che viene in certo modo ad imporre alla Commissione di assumere la responsabilità per il conferimento del premio.

Relazione *sul Premio Gautieri per la Letteratura* (triennio 1920-22).

Onorevoli Colleghi,

la Commissione da voi nominata con l'incarico di riferire e proporre circa il conferimento del Premio Gautieri di Letteratura, assegnato al triennio 1920-22, si onora di darvi conto del lavoro compiuto e di presentarvi le proposte relative.

Al detto concorso si sono presentati il D[r] Prof. Attilio Momigliano e il D[r] Prof. Carlo Calcaterra. La Commissione, esaminati i titoli dei due concorrenti, è stata dolente di dover escludere il primo di essi, perchè i suoi titoli principali — per ogni riguardo notevolissimi — sono stati pubblicati anteriormente al triennio 1920-22.

Il Dott. Carlo Calcaterra, insegnante nel R. Liceo scientifico di Torino e libero docente di Letteratura italiana nella Università torinese, presentò alcune pubblicazioni che si sono subito imposte all'attenzione nostra, come si erano già assicurato il favore della critica e dei più autorevoli cultori di questi studî. Infatti dall'esame di esse appaiono evidenti la larghezza e la serietà della preparazione, congiunte ad una sicura padronanza storica della materia, pur in campi fra loro lontani e diversi.

La *Storia della poesia frugoniana* è una poderosa monografia, nel miglior significato del vocabolo; tale da potersi considerare come uno dei contributi più cospicui e più solidi alla conoscenza del nostro Settecento letterario, non solo in quanto è un'esposizione bene organata e largamente illustrata di fatti spesso nuovi, ma anche perchè indaga acutamente nella sua genesi e nel suo svolgimento complesso, nonchè nei suoi effetti, il " fenomeno frugoniano ". Questa del Calcaterra è valutazione storica e insieme psicologica ed estetica, nella quale vedesi per la prima

volta, in un lavoro di questa natura, fatta la debita parte alle forme metriche (Cap. V).

Gli *Studi danteschi di Vincenzo Gioberti* è il titolo d'un altro saggio monografico, ampio e vario, nel quale il Calcaterra si muove sicuro non solo pel vasto labirinto della letteratura dantesca, ma anche nel seguire quelle che ben potrebbero dirsi le vibrazioni del pensiero filosofico ed estetico giobertiano al contatto della poesia dell'Alighieri. I giudizî ch'egli esprime e le ricerche, anche collaterali, da lui tentate, riescono a recar luce pure sulla natura e sulle vicende del Romanticismo italiano in genere, su quello piemontese in particolare, nelle sue attinenze col movimento filosofico. Al quale ultimo — intendiamo, il Romanticismo subalpino — si riferisce un'altra e pregevole pubblicazione del Calcaterra, su Ludovico di Breme. Sennonchè, di questa la Commissione non può tener conto, perchè, sebbene stesa e stampata nel '22, ha veduto la luce sotto la data del '23.

In questi lavori e nella vasta rassegna su Alfredo Oriani si sarebbe tentati di muovere al Calcaterra l'appunto d'una certa esuberanza non strettamente necessaria, sovrattutto nella parte bibliografica; ma, a ben considerare, se questa sua è una colpa, si deve pur riconoscere che è una *felix culpa*, come quella che conferma di che ricco viatico di soda dottrina e di erudizione sia fornito l'autore.

La Commissione, dopo aver passato in rassegna più altre notevoli pubblicazioni relative alla letteratura italiana, e fra esse alcune consacrate a celebrare il Centenario dantesco, ha fissato la propria attenzione sopra il volume d'un insigne studioso riguardante la letteratura francese.

Il libro di Luigi Foscolo Benedetto, *Le origini di Salammbô* (Firenze, 1920) è uno studio completo sul realismo storico d G. Flaubert, e attesta non solo una profonda e larga conoscenza di questo autore, ma di tutta quanta la letteratura francese che con lui e con la sua opera si riconnette. È diviso — oltre l'introduzione — in due parti: la prima ha per soggetto *L'eredità romantica* di G. Flaubert, la seconda *Il lavoro di ricostruzione.* Specialmente in quest'ultima il Benedetto rivela una cultura classica non comune, filologica e archeologica a un tempo, nel segnalare ed esaminare tutte le fonti di cui si valse il Flaubert per la ricostruzione storica dei tempi cartaginesi. In un ultimo

capitolo, denso di pensiero, che serve di conclusione, il Benedetto discute i criterî estetici che hanno guidato il Flaubert nel suo romanzo, e il valore che, rispetto ad essi, si può assegnare alla ricerca erudita e alla sua curiosità di studioso.

Onorevoli Colleghi,

Data l'importanza delle pubblicazioni con le quali i due studiosi presi in considerazione si sono egregiamente affermati ognuno nel proprio campo speciale, la Commissione unanime vi propone di dividere il Premio Gautieri per la Letteratura, assegnato al triennio 1920-22, in due parti eguali, fra il Prof. L. F. Benedetto e il Prof. Carlo Calcaterra.

Torino, 18 maggio 1924.

Francesco Ruffini, *Presidente*
Ettore Stampini
Adolfo Faggi
Alessandro Luzio
Vittorio Cian, *Relatore*.

Gli Accademici Segretari:
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Maggio 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Peano, Parona, Grassi, Panetti, Sacco, Pochettino e il Segretario Mattirolo, il quale legge il verbale dell'adunanza precedente che risulta approvato senza osservazioni.

Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Il Presidente con elevata e commossa parola comunica all'Accademia la perdita gravissima del Socio Corrado Segre che apparteneva alla nostra Accademia sino dal febbraio del 1889. Egli ricorda le benemerenze dello scienziato insigne verso il nostro Sodalizio, e ne esalta i meriti preclari come matematico e Professore valoroso, modesto, che dedicò tutta intera la sua vita e tutti i suoi pensieri all'ideale purissimo della Scienza, lasciando di sè desiderio vivissimo in quanti lo conobbero e ne ammirarono il carattere.

Il Presidente comunica che la Commemorazione del Socio Segre sarà solennemente fatta da un Socio competente, e ne affida l'incarico al Socio D'Ovidio.

Il Segretario nel nome del Socio Guidi presenta una Nota del Sig. Ing. Pugno dal titolo: *Sulle sollecitazioni negli Scafi dei galleggianti*, che viene accolta per gli *Atti*.

Dal Socio Naccari viene pure presentata una Nota del D[r] Massimo Fenoglio, *Contributo allo Studio della zona mineralizzata di Cogne* (Val d'Aosta).

Questa Nota viene accolta per gli *Atti*.

LETTURE

Sulle sollecitazioni negli scafi dei galleggianti

Nota dell'Ing. GIUS. MARIA PUGNO
presentata dal Socio nazionale residente Camillo Guidi

È noto che gli ingegneri navali si servono, per il dimensionamento degli scafi, di dati suggeriti dalla pratica e da questa giornalmente riconfermati. Se non che, chi cercasse di risolvere il problema del dimensionamento con metodi teorici, (il professore Mengoli col classico metodo delle derivate del lavoro), si accorgerebbe di giungere a sollecitazioni, e quindi a dimensioni [1], diverse, e, generalmente, più rilevanti di quelle suggerite dalla pratica, specialmente per quanto riguarda gli scafi per navigazione interna.

Di fronte al provato rigore teorico del metodo analitico, e alla evidente sufficienza del dato empirico, e tenuto conto che uno scafo normalmente deperito continua a resistere per anni ed anni senza dar segni evidenti di debolezza, sembrò lecito indurre che una tale differenza di risultati dovesse trovare la sua giustificazione nell'essere il metodo teorico impostato senza tener conto di una circostanza che, appunto in condizioni di massimo deperimento, avesse modo di far risentire al massimo grado la sua influenza. Tale circostanza sembrò poter consistere nella non perfetta rigidità delle connessioni tra le varie parti costituenti lo scafo, e specialmente di quelle tra madiere e costola, e tra costola e baglio; non perfetta rigidità dovuta alla

(1) Cfr. A. Mengoli, *La robustezza trasversale degli scafi con speciale riguardo a quelli destinati alla navigazione interna.* "Atti del Collegio degli Ingegneri Navali e Meccanici in Italia", anno 1914.

elasticità propria della sezione d'incastro, a difetti di costruzione e, infine, alla sconnessione per l'uso. Mi proposi, allora, di studiare gli effetti di tali elasticità di incastro, e cominciai a considerare una elasticità fittizia concentrata in una certa sezione del classico arco di ponte dotato già di una certa elasticità propria uniformemente diffusa, e ricavai le espressioni dei sei parametri elastici in funzione delle espressioni dei due gruppi di parametri relativi l'uno alla elasticità diffusa, l'altro alla elasticità concentrata [1]. Applicai queste espressioni, ricavate per detto generalissimo caso, ad uno scafo tipo largo due metri ed alto uno (fig. 1) (già considerato dal prof. Mengoli), e supponendo, per approssimazione, che per la simmetria della costruzione e delle sollecitazioni si trovassero in identiche condizioni elastiche gli incastri posti allo stesso livello, cioè che vi si potessero immaginare concentrate identiche elasticità supplementari, ottenni per i sei parametri le seguenti espressioni:

$$M_v = \zeta_1 \left(\eta_1 + \frac{\mathfrak{W}}{W}\,\epsilon_1\right) \tag{1}$$

$$M_0 = \zeta_1 \left(\eta_2 + \frac{\mathfrak{W}}{W}\,\epsilon_2\right) \tag{2}$$

$$Y_v = \zeta_3 \frac{1}{V}\left(\eta_3 + \zeta_1 \frac{\mathfrak{W}}{W}\,\epsilon_3\right) \tag{3}$$

$$X_0 = \zeta_4 \frac{1}{N}\left(\eta_4 + \zeta_1 \frac{\mathfrak{W}}{W}\,\epsilon_4 - \delta\,\frac{\eta_2}{V}\right) \tag{4}$$

$$X_v = \zeta_4 \frac{1}{V}\left(\eta_5 + \zeta_1 \frac{\mathfrak{W}}{W}\,\epsilon_5 - \delta\,\frac{\eta_1}{N}\right) \tag{5}$$

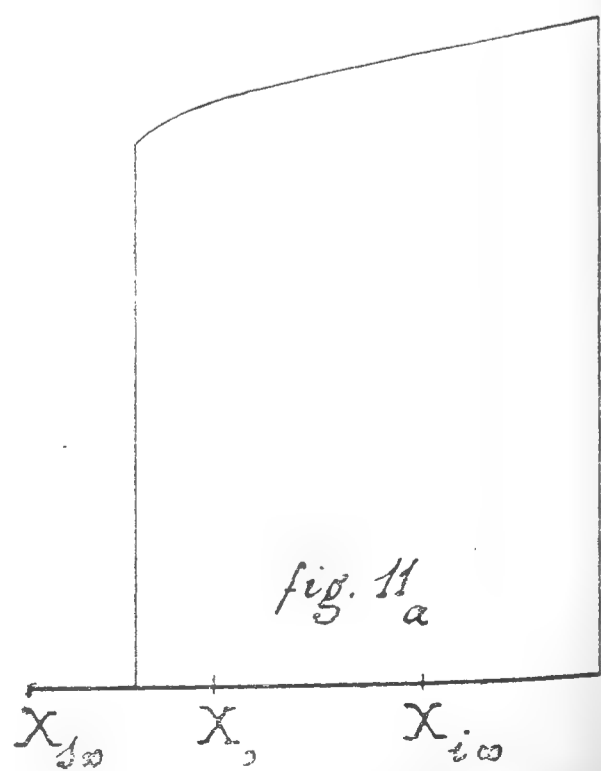
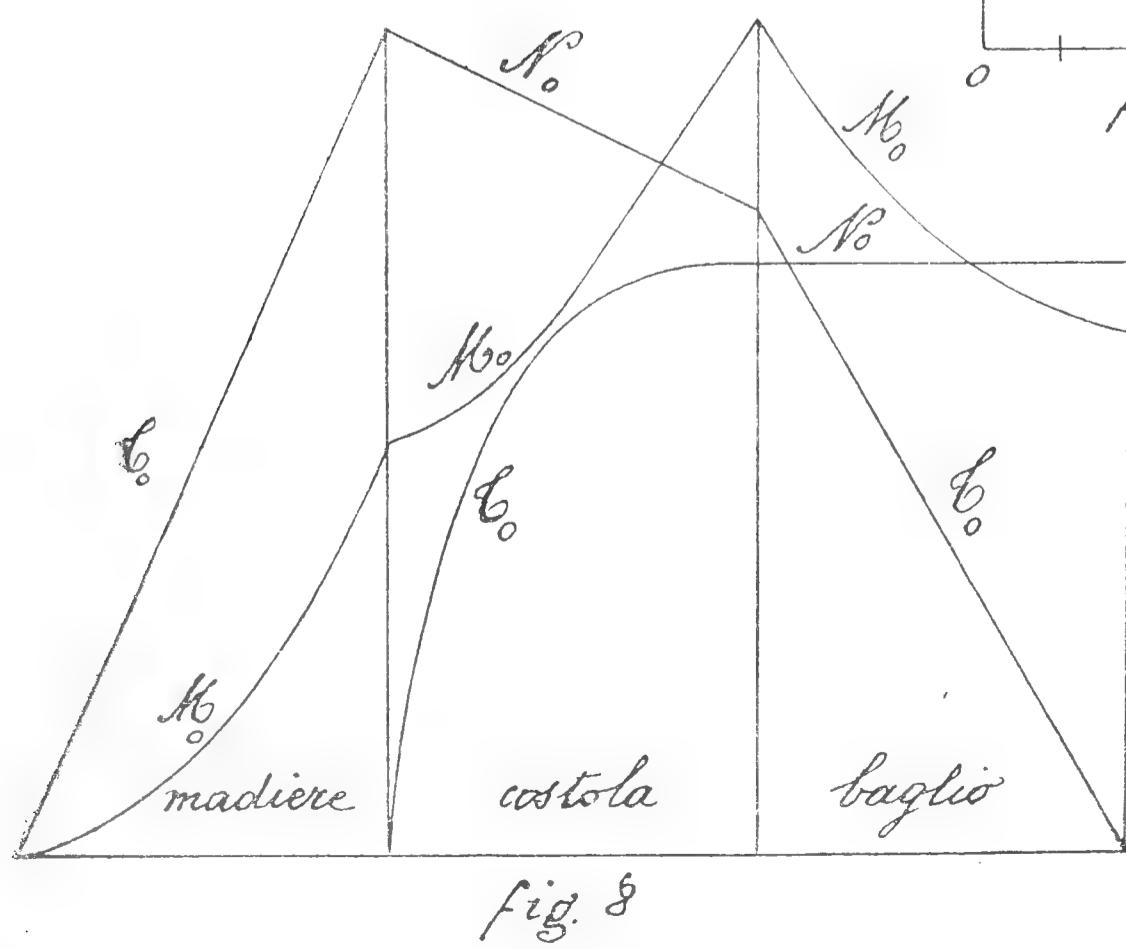
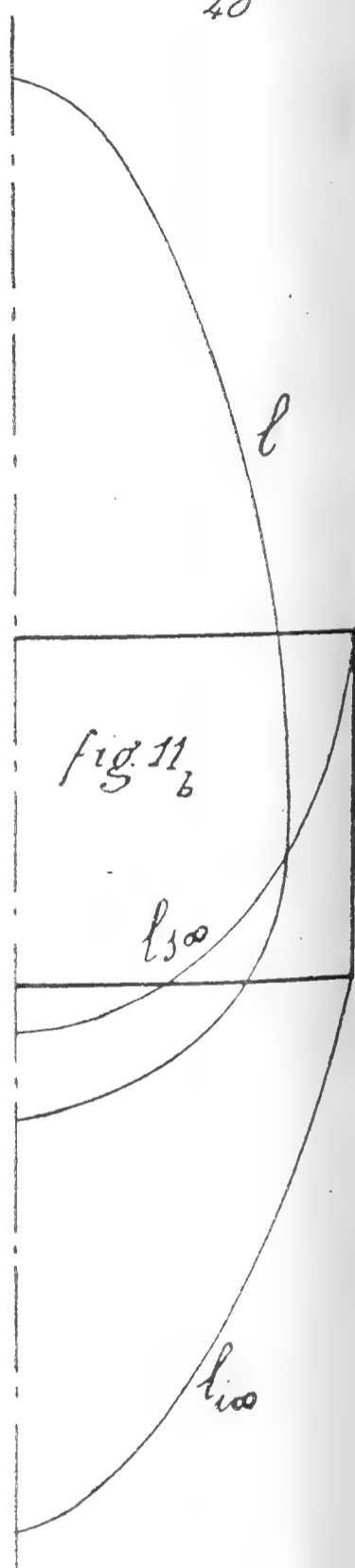
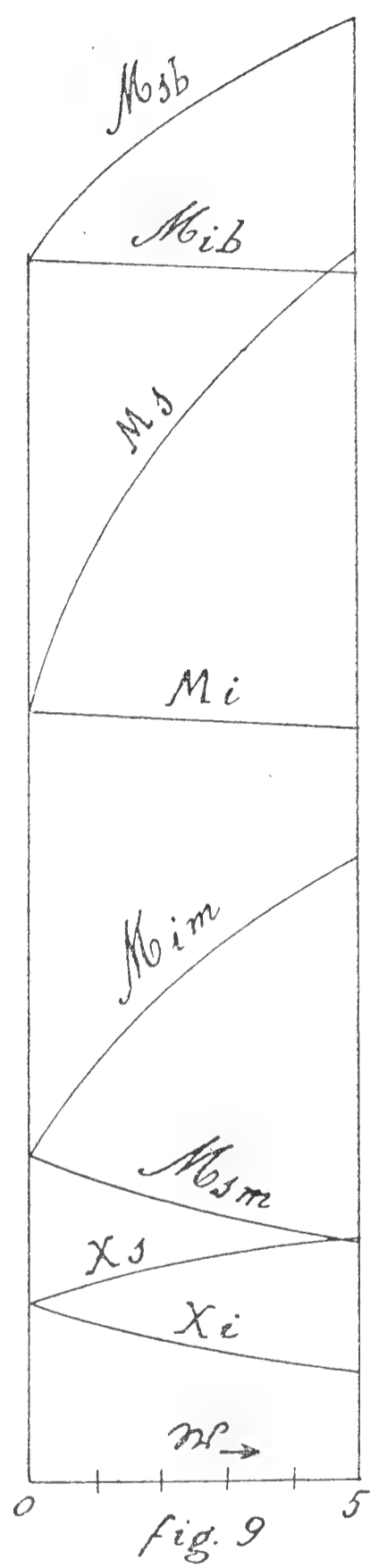
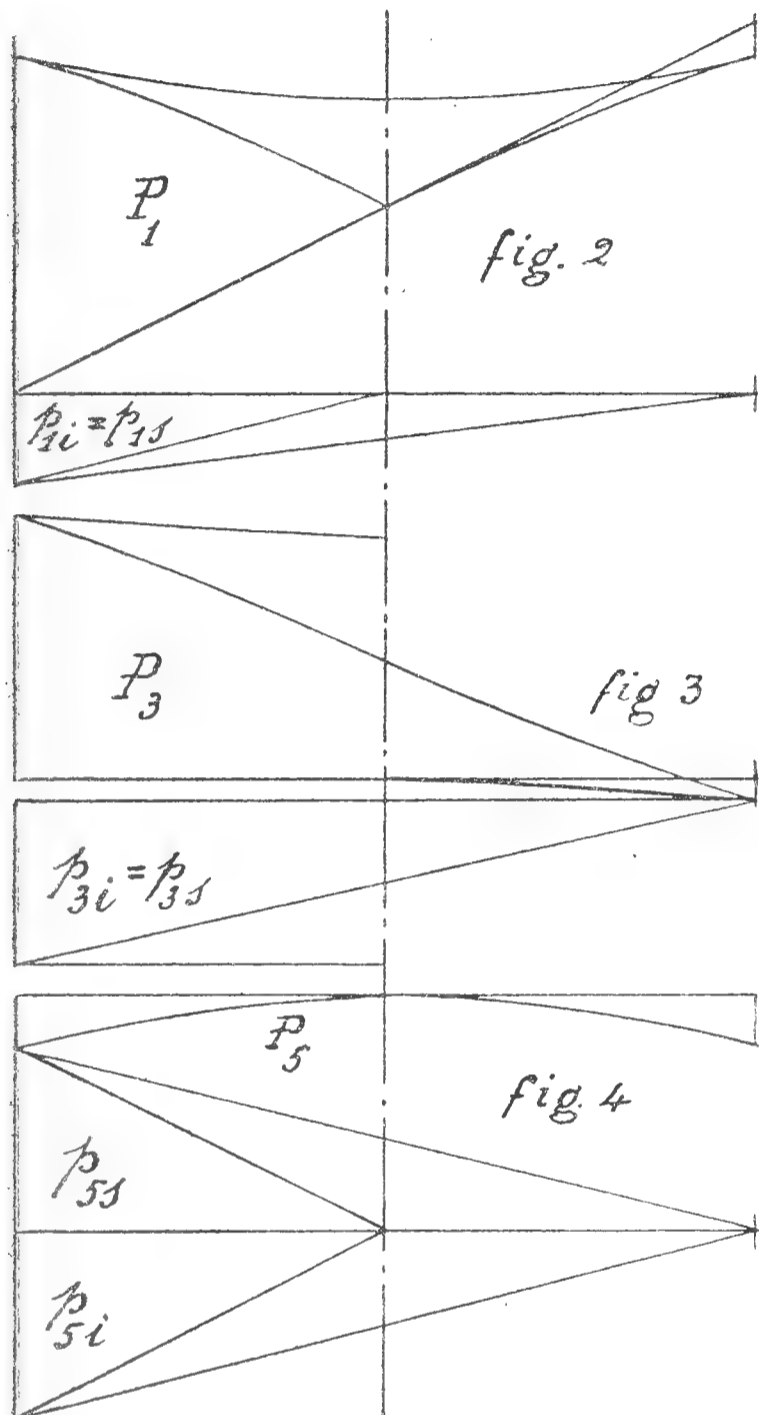
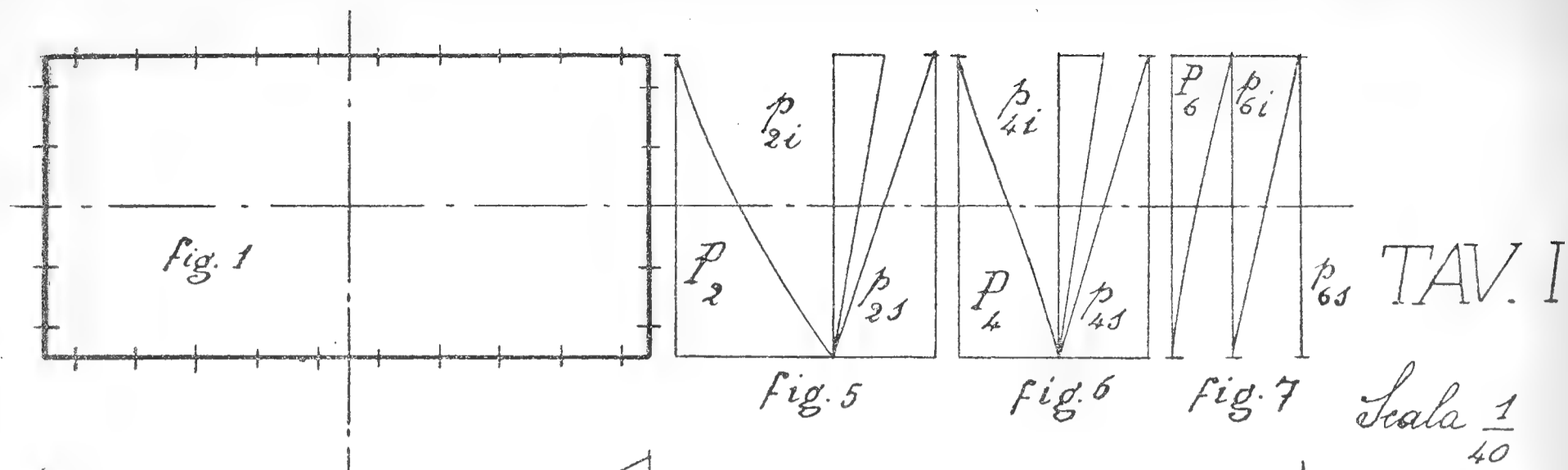
$$Y_0 = \zeta_3 \frac{1}{V}\left(\eta_6 + \zeta_1 \frac{\mathfrak{W}}{W}\,\epsilon_6\right) \tag{6}$$

essendo:

$$\zeta_1 = \frac{\Sigma w}{\Sigma w + 2\,\dfrac{\mathfrak{W}}{W}}, \qquad \zeta_3 = \frac{V}{V + \zeta_1 \dfrac{\mathfrak{W}}{W}\,v}, \qquad \zeta_4 = \frac{N}{N + \zeta_1 \dfrac{\mathfrak{W}}{W}\,n},$$

---

[1] Cfr. C. Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni.* Parte II e IV. Torino, Vincenzo Bona, 1911, e G. Colonnetti, *Principii di Statica dei solidi elastici.* Pisa, Enrico Spoerri, 1916.

TAV. I
Scala 1/40
fig. 1
fig. 2
fig 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7
fig. 8
fig. 9
fig. 11 b
fig. 11 a
madiere
costola
baglio

TAV. II
Scale :
1 cm = 25 cm = 12,5 kgm
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
A
A
A
A
3
2,5
2
1,5
1
B
B
0,5
B = B
madiere
costola
baglio

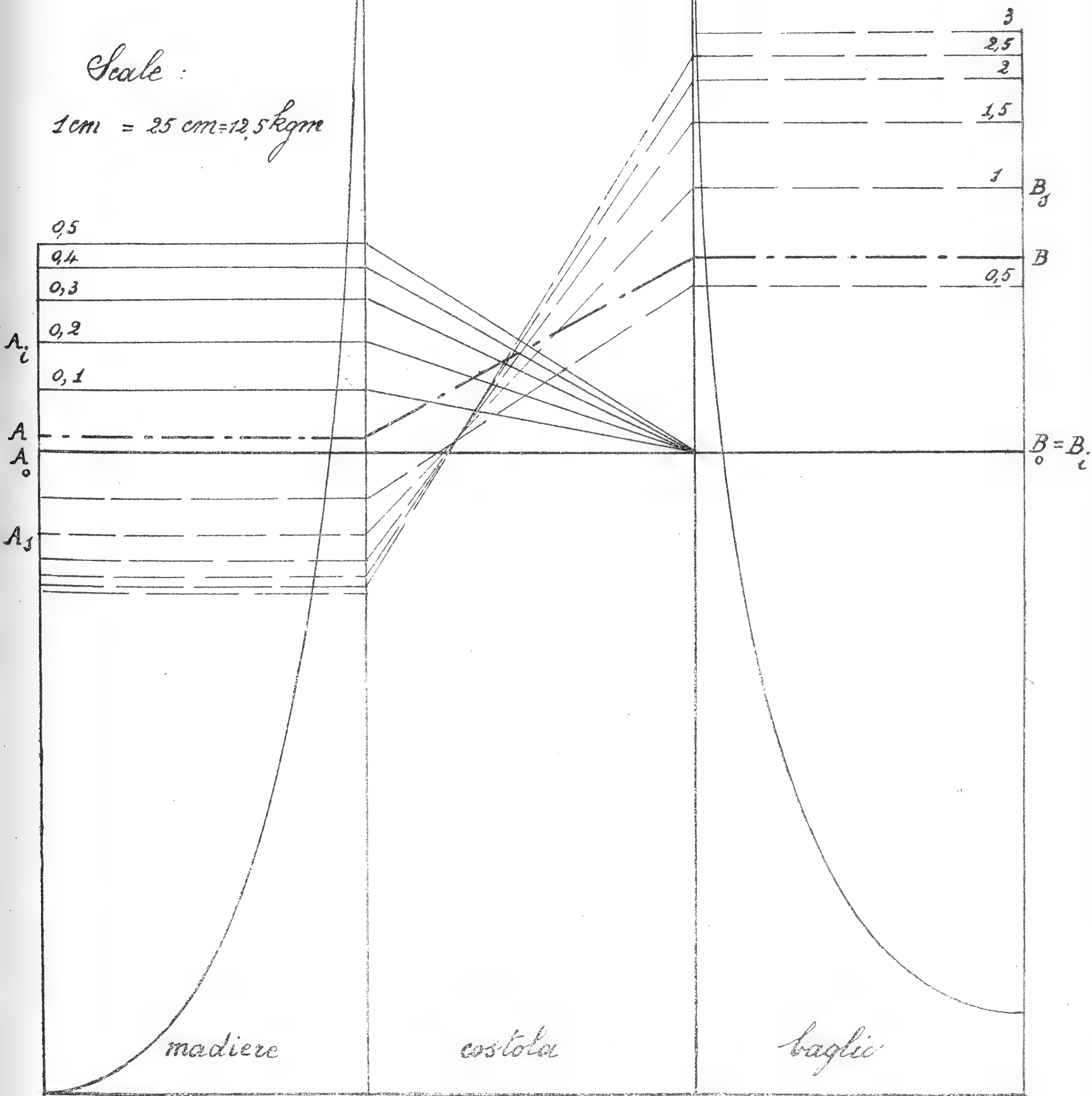



fig. 10

ove M_v è il momento, attorno al baricentro elastico di tutti i pesi elastici presenti, della reazione d'incastro, avente per componenti X_v orizzontale e Y_v verticale, provocata da un carico viaggiante unitario verticale; M_0, X_0, Y_0 hanno significato analogo per carico unitario orizzontale; $\eta_1 \dots \eta_6$ sono le ordinate, lette sulla retta d'azione del carico, dei sei poligoni funicolari P relativi alla elasticità diffusa Σw, con distanze polari rispettivamente: $\lambda_1 = \Sigma w$, $\lambda_2 = \Sigma w$, λ_3 arbitraria, $\lambda_4 = V$ segmento intercetto dai lati estremi di P_3 sull'asse verticale baricentrico nella distribuzione elastica diffusa, $\lambda_5 = N$ segmento intercetto dai lati estremi di P_4 sull'asse orizzontale baricentrico nella distribuzione elastica diffusa, $\lambda_6 = \lambda_3$. Le ordinate $\epsilon_1 \dots \epsilon_6$ sono analoghe alle $\eta_1 \dots \eta_6$, ma lette nei sei poligoni p connettenti le elasticità singolari concentrate nei due gruppi di incastri superiori ovvero inferiori. Le distanze polari dei due poligoni p sono rispettivamente uguali a quelle dei sei poligoni P. $\mathfrak{W}$ è una delle elasticità singolari; W è quel valore di $\mathfrak{W}$ per il quale furono costruiti i sei poligoni p ed ha il significato di unità elastica; v ed n sono i segmenti analoghi a V ed N, ma relativi a p_3 e a p_4 anzichè a P_3 e a P_4; δ è la distanza (verticale) tra i baricentri dell'elasticità diffusa e di quella totale.

Se consideriamo lo scafo in galleggiamento in mare tranquillo, cioè in equilibrio verticale, dobbiamo necessariamente trovare reazione d'incastro verticale nulla; le espressioni della reazione totale d'incastro per carichi unitari, sono fornite senz'altro dalla (4) e dalla (5).

In una qualunque distribuzione di carichi, se Q_v e Q_0 sono due carichi verticale e orizzontale generici, la reazione ammette la seguente espressione:

$$X = \zeta_4 \left\{ \frac{1}{N}\left(\Sigma\, Q_0\,\eta_4 + \zeta_1 \frac{\mathfrak{W}}{W}\,\Sigma\, Q_0\,\epsilon_3 - \delta\,\frac{1}{V}\,\Sigma\, Q_0\,\eta_2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{V}\left(\Sigma\, Q_v\,\eta_5 + \zeta_1 \frac{\mathfrak{W}}{W}\,\Sigma\, Q_v\,\epsilon_5 - \delta\,\frac{1}{N}\,\Sigma\, Q_v\,\eta_1\right)\right\}. \tag{7}$$

La sua posizione sarà nota, noto essendo il suo braccio rispetto al baricentro elastico totale, dato da $\frac{M}{X}$, ove

$$M = \zeta_1 \left\{ \Sigma\, Q_v\,\eta_1 + \Sigma\, Q_v\,\epsilon_1 + \Sigma\, Q_0\,\eta_2 + \Sigma\, Q_0\,\epsilon_2 \right\}. \tag{8}$$

Le formole (1), (2), (3), (4), (5), (6) sono documenti dello

scafo considerato; le (7), (8) sono documenti dello scafo considerato nelle condizioni di carico considerate (carico distribuito uniformemente, metà sul baglio, metà sul madiere).

Nelle figure 2, 3, 4 sono rappresentati i poligoni P_1, P_3, P_5, p_{1i}, p_{3i}, p_{5i} corrispondenti alle elasticità singolari nei nodi inferiori, p_{1s}, p_{3s}, p_{5s} corrispondenti alle elasticità singolari concentrate nei nodi superiori; nelle figure 5, 6, 7 sono rappresentati i poligoni P_2, P_4, P_6, p_{2i}, p_{4i}, p_{6i}, p_{2s}, p_{4s}, p_{6s}.

Le sollecitazioni in una sezione qualunque risultano ciascuna di due parti: una provocata dai carichi che stanno tra l'incastro e la sezione; avremo cioè uno sforzo di taglio $\mathfrak{T}_0$, uno sforzo normale $\mathfrak{N}_0$ e un momento flettente $\mathfrak{M}_0$; l'altra provocata dalla reazione d'incastro che genererà a sua volta due sforzi $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{N}_1$ e un momento $\mathfrak{M}_1$. Data la forma di scafo, $\mathfrak{T}_1$ è nullo nel madiere e nel baglio e $\mathfrak{N}_1$ è nullo nelle costole; $\mathfrak{M}_1$ è costante nel madiere e nel baglio (naturalmente per una data reazione), e varia linearmente lungo le costole. I diagrammi di $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{M}_0$, essendo queste grandezze dipendenti dalle sole condizioni di carico, e non dal valore di $\mathfrak{W}$, sono ricavabili una volta per tutte (fig. 8). I diagrammi di $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{N}_1$ sono noti, essendo noti i valori della reazione d'incastro; i diagrammi di $\mathfrak{M}_1$ nel madiere e nel baglio si ottengono con le seguenti formole:

$$\mathfrak{M}_{i\ \text{madiere}} = M_i + \delta X_i - \frac{h}{2} X_i \tag{9}$$

$$\mathfrak{M}_{i\ \text{baglio}} = M_i + \delta X_i + \frac{h}{2} X_i \tag{10}$$

$$\mathfrak{M}_{s\ \text{madiere}} = M_s - \delta X_s - \frac{h}{2} X_s \tag{11}$$

$$\mathfrak{M}_{s\ \text{baglio}} = M_s - \delta X_s + \frac{h}{2} X_s\ ; \tag{12}$$

h essendo l'altezza dello scafo (1 metro).

L'indice i riferisce al caso di elasticità singolari concentrate nei modi inferiori; l'indice s ai superiori. M_i e X_i diversificano da M_s e X_s per i valori e per i segni delle ordinate e che vi compaiono.

Nella figura 9 sono stati portati come ascisse i valori della elasticità singolare e come ordinate i valori di X_i, X_s, M_i, M_s, $\mathfrak{M}_{im}$, $\mathfrak{M}_{ib}$, $\mathfrak{M}_{sm}$, $\mathfrak{M}_{sb}$; la figura, oltre ad assicurare con la

continuità delle sue linee sulla giustezza dei calcoli, permette di fare le seguenti importanti osservazioni:

I. $\mathfrak{M}_{ib}$ e M_i si possono ritenere indipendenti dall'elasticità dell'incastro inferiore.

II. Per elasticità singolare che tende all'infinito nei nodi inferiori, il momento della reazione d'incastro attorno al baricentro elastico totale e il momento nel madiere tendono ad uno stesso valore; il baricentro invero tende al madiere; analogamente per le elasticità nei nodi superiori.

III. Impostando un breve calcolo e tenendo conto degli usuali valori delle elasticità d'incastro, delle loro ammissibili variazioni e delle corrispondenti variazioni nella reazione d'incastro, si può dedurre che i diagrammi degli sforzi di taglio e normale rimangono sensibilmente costanti; lo studio dovrà quindi limitarsi all'osservazione del diagramma del momento flettente.

Questo, per mezzo scafo, è stato riportato nella fig. 10. Sono stati considerati diversi valori dell'elasticità singolare, sia nei nodi inferiori sia in quelli superiori e sono state ottenute due famiglie di fondamentali come $A_i B_i$ e come $A_s B_s$; la fondamentale $A_0 B_0$ corrisponde a elasticità nulla; si è preferito per semplicità di disegno variare la fondamentale anzichè la curva.

Ciò fatto, sembrano lecite le seguenti conclusioni:

I. Un incremento di elasticità nell'incastro inferiore *a)* carica la parte centrale del madiere e ne scarica gli estremi, (in valore assoluto); questa azione può fino a un certo limite riuscire benefica, perchè uguaglia i due momenti massimi in valore assoluto; *b)* scarica le costole; *c)* è indifferente per il baglio.

II. Un incremento di elasticità nell'incastro superiore *a)* carica il baglio nella parte centrale e lo scarica agli estremi, *b)* scarica molto le costole verso l'alto e le carica un poco verso il basso, *c)* scarica il madiere nella parte centrale e lo carica agli estremi.

III. Tenendo conto del contemporaneo prodursi di incrementi nelle due elasticità e delle probabili partecipazioni delle loro influenze nel fenomeno elastico, si ottengono diagrammi del tipo di quello avente per fondamentale la AB. Si nota che vi è diminuzione di momento e quindi azione benefica (tenendo conto della conclusione I *a)*), per tutte le sezioni tranne che

per quelle del baglio centrale; notiamo però che anche nella peggiore ipotesi (elasticità superiore infinita) il baglio si comporterebbe come trave appoggiata agli estremi e sarebbe soggetto al momento dei carichi sovrastanti che esso sostiene. Ora in pratica la parte centrale del baglio è generalmente scarica (se non puntellata), quindi il momento corrispondente sarà certamente minore di quello qui ottenuto. Si potrebbe osservare che una diversa disposizione di carichi sul baglio potrebbe far variare e magari invertire la legge di variazione dei parametri elastici; un breve esame delle fisionomie dei poligoni di ordine dispari, ci persuade che, ben inteso a parità di intensità di carico, ciò non è, in misura sensibile.

In conclusione, è evidente l'azione benefica della sconnessione degli incastri; questa ha naturalmente dei limiti, in vista, tra l'altro, della necessità di resistere in mare cattivo. Negli scafi per navigazione interna ove gli incastri superiori hanno minore importanza e dove, per il fatto che si deve unire una costola (verticale) a un fondo (piatto) che stanno ad angolo retto, la sezione d'incastro bene si singolarizza, accrescendo l'influenza relativa del suo comportamento, l'azione studiata deve essere più sentita.

Rimane da notare che altre elasticità singolari possono essere immaginate concentrate lungo lo scafo, là dove vi è unione di tronchi. Nella figura 11 *a* e 11 *b* sono state tracciate le curve delle pressioni per $\mathfrak{W}_i = \mathfrak{W}_s = 0$, per $\mathfrak{W}_i = \infty$, per $\mathfrak{W}_s = \infty$.

Nota 1ª. — Volendo considerare lo scafo in mare agitato, si può seguire lo stesso procedimento, soltanto che, oltre ai momenti nello scafo prodotti in condizioni di mare calmo, devono considerarsi ancora momenti analoghi prodotti dall'onda agente sull'una o sull'altra costola, e quelli prodotti dalla corrispondente reazione verticale (non più nulla) e dal corrispondente incremento di reazione orizzontale, alla ricerca dei quali sono sufficienti alcuni dei poligoni già tracciati nelle figure 5, 6 e 7.

Nota 2ª. — Il diagramma del momento nella costola risulta dalla differenza di un diagramma parabolico e di uno lineare, riferita ad una fondamentale obliqua.

Contributo allo studio della zona mineralizzata di Cogne (Val d'Aosta)

Nota del Dott. MASSIMO FENOGLIO
presentata dal Socio nazionale residente Andrea Naccari

Lavori minerarii eseguiti in questi ultimi anni alle miniere di Cogne portarono a constatare fatti nuovi, che presentano un certo interesse dal lato geologico e mineralogico.

Oggetto di questa mia nota è appunto lo studio di materiale proveniente da questi nuovi lavori.

Per quel che riguarda le condizioni generali di giacitura del giacimento di Cogne non mi dilungo, rimandando il lettore alla monografia del Prof. A. Stella " Le Miniere di Ferro dell'Italia „ (1).

È noto che il giacimento di ferro magnetico di Cogne è legato, come del resto tutti i giacimenti di magnetite analoghi delle Alpi Occidentali, alle cosidette pietre verdi, e più precisamente alla serpentina, che ha qui la forma di una grande lente e viene a contatto al tetto con calcescisti ed al riposo con banchi di calcari più o meno dolomitici, i quali però poco sotto a loro volta riposano su altri calcescisti.

I giacimenti principali detti di Liconi e di Larcinaz si sviluppano appunto ai due estremi della lente serpentinosa, dove essa, almeno agli affioramenti, viene a restringersi e poi a chiudersi.

I fatti nuovi messi in evidenza da lavori eseguiti nell'ultimo quinquennio si possono così raggruppare:

(1) A. Stella, *Le Miniere di Ferro dell'Italia.* Torino, 1921, p. 6.

I. Noduli di magnetite con brucite trovati in pieno giacimento nella massa principale mineralizzata di Liconi;

II. Nella costruzione di un pozzo di estrazione si incontrò in pieno giacimento circa alla metà della distanza tra il tetto ed il riposo, una lente calcarea in gran parte saccaroide con fiamme di magnetite, ad andamento quasi orizzontale della potenza di 4 m.;

III. Alcune gallerie in traverso - banco al riposo del giacimento incontrarono vene, fiamme e lenti di magnetite in pieni calcari: una di queste lenti raggiungeva la potenza media di circa 4 m.

In un primo tempo le mie ricerche furono esclusivamente dirette sul materiale proveniente da queste tre località, materiale abbondante in gran parte gentilmente speditomi dal Dottor F. Elter, attuale Direttore di quelle miniere, parte raccolto dal Prof. A. Stella e dallo scrivente in occasione d'una visita fatta nel giugno 1921.

Avendo nel materiale in parola notata una certa diffusione di alcuni minerali non comuni, che potevano presentare un certo interesse, sia per le loro peculiari condizioni di giacitura che per la loro paragenesi, non note nel giacimento di Cogne, estesi le mie ricerche a tutto l'abbondante materiale delle miniere di Cogne, che fa parte della collezione del Museo Minerario della nostra Scuola. Detto materiale fu in gran parte raccolto dal Prof. A. Stella, che vivamente ringrazio anche per gli schiarimenti fornitimi durante le mie ricerche, e ringrazio pure il Dott. F. Elter che mi fornì con tanta gentilezza campioni e informazioni.

Procedo senz'altro alla descrizione del materiale, che raggruppo nel modo seguente in corrispondenza ai nuovi fatti osservati sopra accennati:

I. Noduli di magnetite con brucite in pieno giacimento;

II. Calcari cristallini (con brucite) in pieno giacimento e porzioni mineralizzate di magnetite;

III. A) Magnetite delle vene e fiamme nei calcari del riposo;

B) Calcari a brucite e parti mineralizzate di magnetite con humite appartenenti alla lente principale sopra accennata.

I. — Noduli di magnetite con brucite in pieno giacimento.

Premetto anzitutto che alle miniere di Cogne la brucite presenta una notevole diffusione, sinora non avvertita. Se sono relativamente rare le concentrazioni di brucite in noduli di dimensioni talora anche cospicue nella magnetite, l'esame microscopico di un numero notevole di sezioni sottili, mi permette di affermare che la troviamo con una certa frequenza diffusa nella magnetite, intimamente associata a magnetite, serpentino e calcite.

Inoltre la troviamo ancora diffusa nei calcari, come diremo più sotto.

Ebbi la fortuna di avere in istudio dal Dott. Elter un magnifico campione cubico di circa 15 cm. di lato, costituito essenzialmente di brucite che involge una lente di magnetite dello spessore medio di 5 cm.

a) La lente mineralizzata di magnetite all'esame macroscopico si presenta costituita da una massa compatta che appare in generale molto ricca in magnetite finemente granulare, associata a plaghette e venette di brucite con qualche noduletto di limonite, proveniente da alterazione di pirite.

All'esame microscopico si rivela la struttura cristalloblastica con microimplicazione tra magnetite e ganga, costituita in prevalenza da serpentino.

Questo è generalmente lamellare (antigorite), raramente fibroso (crisotilo): le lamelle sono per lo più abbastanza regolari e ben distinte, talvolta con sfaldatura evidente, il carattere ottico dell'allungamento (parallelo alle tracce della sfaldatura) è positivo. Potere rifrangente basso, birifrazione discreta; il pleocroismo è presso che nullo.

Subordinati sono la brucite in laminette coi caratteri che più sotto descriverò, e la calcite in piccole plaghe, riconoscibile subito per i ben noti caratteri, laminette di mica bianca coi caratteri della muscovite.

Si scorgono pure laminette di clorite, di color verde con marcato pleocroismo tra il gialliccio e verde erba.

Data la quantità cospicua di brucite a mia disposizione e la sicura giacitura, nonchè l'ottimo stato in cui era conservata, ritenni non senza interesse procedere ad uno studio un po' dettagliato del minerale in parola.

La brucite alle miniere di Cogne fu segnalata e identificata per la prima volta da C. Friedel nel 1882 (1), e poi dal Dottor E. Grill nel 1921 (2), su campioni non raccolti in posto.

b) Nel mio campione la brucite si presenta in lamine serrate le une sulle altre generalmente sottili, di dimensione varia, da qualche millimetro sia in lunghezza che in larghezza sino a lamelle con 4-5 mm. di larghezza e 6-7 di lunghezza.

Queste ultime qualche volta sono leggermente incurvate e presentano sfaldature basali più evidenti.

Nella massa generale brucitica con caratteristica lucentezza madreperlacea si scorgono a occhio nudo e meglio alla lente una quantità notevole di microscopici granuli di magnetite disseminati qua e là sotto forma di pigmento nero.

Il peso specifico determinato sopra laminette accuratamente scelte fra le più pure e più fresche in Thoulet, con bilancia di Westphal, risultò uguale a 2,38 (a 15° C).

All'esame microscopico, sia da sola, sia quando la troviamo associata ad altri minerali (magnetite, serpentino, calcite), si presenta con due aspetti distinti: in laminette e scaglie, trasparenti e incolore, talora un poco incurvate. Nelle lamine tagliate normali alla base si scorgono evidenti traccie di sfaldatura secondo }0001{. Meno frequentemente si osservano pure laminette isotrope più o meno distintamente esagonali.

Un secondo modo di presentarsi della brucite è quello di aggregati più o meno irregolari costituiti da fibre allungate riunite a fasci o da scagliettine generalmente in serie, sempre distribuite assai irregolarmente, sovente piegate e contorte, talvolta anche fratturate con spostamento.

Talora sono limpide ed incolore, tal'altra si nota un leggero intorbidamento e ingiallimento, particolarmente verso l'estremità,

---

(1) C. Friedel, *Sur la brucite de Cogne* (Vallée d'Aoste). " Bull. de la Soc. Min. de France „, 1882, p. 324.

(2) E. Grill, *Cenni sopra alcuni minerali delle miniere di Cogne* (Val d'Aosta). " Proc. Verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. „, vol. XXX, 1921, p. 4 estratto.

talvolta oscure quasi opache, per la presenza di magnetite, che vi è finemente diffusa nel senso della sfaldatura.

Tra questi due differenti modi di presentarsi della brucite si osservano talvolta passaggi graduali.

La birifrazione è intensa, sovente si ha estinzione ondulata.

Servendomi di essenze a indice di rifrazione noto, ho determinato il valore di $\omega = 1.560$ (Na).

Nelle sezioni sottili tanto per il minerale in lamine quanto per quelli in aggregati fibrosi o a scagliette, ho potuto verificare mediante il cuneo di quarzo, che l'allungamento è negativo.

All'esame a luce convergente di alcune lamine opportunamente scelte e isolate osservai che la figura d'interferenza non era perfettamente uniassica, ma presentava debole biassicità, con piccolissimo angolo degli assi ottici. Il carattere ottico è positivo.

Le lamelle di brucite trattate con acido cloridrico concentrato a freddo sono completamente disciolte, senza dar luogo a effervescenza di sorta. Data la quantità notevole di sostanza a mia disposizione, ho ritenuto opportuno procedere all'analisi quantitativa, che ho eseguito su una porzione di brucite freschissima, previa accurata eliminazione dei granuli di magnetite frammisti (1).

Riporto coi miei (I) i risultati delle analisi eseguite da G. Grill (II) e C. Friedel (III) su brucite di quella stessa località:

	I		II	III
MgO	67,59		67,47	67,07
BeO	0,12		0,12	—
FeO	0,75		0,68	1,13
$H_2O < 110°$	0,17	31,38	31,85	29,48
$H_2O > 110°$	31,21			
Fl	0,14		0,23	—
SiO_2 e parte insolubile	—		—	2,13
Somma	99,98		100,35	99,80

(1) L'analisi venne fatta nel Laboratorio di Chimica Applicata del R. Politecnico, diretto dal Prof. C. Montemartini, che vivamente ringrazio per l'ospitalità concessami.

I risultati della mia analisi vanno sufficientemente d'accordo con quelli del Grill, mentre tanto i miei quanto quelli del Grill differiscono alquanto da quelli ottenuti dal Friedel, specialmente per quel che riguarda il tenore in FeO e H_2O, ciò che fa supporre che il minerale analizzato dal Friedel non fosse molto puro. Questo modo di vedere è anche confermato dalla quantità notevole di SiO_2 e residuo insolubile ottenuto dall'Autore in parola.

II. — **Calcari cristallini (con brucite) in pieno giacimento e porzioni mineralizzate di magnetite.**

a) All'esame macroscopico la roccia ha l'aspetto di un calcare saccaroide, scistoso, quasi friabile, bianco, con leggere incrostazioni giallo-rossastre limonitiche, che talora si riducono a pigmento.

A occhio nudo e meglio alla lente si osserva pure una certa diffusione di granuli di magnetite. Questa poi è concentrata sovente in fiamme, sempre associata a discreta quantità di calcite.

La roccia dà forte effervescenza con acido cloridrico diluito a freddo, nel quale è quasi completamente solubile, ciò fa già supporre che la maggior parte dell'elemento carbonato sia calcite, e tale osservazione è in accordo coll'esame microscopico, da cui risulta che la roccia è prevalentemente costituita da larghe plaghe di calcite ad incastro reciproco associata a laminette di brucite con evidenti sfaldature secondo $\{0001\}$.

Inclusi nelle plaghe di calcite si scorgono granuli e plaghette di epidoto di color giallo canario, raramente incoloro, con marcato pleocroismo:

$$n_p = \text{incoloro}$$
$$n_m = \text{giallo verdognolo}$$
$$n_g = \text{verde.}$$

L'assorbimento è:

$$n_g > n_m > n_p .$$

Potere rifrangente forte, e birifrangenza energica; dal

modo di estinzione di qualche grano si può indurre una certa dispersione.

Per tutti questi caratteri l'epidoto in questione deve definirsi una pistacite.

b) Le porzioni lenticolari mineralizzate di magnetite (fiamme) all'esame macroscopico presentano una tessitura alquanto scistosa concordante con quella del calcare cristallino includente.

La magnetite è finemente granulare e presenta alternanze più o meno regolari costituite da sottili zonature di calcite, essa pure finemente granulare.

La porzione mineralizzata di magnetite all'esame microscopico presenta la caratteristica struttura cristalloblastica con microimplicazione reciproca della magnetite colla ganga che la accompagna, costituita essenzialmente da calcite, serpentino, brucite, muscovite ed epidoto.

Prevale la magnetite; la calcite per quanto subordinata costituisce sovente plaghe di dimensioni notevoli, associata a laminette e fibre di serpentino.

Subordinatamente si hanno laminette di brucite e di muscovite. Si riscontrano pure piccole plaghe di epidoto pistacitico coi caratteri di quello sopradescritto.

III. — A) **Magnetite delle vene e fiamme nei calcari del riposo. — B) Calcari a brucite e parti mineralizzate di magnetite con humite.**

A) *Magnetite delle vene e fiamme nei calcari del riposo.*

a) All'esame macroscopico i campioni del minerale di queste vene hanno sovente l'aspetto alquanto scistoso, con alternanze più o meno regolari di zonature di magnetite e di calcite finemente granulari, con sottili pellicole e pigmento di limonite. Presentano talora lenti di un calcare saccaroide grigio con lenticciuole di mica sericitica compatta. A contatto tra queste lenti di calcare saccaroide e la zona mineralizzata si scorgono bellissimi cubetti e granuli di pirite.

α) La porzione mineralizzata scura all'esame microscopico si risolve in un aggregato di calcite con magnetite.

La mica è quasi sempre associata a laminette di clorite e costituisce plaghette che al microscopio si risolvono in un aggregato minutissimo di squamette con frequente disposizione accartocciata, generalmente incolore, qualche volta leggermente colorate in verdognolo, mancanza di pleocroismo, potere rifrangente mediocre, birifrangenza energica, colori di interferenza vivi.

β) La porzione calcarea chiara all'esame microscopico si presenta costituita da un aggregato prevalente di calcite con lamine di mica, talora di dimensioni notevoli, coi caratteri di quella or ora descritta.

Qui però le squamette di sericite si presentano talora con disposizione subparallela, con caratteristica estinzione d'insieme.

b) I campioni calcarei contenenti le fiamme mineralizzate all'esame macroscopico presentano zonature irregolari (fiamme) di magnetite, il cui spessore varia da 1 a 10 cm. La massa calcarea saccaroide talora è bianca, tal'altra leggermente verdognola per la presenza di serpentino, che qualche volta si concentra in piccole lenti coll'aspetto del serpentino nobile.

In uno dei campioni la lente mineralizzata è interrotta da una superficie di frattura spalmata di laminette di brucite, già in gran parte alterata.

α) La porzione mineralizzata, al microscopio rileva la caratteristica struttura cristalloblastica con microimplicazione reciproca, specialmente ben visibile tra magnetite e serpentino talora lamellare, talora fibroso.

Pure frequente è la calcite in piccole plaghe, anch'essa con microimplicazione reciproca colla magnetite.

Si scorgono talvolta anche laminette di mica incolora coi caratteri della muscovite.

β) Della parte costituita da calcare saccaroide che racchiude le fiamme di magnetite, la porzione bianca all'esame microscopico si risolve in un aggregato di calcite con qualche grano di olivina e di magnetite, la porzione colorata in verdognolo si presenta invece costituita da plaghe di calcite associata a serpentino lamellare e fibroso.

Si scorgono talvolta anche plaghe di olivina colla caratteristica struttura a maglie, in parte serpentinizzata.

Furono pure osservati grani di epidoto coi caratteri della

pistacite, e laminette di mica bianca coi caratteri della muscovite.

Minerali accessori sono grani di pirite sovente alterata ai margini in limonite; quest'ultima è talvolta diffusa nell'intera massa sotto forma di pigmento e di piccoli grumi; idioblasti di sfeno, riconoscibile per l'elevatissimo potere rifrangente e l'altissima birifrangenza.

B) *Calcari a brucite e parti mineralizzate di magnetite con humite.*

Qui conviene trattare a parte le roccie calcaree incassanti del tetto e del riposo della lente mineralizzata e le parti mineralizzate di magnetite costituenti quest'ultima.

a) Le roccie incassanti sono essenzialmente costituite da calcari dolomitici grigiastri, compatti, a frattura concoide, talora con vene di calcite spatica e di amianto a fibra corta.

In un campione osservai pure una plaghetta di incrostazione, costituita da piccoli grani di un minerale rosso bruno del gruppo delle humiti, che descriverò più avanti.

La roccia trattata con acido cloridrico diluito a freddo non dà sensibile effervescenza; questo fa già supporre che la maggior parte dell'elemento carbonato sia dolomite.

All'esame microscopico la roccia si risolve in un aggregato di grani disposti a mosaico di carbonato con mancanza di geminazioni lamellari; ciò è in accordo coi risultati del saggio chimico e conferma la presenza della dolomite.

Associate ai grani di dolomite si scorgono pure laminette di brucite.

Allo scopo di accertarmi che anche il minerale dei calcari che possedeva identiche proprietà ottiche della brucite tipica, fosse realmente brucite, ritenni opportuno eseguire su questo materiale alcune prove microchimiche, che confermarono pienamente i risultati dell'esame ottico.

Infatti, ridotti in polvere minuta alcuni frammenti di calcare, e separate accuratamente con un ago e coll'aiuto di una lente alcune laminette del minerale, le trattai con cloruro di ammonio, con idrossido di ammonio, e con fosfato sodico: diluita convenientemente la soluzione, a freddo si separarono lentamente bellissimi cristallini di fosfato ammonico magnesiaco.

Così pure fu positiva la prova microchimica di Lemberg (1): in una sezione sottile di calcare trattata a freddo con nitrato d'argento e lasciata a sè per due giorni, tutte le plaghe del minerale in parola divennero completamente nere, mentre gli altri elementi rimasero inalterati.

b) Le parti mineralizzate all'esame macroscopico si presentano costituite da magnetite compatta prevalente, con disposizione talora zonata e talora lenticolare rispetto alla ganga serpentinosa, sovente coll'aspetto di serpentino nobile.

Si osservano pure plaghe di calcite spatica; frequentissima è poi la calcite intimamente associata a serpentino e magnetite, e ben visibile colla sua caratteristica spaticità specialmente nella frattura trasversale.

I campioni di minerale più povero presentano per lo più una tessitura scistosa, mentre i più ricchi presentano una tessitura massiccia, a grana più o meno minuta, e talora minutissima, senza però diventare quasi mai un aggregato di pura magnetite.

All'esame microscopico si rivela immediatamente la struttura poichiloblastica: dove la calcite e la magnetite fanno da sfondo al serpentino.

Si osservano qui eccezionalmente granuli di pirite con aureola di alterazione in limonite.

Si osserva pure la presenza di un pirosseno generalmente in piccole lamelle, talvolta in prismetti e granuli irregolari, incoloro, con sfaldatura prismatica evidente, potere rifrangente abbastanza elevato e birifrangenza energica.

Le misure dell'angolo d'estinzione sopra lamine }010{ diedero il seguente valore:

$$z : n_g = - 39^\circ.$$

Per l'insieme di questi caratteri il minerale in parola è da ritenersi un pirosseno diopsidico.

Passo a descrivere il minerale humitico in granuli di color rossastro, notato in alcuni campioni provenienti dalla zona di

(1) J. Lemberg, *Zur mikrochemischen Untersuchung von Calcit, Dolomit und Predazzit.* " Zeitschr. d. deut. geol. Ges. ", 39, 1887, p. 489. *Zur mikroskopischen Untersuchung von Calcit, Dolomit und Predazzit.* " Ibid. ", 40, 1888, p. 357.

contatto. Esso si presenta generalmente in granuli irregolari del diametro al più di 2 mm., disseminati tanto nella magnetite quanto nel serpentino, coi quali è intimamente associato, tanto che la separazione è oltremodo difficile. I grani più freschi hanno un bel colore rosso granato, con caratteristica lucentezza vitrea, privi di sfaldatura, affatto simili nel colore a granato almandino.

Talvolta però i grani si presentano alterati, ed allora dànno origine ad una sostanza rossastra, bruna, d'aspetto quasi terroso. L'alterazione qualche volta è solo superficiale, ed eliminata accuratamente la pellicola di alterazione si scorge un piccolo nucleo di minerale indecomposto con tutti i caratteri dei grani sopradescritti; altre volte è invece l'intiero grano che è alterato.

Il peso specifico determinato sopra grani accuratamente scelti fra i più puri e più freschi in joduro di metilene, con bilancia di Westphal, risultò uguale a 3,196 (a 25° C).

L'aspetto di questo minerale, come già accennai sopra, potrebbe farlo credere granato, ma ciò è subito escluso dall'esame microscopico.

Infatti in sezione sottile il minerale ha carattere birifrangente, in granuli e in plaghe di dimensioni anche notevoli a contorno irregolare, senza indizio alcuno di sfaldature; si osservano invece numerosi solchi di frattura irregolari, che percorrono il minerale in tutte le direzioni.

Il colore è giallo aranciato con marcato pleocroismo:

$$n_g = n_m = \text{giallo pallido}$$
$$n_p = \text{giallo aranciato.}$$

L'assorbimento è:

$$n_p > n_m = n_g.$$

Si osservano pure plaghe con pleocroismo

$$n_g = n_m = \text{giallo pallidissimo}$$
$$n_p = \text{giallo paglierino.}$$

L'assorbimento anche in questo caso è sempre:

$$n_p > n_m = n_g.$$

Il forte rilievo indica un forte potere rifrangente.

L'indice di rifrazione medio determinato per confronto con soluzioni diversamente concentrate del liquido di Thoulet risultò eguale a 1,681 (Na). La birifrangenza è energica e dal modo di estinzione di qualche plaga si può indurre una certa dispersione.

Molte plaghe di questo minerale humitico presentano geminazione polisintetica; scelsi quelle che presentavano estinzione sensibilmente simmetrica, e su queste misurai angoli compresi tra 7° e 17°.

L'insieme di questi caratteri porta ad ascrivere questo minerale al gruppo delle humiti.

Come conferma ho proceduto a saggi chimici.

La polvere di questo minerale ha colore giallo aranciato ed è attaccata da acido cloridrico concentrato a freddo, e con maggior facilità a caldo, con separazione di notevole quantità di silice gelatinosa.

Nella soluzione per aggiunta di acqua ossigenata si ottiene nettissima colorazione giallo arancione, reazione caratteristica del titanio.

Fu pure riscontrata la presenza del fluoro con la nota reazione con l'acido solforico concentrato.

Questi saggi confermano la pertinenza del minerale al gruppo delle humiti e tenuto conto dei valori limiti dell'angolo di estinzione, credo di poterlo individuare come clinohumite, e data la presenza del titanio costituirebbe una varietà titanifera di clinohumite, di quella clinohumite titanifera a cui lo Zambonini diede il nome di titanidroclinohumite (1).

Associazioni regolari. — Accompagna sovente la titanidroclinohumite plaghe e grani di un minerale incoloro, con forte rilievo, e birifrangenza energica, esso pure privo di sfaldatura, e presenta invece numerose screpolature che percorrono il minerale in tutte le direzioni e dànno luogo ad un reticolato le cui maglie sono riempite da laminette di serpentino.

---

(1) F. Zambonini, *Sur la véritable nature du titanolivine de la Vallée d'Ala* (Piémont). "Bull. de la Soc. Franç. de Minéralogie", n. 5, 1919, p. 279.

Sono questi i caratteri e la struttura caratteristica a maglie dell'olivina serpentinizzata. Del resto l'associazione olivina e humite è comune, ed è stata osservata da numerosi Autori.

A proposito di questa associazione titanidroclinohumite ed olivina, ho osservato un fatto, che mi pare interessante.

L'esame di molte sezioni sottili a nicols incrociati mi fece constatare che sovente quelle porzioni di minerale incoloro che aveva l'aspetto dell'olivina estinguevano sempre contemporaneamente alla titanidroclinohumite, per cui mi nacque il dubbio che si trattasse di uno stesso individuo.

Quest'estinzione contemporanea potrebbe essere spiegata dall'isorientazione dei due diversi minerali. Data però la frequenza osservata del fenomeno, mi parve molto improbabile che dovessi sempre fortuitamente imbattermi nel caso dell'isorientazione.

Ma v'è di più. Nelle sezioni geminate polisinteticamente osservai che le strie di geminazione si continuavano in tutta la plaga sia nella parte colorata che in quella incolora e che plaghe debolmente colorate e talvolta incolore si presentavano esse pure geminate polisinteticamente con angoli di estinzione simmetrica eguali alle analoghe colorate.

D'altra parte essendo stato dimostrato dallo Zambonini (1) che la titanolivina appartiene al gruppo delle humiti, anzi che è una varietà titanifera di clinohumite, non v'è motivo di ritenere che le porzioni scolorate debbano sempre rappresentare un altro minerale anzichè la stessa humite forse meno titanifera.

Non bisogna dimenticare che sino allo studio dello Zambonini, la titanolivina era considerata una varietà titanifera di olivina, con transizione dalla titanolivina alla olivina, per cui era logico che le porzioni scolorate si ascrivessero all'olivina.

Del resto non è sempre agevole in questi casi il definire con esattezza in sezione sottile se si tratti di un minerale del gruppo dei peridoti o delle humiti, anzi, quando mancano i geminati con estinzione simmetrica e la colorazione, è addirittura impossibile.

Riferendomi a quanto sopra è esposto, senza per niente limitare l'associazione olivina humite, osservata da numerosi Au-

---

(1) F. Zambonini, Memoria citata.

tori, tra cui Artini (1), Brugnatelli (2), Repossi (3), Zambonini (4), parmi di poter concludere che nel mio caso, pur ammettendo la associazione olivina titanidroclinohumite, osservata in parecchie sezioni sottili, sovente porzioni scolorate di minerale che a tutta prima potrebbero essere prese per olivina siano rappresentate dallo stesso minerale humitico.

Le plaghe e i grani di titanidroclinohumite e di olivina sono sovente accompagnati da magnetite, anzi quest'ultima è talora in forma di grani di dimensioni varie inclusa nei primi due.

Si osserva pure con certa frequenza l'associazione titanidroclinohumite e calcite.

Giacitura. — È noto che le humiti furono sinora trovate in bei cristalli nei proietti vulcanici del Vesuvio, in granuli interclusi in alcuni calcari metamorfici per contatto: a Pargas in Finlandia, a Sparta nel New Jersey, nell'Alta Birmania, ecc., e in quantità esigua entro a qualche calcare metamorfico della Sila in Calabria, a Brugo in Val della Mera.

La titanolivina presenta notevole diffusione entro a peridotiti più o meno serpentinizzate delle nostre Alpi: Val Malenco, Valtellina, Val Sesia, Val d'Ala, Val di Susa, ecc., come pure nel gruppo di Voltri in Liguria.

In condizioni analoghe si trovava la titanolivina descritta per la prima volta da Damour proveniente da Pfunders nell'Alto Adige, e quella del Ghiacciaio di Findelen nel gruppo Saas-Zermatt (5).

In una miniera di magnetite di Telly Foster nello Stato di New York si trovarono cristalli di condrodite.

---

(1) E. Artini e G. Melzi, *Ricerche petrografiche e geologiche sulla Val Sesia.* " Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ", Milano, 1900, p. 334.

(2) L. Brugnatelli, *Sulla titanolivina dei dintorni di Chiesa in Val Malenco.* " Rivista di Mineralogia e Cristallografia Italiana ", vol. XXX, 1904, p. 13 estratto.

(3) E. Repossi, *La bassa valle della Mera - Studi petrografici e geologici,* parte II. " Memorie della Società Ital. Sc. Nat. ", vol. VIII, fasc. 2°, 1916, pp. 132, 142.

(4) F. Zambonini, Memoria citata, p. 275.

(5) M. Damour, *Note sur un péridote titanifère.* " Annales des Mines ", 5me série, vol. 8, p. 90, 1855.

Nel mio caso non si può affermare che la titanidroclinohumite presenti nettamente l'uno o l'altro tipo di giacitura, di quelli or ora accennati.

Infatti, ancorchè sia legata alla serpentina, la quale ha a sua volta al tetto ed al riposo calcari, la titanidroclinohumite non è sparsa comunque nella massa serpentinosa mineralizzata, ma la troviamo ora associata a serpentina ora a magnetite, sempre nella zona di contatto coi calcari.

Fu pure osservata in un campione di calcare nel tetto della lente mineralizzata e in qualche campione di calcare in gran parte mineralizzato per sostituzione di magnetite, a cui è intimamente associata.

Allo scopo di vedere se la titanidroclinohumite da me studiata presentava una certa diffusione, presi in esame l'abbondante materiale delle miniere di Cogne del nostro Museo Minerario, ed anche qui non fu trovata che associata a magnetite, serpentino e pirosseno in campioni provenienti dalla zona di contatto mineralizzato tra serpentina e calcescisti del tetto in regione Colonna.

Il pirosseno ha qui la caratteristica struttura lamellare del diallagio secondo il pinacoide }100{ e sovente si presenta sfibrato con decolorazione e formazione di clorite e serpentino.

Nelle sezioni parallele all'asse verticale si ha estinzione inclinata rispetto alle traccie di sfaldatura:

$$z : n_g = - 39^\circ ;$$

ciò conferma la sua pertinenza al diallagio.

In alcune sezioni colpisce il contrasto tra la serpentinizzazione del diallagio e la freschezza della titanidroclinohumite.

In qualche plaga ai margini della titanidroclinohumite si osservano pure porzioni d'un color bruno caratteristico, tendente al verdastro che rappresentano porzioni del minerale alterato.

Diallagio e titanidroclinohumite hanno qui talvolta disposizione parallela con compenetrazione reciproca.

In campioni della susseguente zona di contatto di regione Liconi ho notato la presenza di un pirosseno di color carnicino, venato di calcite, in noduli di qualche centimetro di diametro, associato a plaghe di brucite coi caratteri di quella già descritta.

La polvere del pirosseno in parola ha colore giallo pallidissimo.

In sezione sottile il minerale si presenta in prismi e in plaghe di color giallognolo chiaro con pleocroismo lievissimo.

In alcune sezioni si scorgono evidenti le tre traccie di sfaldatura, caratteristiche dei pirosseni, e nelle sezioni trasversali all'asse verticale si scorgono due sistemi di sfaldature, talora interrotte, che si tagliano sotto un angolo presso che retto.

Si notano pure screpolature che percorrono il minerale in tutte le direzioni, riempite da serpentino lamellare.

Notai pure alcune plaghe a geminazione polisintetica.

Il potere rifrangente è abbastanza forte e la birifrangenza energica.

Le misure dell'angolo di estinzione su }010{ diedero come massimo il valore:

$$z : n_g = - 48^{\circ}.$$

Per l'insieme di questi caratteri il pirosseno in questione è da ascriversi all'augite.

Associata all'augite si scorgono laminette di brucite, talvolta costituenti piccole plaghe, tal'altra formano delle vere vene, che attraversano il pirosseno.

Si notano poi grani di magnetite disseminati tanto nell'augite quanto nella brucite.

Da quanto è stato esposto circa la giacitura della titanidroclinohumite di Cogne mi pare di poter concludere che essa viene a trovarsi in quella fascia di contatto in cui si trovano anche gli altri silicati (epidoti, granati e pirosseni) ed ha probabilmente la medesima origine.

Il Dott. E. Grill (1) ha descritto una condrodite appartenente pure alle miniere di Cogne, che trovò associata a laminette di brucite su campioni raccolti nelle discariche di Liconi.

Riassunto e osservazioni finali. — Riassumendo, le osservazioni sopra riferite mi hanno permesso di constatare nel giaci-

(1) E. Grill, Nota citata, p. 8.

mento di Cogne concentrazioni singolari dibrucite in pieno minerale della massa di Liconi, nonchè la presenza di brucite in calcari cristallini inclusi dalla massa di minerale in parola, e infine la presenza di brucite nella zona calcareo-dolomitica del riposo del giacimento anche nella nuova lente.

Così pure è messa in evidenza la presenza della titanoidroclinohumite, specie mineralogica nuova per quell'importante giacimento, e ne sono precisate le condizioni di giacitura: viene cioè a trovarsi nella zona di contatto tra la nuova lente mineralizzata e i calcari incassanti del tetto e del riposo della stessa, ed inoltre nella zona di contatto mineralizzato tra serpentina e calcescisti del tetto in regione Colonna.

Le osservazioni esposte possono aggiungere alcuni dati sulle idee genetiche che abbiamo su quel giacimento.

Lo Stella (1) attribuisce la eccezionale concentrazione di magnetite di Cogne non solo alla differenziazione magmatica, della roccia eruttiva originaria peridotica, ricca in ferro, ma ritiene altresì che tale concentrazione sia con ogni probabilità legata alla sua profonda trasformazione, cioè alla sua serpentinizzazione e laminazione, e anche alla sua posizione di contiguità delle roccie calcari incassanti, nelle quali sono avvenuti i noti fenomeni di contatto.

Il concetto dell'influenza che possono aver avuto le roccie calcari incassanti e i fenomeni di contatto ivi manifestatisi sulla grandiosa concentrazione di magnetite, non poteva avere migliore conferma ed estensione dai fatti messi in evidenza dai lavori eseguiti dopo i suoi studi.

Quei lavori, come sopra è detto, hanno fatto constatare la presenza di una lente di calcare cristallino in piena massa mineralizzata, la frequente presenza di vene, fiamme, e lenti di magnetite nei calcari del riposo.

Questi fatti sono indizio dell'importanza del fenomeno di sostituzione mineralizzante, evidente al contatto mineralizzato dei calcari e probabile anche in piena massa del minerale, dove la lente di calcare può essere interpretata come residuo di calcare incluso non completamente sostituito.

---

(1) A. Stella, Op. cit., p. 56.

Tali fenomeni di sostituzione trovano appunto la loro corrispondenza nei particolari di struttura e di paragenesi sopra riferiti.

Si può aggiungere che queste constatazioni assumono anche un certo interesse pratico dal punto di vista minerario per eventuali ricerche minerarie.

Scuola di Ingegneria Mineraria del R. Politecnico,
Torino, maggio 1924.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSI UNITE

Adunanza dell'8 Giugno 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci Parona, Peano, Guidi, Panetti, Sacco, Pochettino;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci De Sanctis, Einaudi, Patetta, Prato, Valmaggi, Faggi, Solari e il Segretario Vidari.

Scusano l'assenza i Soci Mattirolo, Brondi, Luzio, Jannaccone.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Presidente invita i Soci a votare per sì o per no sulla proposta per il conferimento del premio Gautieri per la Letteratura (triennio 1920-22), secondo la relazione letta nella precedente adunanza.

Il risultato della votazione è il seguente: votanti 15, schede 15, sì 15.

Il Presidente proclama vincitori del premio Gautieri per la Letteratura i signori prof. Carlo Calcaterra e Luigi Foscolo Benedetto, ai quali va divisa in parti eguali la somma assegnata per il triennio 1920-22.

Gli Accademico Segretarii:
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classi Unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIX, Disp. 14ª, 1923-1924

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1924

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Giugno 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci PEANO, GUIDI, SOMIGLIANA, PANETTI, MAJORANA, HERLITZKA, POCHETTINO che funge da Segretario.

Scusano l'assenza il Presidente RUFFINI e il Segretario MATTIROLO, nonchè i Soci D'OVIDIO e SACCO.

Vien data lettura del verbale della seduta precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

I Soci GUIDI, SOMIGLIANA e MAJORANA, assenti all'ultima seduta, si associano alle parole di rimpianto pronunciate dal Presidente per la morte del Socio SEGRE.

Il Presidente ricorda che oggi si tributano in Roma speciali onoranze al prof. G. B. GRASSI, Socio della nostra Accademia, in occasione del suo giubileo universitario; comunica che il Rettore della Università di Roma ha ufficialmente invitata l'Accademia a partecipare alle onoranze stesse e che il Presidente ha inviato una lettera di omaggio e di augurio.

Il Presidente comunica che il Socio D'OVIDIO ha declinato l'incarico offertogli di commemorare il compianto Socio SEGRE. Il Socio PEANO propone, e la proposta viene accettata, che l'incarico venga affidato al Socio BOGGIO.

Il Socio Panetti presenta una Nota dell'Ing. C. Pasqualini dal titolo: *Sullo smorzamento dei vortici in seno a un fluido viscoso incompressibile animato di moto piano.*

Il Socio Guidi presenta una Nota del Prof. Albenga dal titolo: *Il diagramma della pressione dell'aria nel calcolo statico degli aeroplani.*

Il Socio Pochettino presenta una Nota del Dr. C. A. Brossa dal titolo: *Apparecchio per la separazione dell'albumina dalla globulina per mezzo della osmosi elettrica.*

Il Socio Somigliana presenta una Nota del Dr. B. Segre dal titolo: *Una proprietà caratteristica di tre sistemi* ∞^1 *di superfici.*

Il Socio Parona presenta una Nota del Dr. U. Monterin dal titolo: *Deduzioni dalle recenti ricerche sulle variazioni periodiche dei ghiacciai.*

Tutte e cinque queste Note vengono accolte per gli *Atti.*

LETTURE

Sullo smorzamento dei vortici in seno ad un fluido vischioso incompressibile animato di moto piano

Nota dell'Ing. CLODOVEO PASQUALINI

presentata dal Socio naz. resid. Panetti

La trattazione del moto dei fluidi perfetti ha condotto spesso a risultati importanti anche per la pratica oltre che per il metodo di indagine riallacciatosi alle scoperte matematiche provocate dallo svolgersi delle teorie del calore, dell'attrazione e dell'elettrologia.

La funzione potenziale, che è mezzo analitico di soluzione di un grandissimo numero di problemi, resta però esclusa dalla trattazione del moto dei fluidi reali e solo la funzione di corrente può impostarsi nel caso del moto piano con vantaggi analoghi alla prima.

Quando la forma di quest'ultima non sia troppo complicata essa porta a risultati più generali di quelli che si ottengono sia con metodi di approssimazione puramente analitici, sia con l'accettazione di ipotesi fisiche semplificative, pur avendosene alcune abbastanza ben confermate dall'esperienza.

Alla funzione di corrente si è fatto ricorso nella presente ricerca del regime di smorzamento dei vortici formatisi per una causa qualunque in seno ad un fluido vischioso incomprensibile il cui moto possa considerarsi piano e trovatane dapprima una forma particolare, riconosciuta atta a rappresentare per mezzo della formula integrale di Fourier una qualsiasi funzione di corrente assegnata nell'istante iniziale, da questa si ottiene la forma della funzione di corrente in qualunque istante successivo e perciò con i processi noti tutti gli elementi del moto.

Il problema è già stato risolto dal sig. Terazawa dell'Università di Tokio senza però far uso della funzione di corrente e nel solo caso particolare di una disposizione di vortici rettilinei infiniti simmetrica intorno ad un asse e da vari autori inglesi e americani nel caso di un vortice isolato.

1. — Si stabiliscono le equazioni differenziali per il moto piano di un fluido vischioso incompressibile servendosi dei simboli abituali:

u componente della velocità nella direzione dell'asse delle x;
v componente della velocità nella direzione dell'asse delle y;
p pressione;
δ densità costante;
ν vischiosità cinematica;

e l'operatore

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

Le equazioni sono

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\,\Delta_2 u \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\,\Delta_2 v \end{cases}$$

insieme con le quali è da considerarsi l'equazione di continuità, essendo la densità costante:

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

che permette porre

$$(3) \qquad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

in cui la ψ e perciò le u e v sono funzioni delle coordinate e del tempo.

Il significato fisico della ψ è qui ben definito come per il moto permanente; essa caratterizza la configurazione del fluido in ogni istante perchè in ogni istante vale relazione:

$$\psi = \int_{(x_0\, y_0)}^{(x\, y)} (l u + m v)\, ds ,$$

che dà alla ψ il significato fisico di portata della corrente fluida attraverso una sezione profonda 1 di traccia s sul piano xy da $(x_0 y_0)$ a $(x y)$, la cui normale abbia i coseni di direzione $l m$: portata che si mantiene costante in un certo istante muovendosi il punto $(x y)$ su una linea di corrente definita appunto dalla $\psi = k$; k variando solo col tempo.

La vorticità è funzione delle coordinate e del tempo essendo

$$(4) \qquad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta_2 \psi ,$$

ed in ogni istante la $\Delta_2 \psi$ ne dà la distribuzione sul piano mentre per ogni punto la $\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi$ ne esprime la variazione lungo il tempo.

Fissata una linea chiusa σ la circuitazione è

$$\int_\sigma (u\, dx + v\, dy) = \int\int_S \Delta_2 \psi \,.\, dS$$

e la variazione della circuitazione nel tempo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\int_S \Delta_2 \psi \,.\, dS$$

se si mantiene invariato il circuito di integrazione.

Se nelle (1) si fanno le sostituzioni indicate dalle (3) si ha:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

derivata poi la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x e sottratta l'una dall'altra per eliminare le derivate della p si ottiene:

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 \psi - \nu \Delta_2 \,.\, \Delta_2 \psi = 0 .$$

Si ponga allora $\Delta_2 \psi = F[x, y, f(t)]$ nella (5) che diviene cambiando segno

$$\nu \Delta_2 F - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

e cioè

$$\text{(5 bis)} \qquad \nu\,\Delta_2 F - \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} - F\,\frac{d \ln F}{dt} = 0.$$

La possibilità di una distribuzione della vorticità nulla sul contorno, in particolare la retta all'infinito del piano, e non nulla nell'interno dipende dall'essere:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial x}\right) + \frac{d \ln F}{dt} < 0$$

e cioè

$$\frac{d \log F}{dt} < 0.$$

Se esiste una soluzione della (5 bis) della forma

$$F\,[x;\,y;\,f(t)] = f(t)\,.\,F_1(x,\,y)$$

essa può scriversi, finchè $f(t) \neq 0$,

$$\nu\,\Delta_2 F_1 - \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial y} - F_1\,\frac{d \ln f(t)}{dt} = 0$$

e per quanto è detto precedentemente deve essere

$$\frac{d\,.\ln f(t)}{dt} < 0.$$

L'indipendenza di $f(t)$ dalle coordinate permette di assumere come più semplice espressione

$$\frac{d \ln .\, f(t)}{dt} = -\,\tau^2,$$

e perciò $f(t) = e^{-\tau^2 t}$.

Preso così $\psi = e^{-\tau^2 t}\,\psi_1(x,\,y)$, essendo ψ_1 indipendente dal tempo, sono allora:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\,\tau^2\,e^{-\tau^2 t}\,\psi_1(x,\,y)\,; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = e^{-\tau^2 t}\,\frac{\partial \psi_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta_2\,\psi = \Delta_2\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\,\tau^2\,e^{-\tau^2 t}\,\Delta_2\,\psi_1\,; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = e^{-\tau^2 t}\,\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$$

e la (5) si scrive:

$$(6)\qquad -\tau^2 e^{-\tau^2 t}\Delta_2\psi_1 + e^{-2\tau^2 t}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Delta_2\psi_1 - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Delta_2\psi_1\right) - \nu\, e^{-\tau^2 t}\Delta_2\Delta_2\psi_1 = 0\,,$$

di cui una soluzione completa è fornita da

$$\psi_1 = A\, e^{i\alpha(x-\chi)+i\beta(y-\varepsilon)}$$

quando sia $\tau^2 = \nu(\alpha^2+\beta^2)$ e α; β; χ; ϵ costanti qualisiansi.

La soluzione (7) della (5) che esprime la forma più semplice della ψ nello istante iniziale $t=0$ si presta immediatamente a rappresentare con la formula integrale di Fourier per una funzione di due variabili una qualsiasi funzione di corrente iniziale ψ_0 quando si consideri la A come funzione delle costanti χ ed ϵ e precisamente

$$A(\chi,\epsilon) = \psi_0(\chi,\epsilon)$$

sì che si abbia

$$(8)\qquad \psi_0(xy) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\,.\,d\beta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(\chi,\epsilon)\,e^{i\alpha(x-\chi)+i\beta(y-\varepsilon)}\,d\chi\,.\,d\epsilon\,,$$

e perciò in un istante qualsiasi

$$(9)\qquad \psi(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu(\alpha^2+\beta^2)t}\,d\alpha\,.\,d\beta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(\chi\,.\,\epsilon)\,e^{i\alpha(x-\chi)+i\beta(y-\varepsilon)}\,d\chi\,.\,d\epsilon.$$

Il problema è così risolto, almeno dal punto di vista formale e non offre eccessiva difficoltà per ottenere in forma finita e, nel caso peggiore, con uno sviluppo in serie la funzione ψ partendo da una data ψ_0.

2. — Non sempre la configurazione iniziale viene data con la funzione di corrente, ma nel caso di moto vorticoso è più spesso nota la distribuzione iniziale della vorticità $2\,\zeta_0\,(x\,y)$ per la quale è

$$(10)\qquad 2\zeta_0(x\,y) = \Delta_2\psi_0$$

e come è noto:

(11) $$\psi_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\Xi_1}^{\Xi_1}\int_{H_1}^{H_1} \zeta_0(\xi,\eta)\ln[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2} d\xi\,.\,d\eta + \psi_0(xy)$$

per una distribuzione continua, essendo l'integrale esteso a tutto il campo dei punti (ξ, η) nei quali ζ_0 è diversa da zero; mentre per una distribuzione discontinua è ψ_0 uguale ad una sommatoria analoga.

La funzione $\overline{\psi}_0$ è una funzione armonica scelta in modo tale che la ψ_0 soddisfi la condizione ai limiti; essa può anche essere nulla in tutto il piano.

Chiamando per semplicità di scrittura

$$B = e^{-\nu\alpha^2 t + i(x-\chi)\alpha}$$
$$C = e^{-\nu\beta^2 t + i(y-\varepsilon)\beta}$$
$$D = \zeta_0(\xi\eta)\ln[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2},$$

se la ψ_0 ha la forma della (11) la (9) diviene

(12) $$\psi(xyt) = \frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}{}_{\mathrm{IV}} \int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2} BC.(D.d\xi.d\eta).d\alpha.d\beta.d\chi.d\epsilon + \overline{\psi}(xyt)$$

con la $\overline{\psi}$ funzione armonica delle coordinate, che può essere anche nulla, tale da permettere alla ψ di soddisfare le condizioni ai limiti.

Le componenti della velocità: u v rispettivamente nella direzione x ed y si hanno dalle derivate della ψ rispettivamente secondo y, cambiato di segno, e secondo x; la derivazione effettuandosi sotto il segno di integrazione.

Assegnata la distribuzione iniziale della vorticità $2\,\zeta_0$ funzione di x e di y mentre all'infinito il fluido si mantiene in riposo, la (12) può trasformarsi in modo opportuno per una calcolazione degli elementi del moto.

Invertendo l'ordine degli ultimi due integrali doppi e cioè eseguita l'integrazione per le variabili α e β; per essere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t\alpha^2 + i(x-\chi)\alpha}\,d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\nu\tau}}\, e\left[-\frac{(x-\chi)^2}{4\nu t}\right] \text{ (*)}$$

(*) Si usa alle volte la notazione $e[l, m\ldots]$ al posto di $e^{l,m\ldots}$ per semplicità di composizione.

con l'analogo

$$\int_{-\infty}^{\infty} C d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t \beta^2 + i(y-\varepsilon)} d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}}\, e\left[-\frac{(y-\epsilon)^2}{4\nu t}\right]$$

si ottiene

$$\psi = \frac{1}{4\pi^2 \nu t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e\left[-\frac{(x-\chi)^2+(y-\epsilon)}{4\nu t}\right]\int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2} D\,.\,d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\chi\,.\,d\epsilon$$

nella quale si sostituisce

$$\ln\left[(x-\xi)^2+(\epsilon-\eta)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\gamma}-e^{-\gamma[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}}{\gamma}\,d\gamma$$

e perciò

$$\psi = \frac{1}{8\pi^2 \nu t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e\left[-\frac{(x-\chi)^2+(y-\epsilon)^2}{4\nu t}\right]\int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2}\zeta_0\, d\xi\,.\,d\eta$$
$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\gamma}-e^{-\gamma[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}}{\gamma}\,d\gamma.$$

In questa si eseguisce l'integrazione secondo le variabili χ, ϵ tenendo presente che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\lambda^2 \pm 2q\lambda}\, d\lambda = e^{\frac{q^2}{p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

e si ottiene in definitiva

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2}\zeta_0\, d\xi\,.\,d\eta \tag{13}$$
$$\int_0^{\infty}\frac{(1+4\nu t\gamma)\,e^{-\gamma} - e\left[-\gamma\,\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{1+4\nu t\gamma}\right]}{\gamma}\,d\gamma$$

la quale per $t=0$ dà appunto

$$\psi_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2}\zeta_0\,(\xi,\eta)\,.\,\ln\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]^{1/2} d\xi\,.\,d\eta.$$

Derivando la (13) rispetto ad x ed y si hanno le due componenti della velocità secondo le direzioni y e x in ogni istante

$$(14) \quad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2} \zeta_0(\xi, \eta)\, d\xi \,.\, d\eta \\ \qquad \displaystyle\int_0^\infty (y-\eta) \frac{e\left[-\gamma \dfrac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{1+4\nu t\gamma}\right]}{(1+4\nu t\gamma)^2} d\gamma \\ v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2} \zeta_0(\xi, \eta)\, d\xi \,.\, d\eta \\ \qquad \displaystyle\int_0^\infty (x-\xi) \frac{e\left[-\gamma \dfrac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{1+4\nu t\gamma}\right]}{(1+4\nu t\gamma)} d\gamma \end{cases}$$

che si possono trasformare ponendo $1 + 4\nu t\gamma$ uguale ad una variabile ausiliaria per integrarle poi fra 1 e ∞ ottenendo in fine

$$(15) \quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2} \zeta_0(\xi, \eta) \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\ \qquad \left(1 - e\left[-\dfrac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\nu t}\right]\right) d\xi \,.\, d\eta \\ v = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2} \zeta_0(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^9 + (y-\eta)^2} \\ \qquad \left(1 - e\left[-\dfrac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\nu t}\right]\right) d\xi \,.\, d\eta \end{cases}$$

e la vorticità

$$(16) \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\pi\nu t} \int_{\Xi_1}^{\Xi_2}\int_{H_1}^{H_2} \zeta_0(\xi, \eta)\, e\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\xi \,.\, d\eta.$$

3. — Prescindendo da considerazioni sulla possibilità dell'esistenza di un vortice isolato si esamina questo caso per avere un'idea più semplice del fenomeno e dell'ordine delle grandezze in giuoco.

La funzione di corrente assume la forma semplice

$$(17) \quad \psi = \frac{K_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(1+4\nu t\gamma)\, e^{-\gamma} - e\left[-\gamma \dfrac{(x^2+y^2)}{1+4\nu tp}\right]}{\gamma} d\gamma$$

se la traccia del filo vorticoso si suppone nell'origine degli assi; la velocità indotta è

$$V = \frac{K_0}{\pi r}\left(1 - e\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]\right).$$

Dopo il primo istante in ogni punto del piano esiste una vorticità eccetto che nell'origine da cui il moto è partito e ciò può vedersi calcolando la circuitazione lungo una linea chiusa comprendente l'origine, in particolare un cerchio di raggio r.

Tale circuitazione è

$$I = 2K_0\left(1 - e\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]\right) \tag{18}$$

ed il suo valore dipende dall'estensione del circuito di integrazione, è costante però nel tempo il suo valore in tutto il piano, come poteva pensarsi anche per altre considerazioni e può verificarsi prendendo per circuito di integrazione la retta all'infinito del piano.

Per una coppia di vortici di intensità K e $-K$ iniziali rispettivamente, nei punti $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ la vorticità è data in ogni istante da

$$\begin{aligned} 2\zeta &= \frac{K}{2\pi\nu t}\left(e\left[-\frac{(x-a)^2+y^2}{4\nu t}\right] - e\left[-\frac{(x+a)^2+y^2}{4\nu t}\right]\right) = \\ &= \frac{K}{2\pi\nu t}\, e\left[-\frac{x^2+a^2+y^2}{4\nu t}\right] \operatorname{sh}\frac{2ax}{4\nu t} \end{aligned} \tag{19}$$

ed il suo massimo valore si trova nel punto di coordinate tali da soddisfare contemporaneamente le equazioni

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0\,; \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0\,; \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{20}$$

La (19) dice che la vorticità in questo caso è sempre nulla all'infinito mentre dalla seconda delle (20) si trae la condizione per y di $y = 0$, cioè il massimo della vorticità si trova in un punto dell'asse della coppia vorticosa con la quale si intendono solidalmente collegati gli assi.

Nel caso di due vortici di intensità K uguale e dello stesso

segno nell'istante iniziale situati nei punti $(a;\ 0)$ e $(-a;\ 0)$ la vorticità in ogni istante è data da

$$(21) \qquad 2\zeta = \frac{K}{2\pi\nu t}\, e\left[-\frac{x^2+a^2+y^2}{4\nu t}\right] \mathrm{ch}\,\frac{2ax}{4\nu t}\,.$$

Si può fare una calcolazione diretta del valore della vorticità lungo l'asse delle x in vari istanti dopo l'iniziale e si constata come nel caso della coppia di vortici coniugati i due punti di massimo si vadano allontanando l'uno dall'altro mentre nel caso di due vortici iniziali dello stesso senso i due punti di massimo si avvicinano rapidamente fino a che le zone di massima vorticità vengono quasi a coincidere per smorzarsi poi più lentamente.

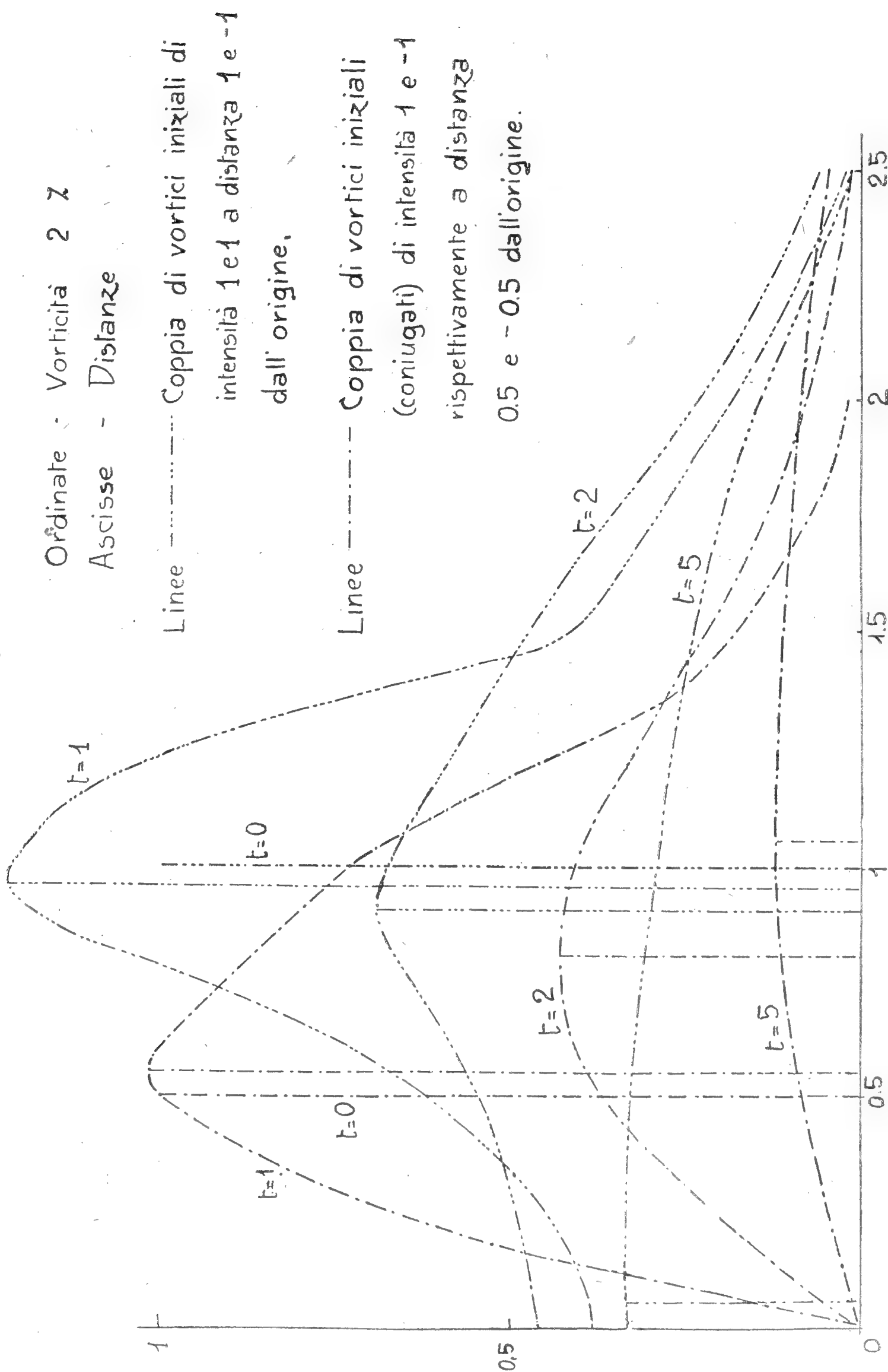
Un tale esempio schematico, che non ha immediata corrispondenza nella natura, in cui si verificano solo nuclei vorticosi di estensione finita, ha però importanza, perchè dà una prima giustificazione teorica della legge sui cicloni, che i meteorologi giapponesi chiamano legge di Okada.

Secondo una tale legge, che fu stabilita statisticamente, due cicloni dello stesso senso di rotazione si attraggono, mentre due di senso opposto si respingono; essa aveva avuto finora solo una parziale verificazione teorica nei lavori del Sig. Kitao, che aveva adottato per l'atmosfera l'ipotesi del fluido semivischioso.

V. Kwan-ichi Terazava Rigakuhakushi, *On the decay of Vortical Motion in a Viscous Fluid,* " Report of the Aeonautical Research Institute ", Tokio, Imperial University, N° 4, november 1922 (Vol. i. 4).

Per la eliminazione delle derivate della pressione dalle equazioni differenziali del moto vedi fra altri:

Th. v. Kàrmàn, *Ueber laminare und turbulente Reibung,* " Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik ", Band I, Heft 4, agosto 1921.

Diagramma della vorticità eccitata in un fluido viscbioso incompressibile da due vortici lineari iniziali.
Ordinate - Vorticità 2 χ
Ascisse - Distanze
Linee .... Coppia di vortici iniziali di intensità 1 e 1 a distanza 1 e -1 dall'origine.
Linee -·-·-·- Coppia di vortici iniziali (coniugati) di intensità 1 e -1 rispettivamente a distanza 0.5 e -0.5 dall'origine.
t=1
t=0
t=2
t=5
t=1
t=0
t=2
t=5
1
0,5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Il diagramma della pressione dell'aria nel calcolo statico degli aeroplani

Nota del Socio corrispondente GIUSEPPE ALBENGA
presentata dal Socio naz. resid. Q. Majorana

1. — Nel calcolo statico — o con termine marinaresco calcolo di robustezza — degli aeroplani si ritiene di regola in Italia che, per ali di pianta rettangola, con profilo costante ed incidenza eguale su tutta la lunghezza (*envergure*), la pressione dell'aria sia distribuita con legge uniforme, escluso un tratto

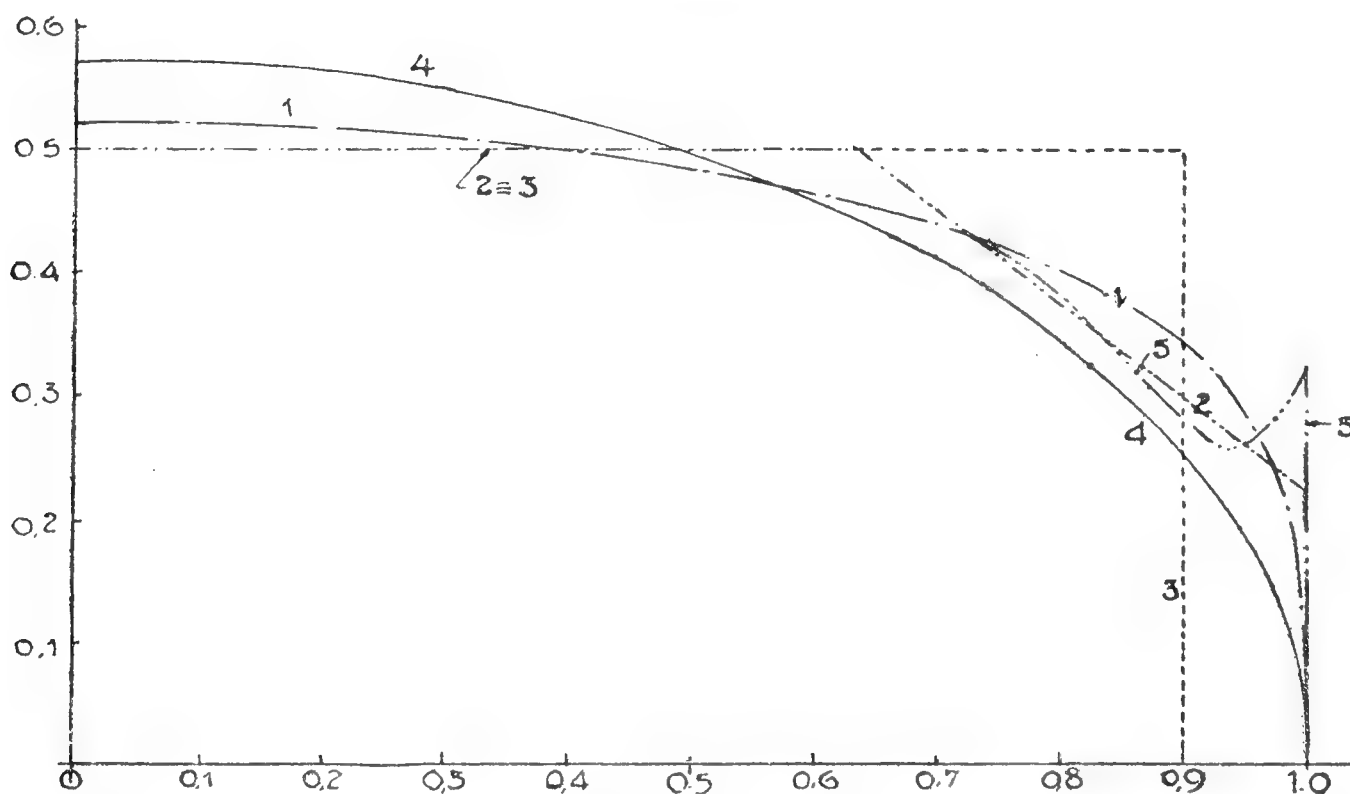



Fig. 1.

a ciascun estremo (di regola $^1/_4$ della profondità dell'ala) dove la pressione vien supposta nulla per tener conto delle perdite marginali. Per una semiala di allungamento 1 : 5 si avrebbe la ripartizione indicata col numero 3 nel diagramma di fig. 1.

A questa distribuzione si è da parecchi autori mosso l'appunto di riuscire troppo grossolanamente semplicista, vennero

perciò suggerite altre leggi di ripartizione con l'intento di mettersi meglio in accordo con le teorie dell'aerodinamica o con i risultati di prove sperimentali.

2. — Il colonnello Dorand propose nel 1921 la distribuzione ellittica ([1]) — curva 4 di fig. 1 — assunta da Prandtl e dalla sua scuola come base di classiche ricerche sul comportamento aerodinamico delle ali.

Knoller suggerì invece una legge di ripartizione secondo una curva di 4° ordine del tipo di quelle dette dai tecnici *curve di Resal*, essa pure ad andamento analogo a quello d'una ellisse ([2]) — curva 1 della fig. 1.

I Tedeschi usano ora correntemente la ripartizione rappresentata dalla linea 2 del diagramma di fig. 1: ritengono cioè costante la pressione nella parte centrale dell'ala e decrescente per un tratto eguale alla profondità del profilo a ciascun lato fino a ridursi alla metà della pressione al centro ([3]).

Tutte le proposte ricordate cercano di rappresentare con funzioni algebriche molto semplici i valori della pressione quali risultano dalle determinazioni sperimentali. Ci si riferisce per lo più in questi studi alle accurate prove del " National Physical Laboratory " di Teddington, confermate da recenti esperienze americane: il diagramma 5 di figura 1 rappresenta il caso di ali con allungamento alquanto superiore ad 1:5 ([4]). È naturale che esso non può dar altro che una indicazione assai sommaria: a prescindere da incertezze di misura e dall'*effetto di scala*, diverso nelle varie circostanze, la ripartizione delle pres-

---

([1]) *Rapports du I^r Congrès de la Navigation aérienne*, Paris, 1921, vol. II, p. 44 e segg.

([2]) Indicando con p la pressione nel punto distante x dalla mezzaria la equazione della curva di Knoller è

$$\left(\frac{p}{a}\right)^4 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1$$

dove a e b sono due costanti. Cfr. Ratzersdorfer, *Problem der Flugzeugstatik*, " Zeitsch. f. ang. Mathem. und Mechan. ", 1921, p. 47.

([3]) Cfr. ad esempio A. Pröll, *Flugtechnik* München, 1919, p. 264.

([4]) Ved. M. Munck, *Die Druckverteilung über Tragflächen nach englischen Messungen* in " Zeitsch. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt ". 1916, p. 133.

sioni dipende da troppi elementi per esser data in modo un po' preciso da una unica legge.

Un concetto assai diverso, esclusivamente teorico, guida invece Stan. Mirea nel proporre la sua distribuzione, risultante dalla ipotesi che la pressione dell'aria sopra l'ala sia in stretta dipendenza delle deformazioni di questa [5]: egli giunge così ad una equazione differenziale del quarto ordine, formalmente identica a quella di Zimmermann per la traversina ferroviaria e ne sviluppa le principali conseguenze. Ma la ipotesi fondamentale, giustificata nel caso della sostentazione statica dei galleggianti, non lo è più egualmente per la sostentazione dinamica degli aeroplani.

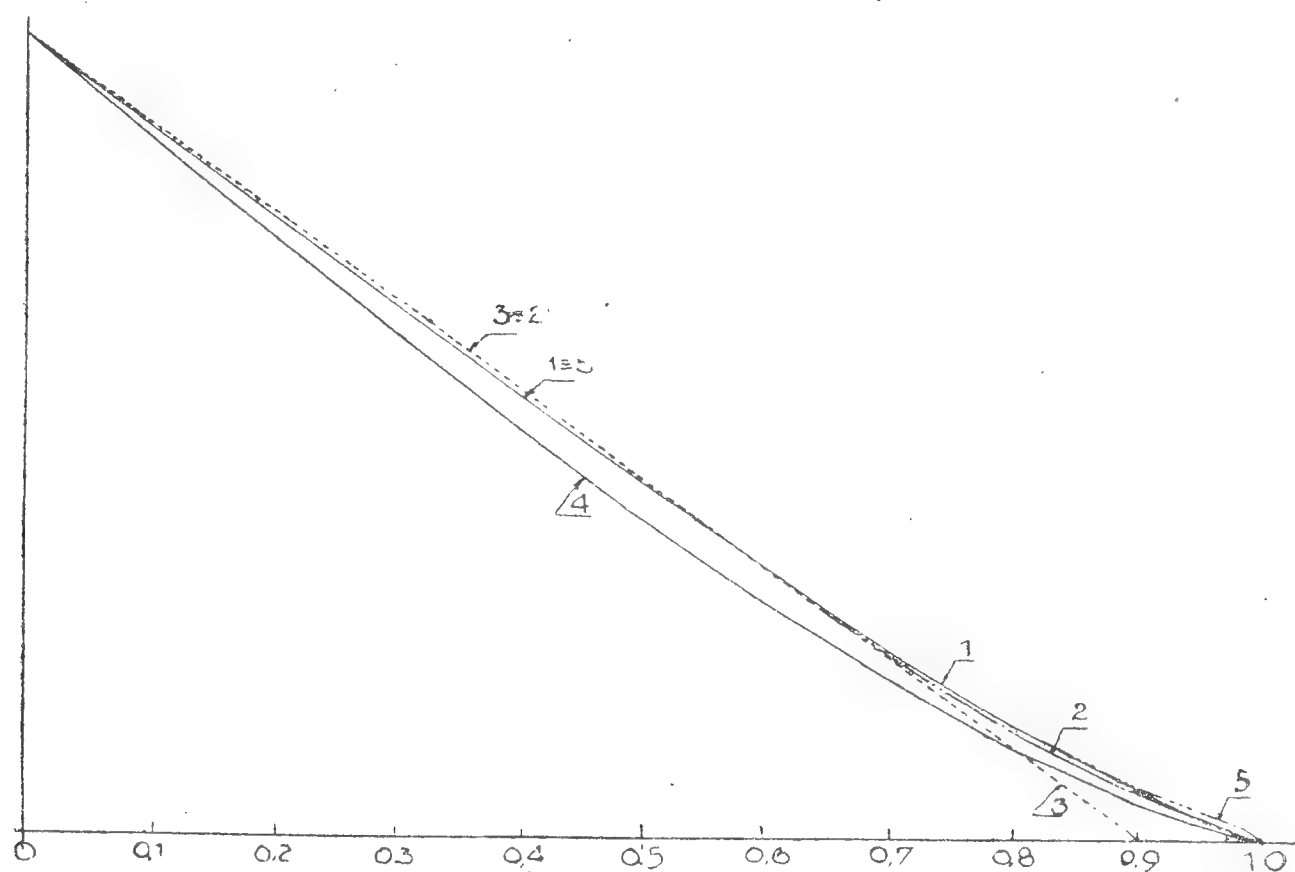



Fig. 2.

3. — La complicazione dei calcoli, talora assai notevole, introdotta accettando le leggi ricordate al numero precedente non ha ragione di essere perchè la ripartizione semplicissima indicata in principio dà risultati abbastanza approssimati.

Consideriamo il caso di un monoplano con ala di sbalzo: la fig. 2 dà le linee integrali dei varî diagrammi di carico cioè gli sforzi di taglio nell'ala: la fig. 3 dà invece gli integrali secondi, cioè i momenti flettenti.

---

(5) MIREA ST. N., *Note sur le calcul des ailes d'un avion.* International Air Congress. London, 1923.

Quantunque, per rendere più evidente il distacco fra la condizione di carico usuale (curva 3 di fig. 1) e la distribuzione sperimentale delle pressioni (curva 5), si sia ammesso un allungamento di 1:5, valore che nei buoni apparecchi non è mai raggiunto, appare evidente dalle figure che, escluso il tratto estremo, dove del resto per ragioni costruttive si impiegano sempre dimensioni esuberanti, la coincidenza fra il diagramma del taglio, quale risulta dalla esperienza (curva 5 di fig. 2) e quello ottenuto nella ipotesi di carico più semplice (fig. 2, curva 3) è assai buona: lo stesso vale per il diagramma dei momenti flettenti.

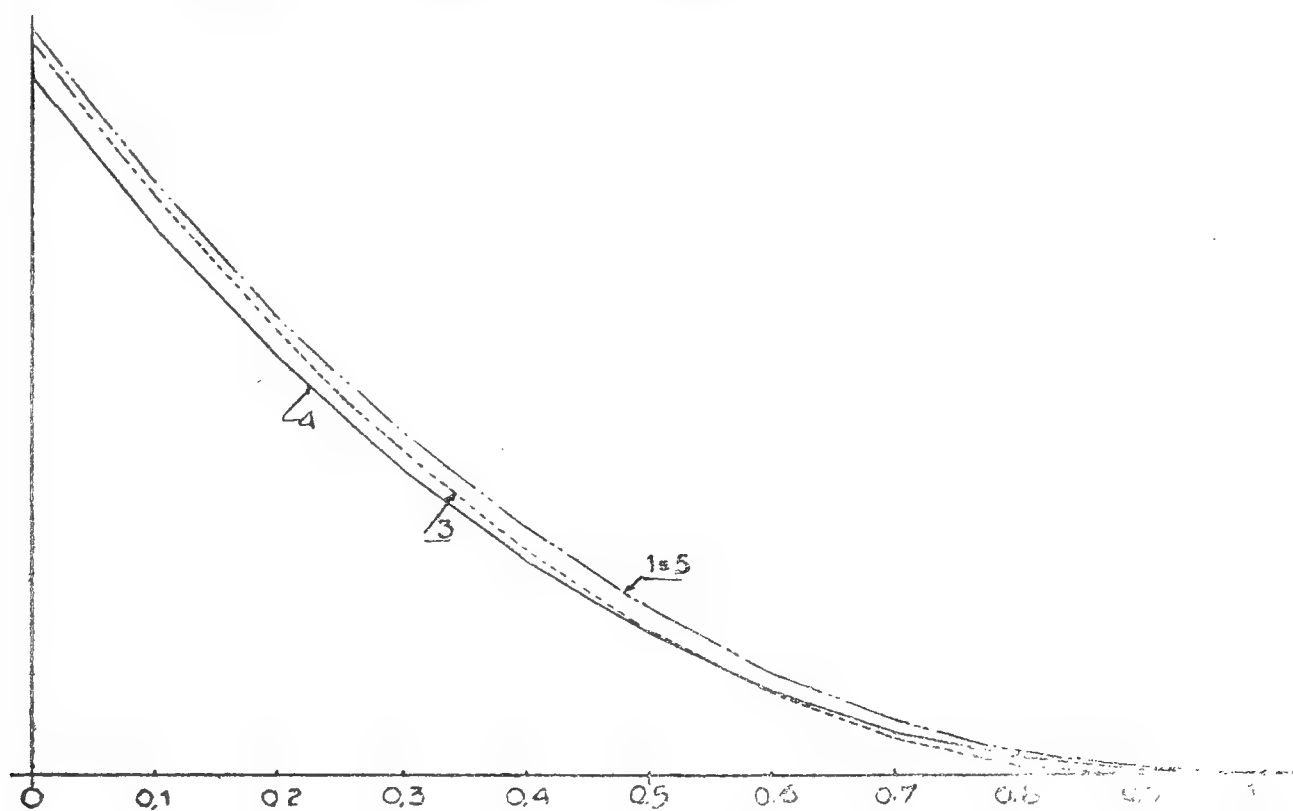



Fig. 3.

Interessa ancora notare come la distribuzione ellittica (linee 4) sia la distribuzione che dà sollecitazioni più diverse da quelle verificate sperimentalmente, mentre quella di Knoller, purtroppo assai complessa nei calcoli pratici, è quella che meglio si avvicina alla realtà.

4. — L'influenza delle diverse distribuzioni di pressione è evidentemente un po' maggiore per le ali sostenute anche in punti intermedi: ma è facile dimostrare che anche in questi casi è inutile ricorrere alle leggi di ripartizione molto complesse, tanto più che nessuna di esse può rappresentare da vicino il fenomeno effettivo in causa delle irregolarità indotte nella corrente d'aria dalla presenza di puntoni, di montanti, di crociere e di altri elementi della cellula.

Bologna, giugno 1924.

Deduzioni dalle recenti ricerche sulle variazioni periodiche dei ghiacciai

Nota del Dr UMBERTO MÒNTERIN
presentata dal Socio nazionale residente Parona

(con una tabella a tavola)

" Quel que soit le sort de nos théories, notre affirmation tout au moins restera acquise: c'est que ces faits, mystérieux et troublants, déconcertants dans leur complexité, sont parmi les plus grands, les plus beaux, les plus majestueux que le monde des Alpes soumette à notre curiosité d'intellectuels ".

F. A. FOREL.

Lo studio del fenomeno glaciale rivela che le variazioni periodiche dei ghiacciai dipendono dal rapporto fra l'alimentazione e l'ablazione (1). E poichè l'azione massima di alimentazione d'un ghiacciaio ha luogo alla sua origine, ne conseguirebbe, secondo Forel (2), che una maggiore alimentazione partita dal serbatoio si farà sentire con un avanzamento alla fronte, con maggiore o minore ritardo a seconda della lunghezza del ghiacciaio, ossia relativamente al tempo che l'aumento di neve impiegherà a trasmettersi come un'ondata giù per la corrente ghiacciata fino alla propria fronte. Da ciò deriverebbe l'asincronismo negli avanzamenti dei ghiacciai, non solo di gruppi differenti ma anche in quelli attigui, mentre sono quasi

(1) PARONA C. F., *Le variazioni periodiche dei ghiacciai e gli studi relativi*, " Natura ", vol. IV, Milano, 1913.

(2) FOREL F. A., *Les variations périodiques des glaciers*, " Bibl. Un. et Revue Suisse ", t. LXIV, 1911.

analoghe le condizioni meteorologiche nello stesso gruppo montuoso. Per contro, poichè l'azione ablatrice opera più intensamente nella parte terminale del ghiacciaio, ove il calore estivo e quindi il fenomeno della fusione arresta il ghiacciaio nella sua discesa, il suo effetto sulla fronte sarebbe di conseguenza immediato, prima rallentando la velocità del moto progressivo, poi invertendo il fenomeno in regresso. In grazia appunto di questa opera immediata dell'ablazione ne conseguirebbe la simultaneità dei regressi, tanto nei ghiacciai lunghi che nei brevi, in contrapposto alle suaccennate divergenze di comportamento nei progressi.

Anzi pare ormai accertato, secondo le classiche ricerche del prof. Brückner (1), che vi sarebbe una stretta dipendenza fra queste variazioni e quelle meteorologiche, per cui i progressi glaciali risponderebbero con un ritardo di qualche anno, vario da ghiacciaio a ghiacciaio, a seconda della loro forma e struttura, a periodi freddo-umidi, i regressi a quelli caldo-asciutti. Un ghiacciaio si avanza perchè nel periodo freddo-umido si accumula una maggior quantità di ghiaccio nel bacino collettore di quella che si scioglie nella sua discesa lungo il ghiacciaio; si ritira perchè nel periodo caldo-asciutto si forma meno e si consuma più ghiaccio (2).

Vi è tuttavia divergenza di idee sulle influenze che la maggiore o minore alimentazione negli alti serbatoi e la più o meno forte ablazione nella regione frontale esercitano sul regime e e quindi sulle oscillazioni periodiche dei ghiacciai. Per il De Marchi (3) nel bilancio di un ghiacciaio ha parte preponderante l'ablazione, cioè il processo di fusione, come fenomeno predisponente non soltanto del regresso, ma anche del progresso, che il Forel (op. cit.) invece attribuisce in gran parte all'alimentazione per innevamento. A queste divergenze di vedute vorrei appunto portare qualche contributo col fondamento dei dati di fatto che mi risultano dalla sorveglianza per dieci anni eseguita sui ghiacciai italiani del M. Rosa.

---

(1) Brückner E., *Klimaschwankungen seit 1700*, Wien, 1890.

(2) De Marchi L., *Le variazioni periodiche dei ghiacciai*, " Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. ", vol. XXVIII, 1895, pag. 1018.

(3) Detto, *Nuove teorie sulle cause dell'era glaciale*, " Riv. di Scienza ", vol. IX, 1911.

Ghiacciai	919	1920	1921	1922	1923
Indren occ., lingua	R.	R.	R.	scomparsa lingua	
„	P.	R.	← m. 20		→ R.
Bors	P.	P.	R. ←	m. 22	→ R.
Castore	P.	P.	R. ←	m. 10	→ R.
Vera Piccolo . .	P.	P.	R. ← m. 8 →		R.
Sesia	P.	P.	P.	R.	R.
Piode or., fianco d	P.	P. m. 11.5	R. ←	m. 25	→ R.
fronte .	P.	P. m. 20.5	P. 13	R. – m. 15 – R.	
Vera Grande, fianc	P.	P.	R.	R. m. 2.50	R.
front	P.	P.	P. m. 18 „ m. 35	R. m. 13 „ m. 1	R. m. 6 „ m. 11
Lys, plateau VI .	→		R. m. 3.25	R. m. 2.25	R. m. 1.25
fianco destro	6.50	P. m. 10.30	R. m. 0.50	R. m. 3	R. m. 6
„ sinistr	15.40	P. m. 1	R. m. 8	R. m. 22	R. m. 11.50
fronte I . .	27.50	P. m. 20	P. m. 20	R. m. 5.50	R. m. 6.50
Macugnaga, fronte	n. 62	P. m. 60	P. m. 26	R. m. 8	R. m. 51
„	— m. 62		→	R.	R. m. 54
„	. 50 c.	P. m. 62.3	P. m. 28.7	P. m. 12	P. m. 18

Ghiacciaio	Altitudine	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Indren occ., lingua sinistra	m. 2924	P.	P.	P. m. 3	P.	P.	P.	P.	R.	R.	R.	scomparsa lingua	
„ destra .	„ 2880	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	R. ←	m. 20	→	R.
Bors	„ 2871	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	R. ←	m. 22	→ R.
Castore	„ 2765	—	P.	P.	P. m. 3	P.	P.	P.	P.	P.	R. ←	m. 10	→ R.
Vera Piccolo	„ 2720	P.	P.	P. m. 6	P. m. 9.6	P.	P.	P.	P.	P.	R. ← m. 8 →		R.
Sesia	„ 2513	—	P.	P.	P. m. 17.55	P.	P.	P.	P.	P.	P.	R.	R.
Piode or., fianco destro .	„ 2500 circa	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P. m. 11.5	R. ←	m. 25	→ R.
fronte	„ 2268	—	P.	P.	P. m. 14.5	P.	P.	P.	P.	P. m. 20.5	P. 13	R. – m. 15 – R.	
Vera Grande, fianco sinistro	„ 2450 circa	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	P.	R.	R. m. 2.50	R.
fronte . . .	„ 2184	—	P.	P. m. 4	P. m. 6	P.	P.	P.	P.	P.	P. m. 18 „ m. 35	R. m. 13 „ m. 1	R. m. 6 „ m. 11
Lys, plateau VI	„ 2500	P.	P.	←			m. 16.60			→	R. m. 3.25	R. m. 2.25	R. m. 1.25
fianco destro V . .	„ 2260	P.	P.	P. m. 5.50	P. m. 5.50	P.	P. m. 7.50	P. m. 7.50	P. m. 6.50	P. m. 10.30	R. m. 0.50	R. m. 3	R. m. 6
„ sinistro IV .	„ 2356	P.	P.	P. m. 2.80	P. m. 18.30	P.	P. m. 15	P. m. 22.40	P. m. 15.40	P. m. 1	R. m. 8	R. m. 22	R. m. 11.50
fronte I	„ 2154	—	P.	P. m. 16.40	P. m. 15	P. m. 18.2	P. m. 40	P. m. 21	P. m. 27.50	P. m. 20	P. m. 20	R. m. 5.50	R. m. 6.50
Macugnaga, fronte destra .	1704-1783	—	P.	P.	P. m. 7	P. ←	m. 49	→	P. m. 62	P. m. 60	P. m. 26	R. m. 8	R. m. 51
„ media .	1800-1695	—	P.	P. ←	m. 44		→	←	m. 62		→	R.	R. m. 54
„ sinistra	1712-1627	—	—	—	P.	P. ← m. 27.5 →		P. m. 50 c.	P. m. 50 c.	P. m. 62.3	P. m. 28.7	P. m. 12	P. m. 18

Già da molti anni avevo percorso in tutti i sensi i ghiacciai di questo importante massiccio montuoso delle Alpi Pennine, ma soltanto nel 1913 per consiglio del Prof. Parona e con l'appoggio del Prof. Somigliana, presidente del Comitato Glaciologico Italiano, iniziai regolarmente le mie osservazioni sui ghiacciai del versante d'Ayas e di Gressoney, che successivamente estesi a quelli delle altre valli meridionali. Interrotte dal 1916 al 1918, ad eccezione del ghiacciaio del Lys, ove le continuai abbastanza regolarmente anche durante questo periodo, le ripresi nel 1919 proseguendole ininterrottamente fino a tutt'oggi.

Detto periodo d'osservazione include una intiera fase progressiva, che durò in media 9 anni, con un andamento che graficamente corrisponderebbe nel suo complesso quasi ad una parabola. Questa però non è punto a linea continua ma debolmente seghettata in rapporto sopratutto alle piccole oscillazioni negative dei mesi estivi, sia anche perchè i singoli progressi di ciascun anno non andarono sempre gradualmente aumentando prima e diminuendo poi, ma presentarono degli alti e bassi: così ad esempio il ghiacciaio del Lys ebbe un progresso di m. 21 nel 1918, di m. 27,50 nel 1919 e di m. 20 nel 1920.

Nell'unita tavola ho raccolto i più importanti dati numerici, che naturalmente non posseggo per il primo periodo per la mancanza di misure precedenti. Ad ogni modo, alcune osservazioni complementari che riporto in nota (1), giustificano più

(1) Nel 1913 trovai la fronte del ghiacciaio del Lys retrocessa di m. 12 rispetto ad una misura fatta dal Prof. Dainelli (*Il ghiacciaio del Lys*, " Boll. Sez. Fiorentina C. A. I. ", 1911) nel 1910. Tale entità è troppo esigua per un ghiacciaio così grande per esser considerata come la somma del ritiro continuato di tre anni. È ben logico il supporre ch'essa rappresenti invece la differenza tra il regresso operatosi ancora dopo il 1910 ed il successivo progresso avutosi nel 1913. Si aggiunga a maggior conferma che nel 1914 si ebbe rispetto all'anno precedente un progresso di ben m. 16.40, cifra troppo elevata per esser ritenuta unicamente come il primo impulso progressivo.

Nel 1914 trovai la fronte del ramo destro del ghiacciaio di Macugnaga alla medesima altezza del segno, come l'aveva osservata il Dainelli nel 1901. E poichè dopo il 1901 questo ghiacciaio continuò a ritirarsi come tutti quelli del Rosa, per ritrovarsi con la sua fronte nella posizione primitiva, dovette necessariamente aver ripreso il moto discendente almeno un anno dianzi ossia nel 1913. Fatto che è inoltre sicuramente comprovato da due

che a sufficienza le semplici diciture di progresso " P „ e di regresso " R „ della tavola nei casi in cui manca il valore numerico.

Per quanto i dati raccolti siano forse insufficienti per poter sulla loro base stabilire delle leggi generali e sicure, tuttavia,

---

fotografie dei fratelli Wehrli di Zurigo (N^ri 15958 e 15953), dalle quali risulta che nel 1911, anno a cui risalgono le dette fotografie, l'estremità linguale s'arrestava di parecchi metri a monte del segno.

Ne consegue che *sono di ben scarso valore le misure eseguite su un ghiacciaio a grandi intervalli,* anche se solamente di due o tre anni, allorchè questi cadono proprio nel periodo di transizione da una fase progressiva a quella regressiva, o viceversa. Infatti dal dato raccolto si potrebbe esser condotti a ritenere il ghiacciaio in una fase progressiva o regressiva, che in realtà non corrisponde al vero, poichè quello *non rappresenta altro che la somma del progresso e del regresso, verificatisi nell'intervallo di tempo trascorso tra le due misure.*

Uguali osservazioni feci parimenti sui ghiacciai di Vera Grande, Piode e Sesia, per cui anche le fronti di questi iniziarono il moto progressivo verso il 1913. Tutti questi ghiacciai hanno pressochè una eguale esposizione, quelli del Lys e di Vera sono pressochè di uguale portata ed arrestano le loro fronti ad una altitudine di poche diecine di metri di differenza; quelli della Sesia e di Piode, per quanto forse di minor potenza, sono però a maggior pendenza; per ultimo il ramo destro del ghiacciaio di Macugnaga si spinge bensì molto più in basso degli altri, ma ha per contro un'esposizione a nord-est, inoltre esso è una diramazione secondaria del grande ghiacciaio di Macugnaga: non presentano quindi nel loro complesso profonde differenze e di conseguenza le loro fronti hanno la possibilità di avere delle oscillazioni pressochè sincrone.

Ugualmente dovettero comportarsi le fronti dei ghiacciai minori, anticipando l'inizio del loro progresso rispetto a quello dei ghiacciai maggiori. Così il ghiacciaio di Bors presentava nel 1914 rispetto al 1901 un avanzamento di m. 2, cifra che, come sopra per il ghiacciaio del Lys, è da considerarsi come la risultante del regresso continuatosi dopo il 1901 e del successivo progresso iniziatosi certamente nel 1912 o forse di già nel 1911. Sebbene non abbia dei dati precisi in proposito, tuttavia propendo per ritenere che ugualmente le fronti degli altri ghiacciai minori (Vera piccolo, Castore, Perazzi, Indren, Garstelet e Netscho) anticiparono l'inizio del progresso di un anno o due, come nell'attuale fase di ritiro.

Faccio però notare che l'attività progressiva dei ghiacciai minori aventi le fronti intorno ad una media altitudine di 2800 m., non si manifestò con una immediata ed effettiva discesa, che in totale non superò mai i 15 m. — per cui quasi oserei affermare che più piccoli i ghiacciai, più esigui furono gli avanzamenti — ma fu caratterizzata da uno straordinario innevamento, che, per lo più persistendo anche per tutta la stagione estiva,

se messi a confronto fra di loro, possono condurci a fare sulla dinamica glaciale delle deduzioni che per ora saranno del tutto preliminari, e che una più lunga osservazione potrà modificare nei dettagli, ma non mai distruggere del tutto.

In questa disamina si deve fare distinzione fra le relazioni che derivano dal confronto fra le oscillazioni unicamente frontali (α) e quelle che, nel periodo di transizione dalla fase regressiva a quella progressiva e viceversa, si verificano nelle varie regioni dei ghiacciai medesimi (β).

α — Nel primo caso risultano tre fatti specifici: 1) che *le variazioni frontali dei diversi ghiacciai prese complessivamente nel loro insieme presentano un sensibile asincronismo le une rispetto alle altre.* Tanto più accentuato poi se ad esempio si confrontano tra di loro gli inizî del progresso (1911-12) e del regresso (1919-20) del ghiacciaio d'Indren con quelli del ramo sinistro del ghiacciaio di Macugnaga (progresso 1915, regresso 1924 ?), nel qual caso si ha una differenza massima dai 5 ai 6 anni. Per quanto ciò sia più che logico data la diversità d'altitudine delle rispettive fronti, di pendenza nonchè d'ampiezza dei bacini collettori e conseguentemente di potenza fra i diversi ghiacciai, tuttavia noi osserviamo nel suo complesso che detto asincronismo non è stato poi molto accentuato e che anzi l'andamento delle oscillazioni ha dimostrato una notevole simultaneità. Che poi questa abbia potuto verificarsi nonostante la grande differenza di potenza fra i ghiacciai maggiori e minori, bisogna pur tener presente che l'entità dell'ablazione diminuisce coll'altitudine. Dato che l'andamento d'una massa glaciale corrisponde, come risulterà in seguito, alla sovrapposizione degli effetti dell'ablazione discontinua su quelli del moto continuo di discesa, e che la velocità aumenta con la potenza della massa ghiacciata, ne consegue che i ghiacciai posti più in alto, hanno bensì una potenza minore, ma parimenti anche un moto minore e vanno

impediva qualsiasi misura diretta. E ciò ebbe sopratutto a verificarsi dal 1911 al 1915, per cui, nemmeno nella seconda metà di Settembre, le fronti erano visibili, fatto che non ebbe più a ripetersi dal 1919 in poi. Una tale persistenza della neve invernale io la ritengo dovuta, piuttosto che all'effetto d'un notevole aumento delle precipitazioni nevose, ad una sensibilissima diminuzione dell'ablazione per effetto d'un abbassamento di temperatura.

soggetti ad un'ablazione molto più esigua di quelli in basso, e quindi le loro prime variazioni — esclusi gli innevamenti più o meno accentuati — sono piccolissime e quasi impercettibili alle nostre osservazioni. Il che ci spiega ancora come l'entità totale delle oscillazioni sia molto diversa fra grandi e piccoli ghiacciai.

2) Che però *le variazioni frontali considerate fra gruppi di ghiacciai aventi caratteri abbastanza analoghi* (gh. di Vera Piccolo, Castore, Perazzi, Indren e Bors da un lato e quelli di Vera Grande, Lys, Piode e Sesia dall'altro) *presentano una perfetta simultaneità tanto nell'inizio del progresso quanto in quello di regresso.*

3) Appare inoltre — il che forse è il fatto più saliente e che sarebbe in aperta contraddizione a quanto si riteneva finora come fatto assiomatico — che *l'asincronismo fra le variazioni frontali di ghiacciai diversi non è più pronunziato nell'inizio del progresso che in quello successivo del regresso.* Ciò è posto in evidenza in modo speciale dal perfetto rapporto fra le oscillazioni sia positive che negative del ramo sinistro del ghiacciaio di Macugnaga e quelle del gh. del Lys, di Vera Grande, ecc.

β — 1) Durante il passaggio dalla fase progressiva a quella regressiva o viceversa, osservando come si manifestano le variazioni che un dato organismo glaciale presenta in tutte le sue parti, tanto sulla fronte che nelle regioni intermedie ed alte, e non soltanto in senso orizzontale, ma anche in senso verticale, ossia le variazioni in potenza, risulta che quelle non sono contemporaneamente dello stesso segno, hanno cioè le une rispetto alle altre un deciso carattere d'asincronismo (1). E più

---

(1) Dò alcuni esempi: Nel 1913 risalendo la morena sinistra del ghiacciaio Grande di Vera osservai che in corrispondenza dell'alpe superiore di Vera la massa glaciale non soltanto si era innalzata in modo da superare il ciglio della morena travolgendo la cotica erbosa della faccia interna della medesima, ma l'aveva pure in parte rotta. Prova sicura che già nell'anno precedente ossia nel 1912 s'era avuto qui e più in alto ancora un notevole aumento di massa. Aumento che fu quasi impercettibile alla fronte nel 1913 e che nel 1914 fu soltanto di 4 metri, mentre in questo medesimo anno in corrispondenza della sopradetta rottura si ebbe un notevole trabocco di massa glaciale sulla faccia esterna della morena. Inversamente nel 1921, mentre la fronte aveva ancora progredito dal 1920 di m. 18 e

propriamente *ogni variazione sia positiva che negativa comincia a manifestarsi con un aumento o con una diminuzione di massa delle alte regioni che rapidamente si propaga a quelle inferiori fino alla fronte*: per cui avviene che mentre *all'inizio della fase progressiva la fronte del ghiacciaio continua a retrocedere le sue parti alte aumentano; ed analogamente all'inizio della fase inversa di regresso mentre la fronte continua a progredire le regioni più vi-*

---

m. 35 rispetto ai due segni caposaldi, la superficie glaciale in corrispondenza della citata rottura non solo s'era di tanto abbassata da corrispondere alla cresta della morena, ma era pure cessato qualsiasi trabocco di ghiaccio.

Ricordo benissimo, come del resto comprovano alcune mie vecchie fotografie del ghiacciaio del Lys, che verso il 1910 dalla morena di sponda destra potevasi ancora raggiungere lo spuntone roccioso portante la quota di 2782 m. (I. G. M.) senza toccare il ghiaccio. Ciò non era più possibile nel 1911 e 1912 causa l'avanzamento della massa glaciale, mentre la fronte presentò i primi deboli segni di progresso soltanto nel 1913. Per contro nel 1921, mentre la fronte avanzò ancora di ben 20 m. dal 1920, i due fianchi, in corrispondenza dei due segni IV e V, già ebbero in quell'anno un ritiro rispettivamente di m. 8 e 0,50, non solo, ma al plateau del Lys constatai rispetto all'anno precedente un abbassamento in potenza di m. 3,25.

Un ugual fatto osservai nella lingua orientale del ghiacciaio delle Piode. Ma la prova più chiara è data dal rispettivo comportamento delle fronti dei tre rami in cui si divide la parte terminale del ghiacciaio di Macugnaga. Già dissi che nel 1913 la fronte del ramo destro aveva iniziato il suo primo debole progresso; aggiungo ora che l'aumento di massa al Belvedere doveva già essere assai notevole fin d'allora, se nell'anno successivo si ebbe già, alquanto più in basso, la rottura della morena di sponda destra, attraverso la quale successivamente si riversò la digitazione mediana. Ebbene, ciò nonostante la fronte del ramo sinistro presentò soltanto nel 1915 un primo incontrollabile avanzamento. Nel 1921 — mentre le fronti presentarono ancora dei notevoli progressi — si ebbero al Belvedere i primi segni precursori di un abbassamento della superficie glaciale. Nel 1922 notevolmente diminuiti in potenza erano i rami mediano e di destra, di cui una parte della fronte ebbe un primo debole regresso, che andò accentuandosi nel 1923 oltre ogni misura anche su quella del ramo mediano. Durante questo triennio la fronte del ramo sinistro, che è anche il più potente e che scende più in basso, non solo non manifestò il minimo accenno di regresso, ma continuò a progredire, nonostante che al Belvedere la superficie glaciale si fosse di tanto abbassata da rendere nuovamente visibile da quel punto le fronti dei ghiacciai del Filàr e del Weissthor dell'opposto versante e la cui vista era stata nascosta durante l'ultima fase progressiva.

cine ai bacini dell'alimentazione diminuiscono: diminuzione che è sopratutto di potenza (1).

2) Consegue inoltre da quanto è stato esposto nelle note esplicative che *gli aumenti e le diminuzioni in senso verticale precedono sempre le corrispondenti variazioni in senso orizzontale;* a ciò quasi oserei aggiungere, in base ad alcune osservazioni complementari, che nelle alte regioni sono assai più manifeste le variazioni in potenza che in superficie ossia in senso orizzontale. Questo però è soltanto una conseguenza della diversità dei caratteri orografici fra alte e basse regioni, per cui nelle prime, a causa della maggiore pendenza, sono più accentuati gli accumulamenti, mentre sono resi quasi impossibili gli espandimenti orizzontali, che sono più conformi e facili nelle regioni basse più larghe e a minor pendenza.

3) Confrontando fra di loro le varie oscillazioni, tanto in alto quanto in basso, presentate da tutti i ghiacciai che s'annidano nei diversi bacini e che precedentemente vennero considerate partitamente per ciascun ghiacciaio a sè, risulta che *tanto all'inizio della fase progressiva quanto in quello di regresso vi è, se non proprio una esatta, certo una notevolissima tendenza alla simultaneità fra le variazioni delle regioni glaciali poste ad una altitudine non molto differente.* Naturalmente altri fattori secondarî e locali — da me non considerati in queste preliminari osservazioni — possono aver dato luogo coi loro effetti particolari a delle discrepanze.

4) Ad ogni modo rimane assodato che l'*asincronismo nelle oscillazioni fra ghiacciai diversi è un fatto del tutto relativo a quella parte di ciascun organismo glaciale che noi mettiamo a confronto* e che nel senso comune si riferisce per lo più alla regione fron-

---

(1) Dalle classiche ricerche fatte per 40 anni al ghiacciaio del Rodano (*Vermessungen am Rhonegletscher*, " Neue Denkschr. Schw. Naturf. Gesel. „, Band LII, 1916, pag. 70) non sarebbe risultata alcuna differenza di fase fra le variazioni del bacino collettore e di quello di dissipamento, il che è evidente, poichè detto ghiacciaio si trovò sempre in fase di ritiro. Nè parimenti si verificherebbe alcuna differenza durante un regolare periodo di progresso. Ma un asincronismo ne risulterà durante il passaggio da una all'altra fase, come dimostrano le mie osservazioni al ghiacciaio Grande di Vera, ai ghiacciai del Lys, di Piode e di Macugnaga.

tale perchè più accessibile e perchè meglio si presta a determinare le variazioni.

Ciò ben inteso per quanto riguarda le variazioni periodiche dei ghiacciai di uno stesso gruppo montuoso, come nel nostro caso, e dove è presumibile che le variazioni periodiche del clima, dalle quali quelle non sono che il riflesso, agiscano non solo simultaneamente ma anche analogamente sul regime dei ghiacciai, pur tenendo conto delle differenze che possono derivare dalle diverse condizioni orografiche e dalla diminuzione dell'ablazione coll'altitudine.

Sotto un certo punto di vista parrebbe quasi che tutto quanto ho esposto sul modo con cui si manifestano successivamente da monte a valle le variazioni di un dato ghiacciaio, stia in favore della concezione del Forel (op. cit.) del maggiore o minore innevamento, che come onda si propaga rapidamente lungo la massa glaciale. Pur ammettendo che vi sia alternanza di periodi di maggiore e di minore precipitazione nevosa, non pare però del tutto indispensabile in modo assoluto ch'essi debbano corrispondere ad altrettanti periodi di maggiore e minore umidità dell'aria rispetto alla media normale del luogo. Un abbassamento di pochi gradi della temperatura porta con sè alla immediata conseguenza di due fatti entrambi favorevoli al progresso: ossia una maggiore precipitazione sotto forma di neve anzichè di pioggia ed una minore ablazione annuale.

L'opposto invece si verificherà con un innalzamento della temperatura. Ma mentre nelle alte regioni si avrà un maggiore o minore accumulo di ghiaccio per il sommarsi degli effetti tanto della maggiore precipitazione nevosa quanto della minor ablazione nell'un caso, o della minore precipitazione nevosa e della maggiore ablazione nel secondo caso; nelle basse regioni invece, al di sotto di un certo limite, ad ogni variazione di temperatura ne conseguirà sopratutto soltanto un minore o maggiore dissipamento della massa ghiacciata.

Ed è appunto per questa diversità nell'entità degli effetti, dovuti alle variazioni della temperatura, fra le alte e basse regioni d'un sistema glaciale che l'inizio di *ogni variazione di progresso o di regresso si manifesterà prima nelle regioni poste più in alto.* Aggiungasi poi che è appunto negli alti bacini d'alimentazione che si stabilisce l'equilibrio fra l'alimentazione e l'ablazione, perchè è là la vera fonte dell'esistenza d'un ghiacciaio.

*
* *

Poichè ogni variazione di temperatura porta con sè un aumento od una diminuzione della massa glaciale, la velocità di questa non potrà sempre mantenersi costante per un determinato ghiacciaio. Non intendo qui di parlare della diversa velocità attraverso una determinata sezione, di cui già riferii a suo tempo (*Introduzione allo studio dei ghiacciai italiani del M. Rosa*, " Boll. Com. Glac. „, N. 3, pag. 128), oppure di quella che un ghiacciaio presenta nelle sue varie parti, che naturalmente varia colla maggiore o minore pendenza; nè di ricercare se le lingue glaciali siano più veloci d'estate che d'inverno, in conseguenza del diminuito attrito causato dalle acque di fusione che imbevono il ghiaccio e bagnano il fondo, come vuole il Finsterwalder (1); nè di confermare la supposizione del Vallot (2), il quale nega questa differenza del movimento glaciale, non potendosi ammettere alcuna influenza della temperatura su una massa di ghiaccio così enorme.

Mi propongo invece di far vedere come *la velocità di movimento in un punto fisso d'un dato ghiacciaio varî con le variazioni periodiche della massa glaciale.* Per quanto scarsi siano i dati da me raccolti a questo riguardo e che qui trascrivo, tuttavia essi mi sembrano abbastanza sintomatici di per sè e sufficienti per poter affermare che *il movimento aumenta nella fase di progresso e diminuisce in quella di regresso.*

Velocità media giornaliera sulla morena mediana

		destra	sinistra
Periodo 1913-14	(fase progressiva)	cm. 20 —	cm. 18.4
„ 1921-22	(„ di transizione)	„ 19.6	„ 17 —
„ 1922-23	(„ regressiva)	„ 18 —	„ 16.3

---

(1) Blümcke u. Finsterwalder, *Zeitliche Änderungen in den Geschwindigkeit der Gletscherbewegung*, " Math. phys. Klasse d. K. Bayer Ak. d. Wiss. „, Bd. XXXV, 1905.

(2) Vallot J., *Expérience sur la marche et les variations de la Mer de Glace*, " Ann. Obs. Météor. et Glac. du M. Blanc „, t. IV, 1900.

E ciò come naturale conseguenza del fatto accertato da molto tempo che più i ghiacciai sono grandi, maggiore è la loro velocità di movimento, ove ben inteso non siano troppo diverse le condizioni orografiche dei ghiacciai messi a confronto.

Come si vede, la velocità maggiore si ebbe nel 1913-14 ossia quando il movimento progressivo s'era già precedentemente manifestato anche alla fronte. Diminuì sensibilmente nel 1921-22 quando si ebbero a constatare i primi regressi al plateau e successivamente anche alla fronte, accentuandosi ancora più nel 1922-33 (1).

Una più lunga serie di dati, che comprenda anche il periodo di passaggio dalla fase regressiva a quella progressiva, mi potrà in avvenire dare maggiori ragguagli se vi sia anticipo nelle variazioni del movimento rispetto all'inizio delle variazioni di massa, oppure se vi sia semplice tendenza o perfetta simultaneità, come parrebbe ora dai dati esposti e come logicamente dovrebbe avvenire (2).

Del fatto che *la temperatura e quindi l'ablazione sia il vero fattore preponderante delle oscillazioni* già si è avuta una prova indiretta nella precessione dell'oscillazione verticale su quella in senso orizzontale sia negativa che positiva.

Ma una maggior conferma si ha seguendo le oscillazioni a cui andò soggetta la lingua del ghiacciaio del Lys tanto frontalmente che sui fianchi durante i diversi mesi di ciascun anno. Riporto alcuni dei dati più importanti tanto della fase progressiva che regressiva:

---

(1) Le misure vennero ripetute partendo sempre dalla medesima sezione attraverso il plateau del Lys ed i dati di velocità furono calcolati in base a 365 giorni.

(2) Anche dai già citati studi sul ghiacciaio del Rodano (pag. 167) fu rilevato che quando la superficie glaciale s'era abbassata la velocità aveva diminuito, quando s'era elevata la velocità aveva aumentato.

FASE	Epoca della misura	Distanza dal segno frontale	Oscillazione		Distanza dal segno IV (fianco sinistro)	Oscillazione		Distanza dal segno V (fianco destro)	Oscillazione	
			invernale	estiva		invernale	estiva		invernale	estiva
			m.	m.		m.	m.		m.	m.
Progressiva	Agosto-Sett. 1913	m. 51.40			m. 62.50			m. 32.50		
	3 - VI - 1914	„ 36.—	+ 15.40		„ 53.—	+ 9.50		„ 31.—	+ 1.50	
	24 - VII - „	„ 37.—		— 1.—	„ 55.—		— 2.—	„ 31.50		— 0.50
	7 - VI - 1915	„ 18.—	+ 19.—		„ 47.—	+ 8.—		„ 26.50	+ 5.—	
	22 - VII - „	„ 20.—		— 2.—	„ 48.—		— 1.—	„ 26.50		0.0
	14 - VII - 1917	„ 80.—			„ 19.50			„ 11,50		
	16 - IX - „	„ 75.—		+ 5.—	„ 26.40		— 6.90	„ 19.50		— 8.—
	22 - VI - 1918	„ 55.—	+ 20.—		„ 13.—	+ 13.40		„ 12.—	+ 7.50	
	22 - VIII - „	„ 54.—		+ 1.—						
	1 - VII - 1919	„ 27.—	+ 27.—							
	7 - IX - „	„ 26.50		+ 0.50						
	1920	„ 50.—								
	12 - VI - 1921	„ 26.—	+ 24.—							
	8 - IX - „	„ 30.—		— 4.—						
Regressiva	11 - VI - 1922	„ 26.—	+ 4.—							
	26 - IX - „	„ 35.50		— 9.50						
	13 - VI - 1923	„ 30.50	+ 5.—							
	15 - VIII - „	„ 42.—		— 11.50						
	16 - VI - 1924	„ 38.—	+ 4.—							

Dal loro confronto deduciamo che:

1° — *nei mesi invernali*, poichè l'ablazione è quasi nulla, *si verificò costantemente un avanzamento* che fu massimo negli anni in cui culminò la fase progressiva, un po' minore all'inizio della medesima, minima nell'attuale fase regressiva;

2° — *nei mesi estivi*, poichè l'ablazione è al suo massimo grado, *si ebbe sempre un regresso* più accentuato e progressivo all'inizio della fase di ritiro, un po' minore nei primi anni di quella d'avanzamento, anzi allorchè questa fu al suo massimo si ebbe una stazionarietà oppure anche un lievissimo progresso (1).

3° — Ne consegue che l'oscillazione totale di un anno dipende dalla differenza fra l'avanzamento invernale ed il successivo regresso dell'estate, per cui si avrà ancora che:

α — *nella fase progressiva l'avanzamento invernale supera la diminuzione estiva*;

β — *nella fase regressiva il ritiro estivo supera l'avanzamento invernale*;

γ — *nel passaggio dalla fase progressiva alla regressiva l'avanzamento invernale ed il ritiro estivo hanno tendenza ad equivalersi.* Sebbene mi manchino i dati relativi, tuttavia suppongo che una tale eguaglianza abbia pure a verificarsi allorchè si passa dalla fase regressiva a quella di progresso.

Ma in ultima analisi si rivela questo fatto importantissimo, che *l'entità progressiva o regressiva dipese sopratutto dalla minore o maggiore ablazione estiva*, per cui generalizzando si potrebbe dire che *l'andamento d'una massa glaciale corrisponde alla sovrapposizione degli effetti dell'ablazione discontinua su quelli del moto continuo di discesa.*

---

(1) Anche le ricerche al ghiacciaio del Rodano (op. cit., pag. 73) hanno messo in evidenza che ad un regresso accentuato e rapido della fronte durante la stagione calda, succede una spinta in avanti, più lenta e più ristretta durante l'inverno. Ne consegue che le misure e le osservazioni in genere per un determinato ghiacciaio devono venir ripetute approssimativamente nel medesimo giorno di ciascun anno, od almeno possibilmente sempre nel medesimo mese, se si vuole avere un dato sicuro sulle vere condizioni del ghiacciaio; senza una tale osservanza il più delle volte si può esser condotti a trarre delle deduzioni sullo stato generale del ghiacciaio che sono del tutto opposte a quelle reali.

Ciò posto, non sarei alieno dal ritenere che *le variazio- periodiche dei ghiacciai dipendano*, più che da una maggiore o minore precipitazione (alimentazione), *da una diminuzione o da un aumento di temperatura* (minore o maggiore ablazione) per effetto delle variazioni dell'irradiazione dipendenti dallo stato del cielo: nebulosità, ecc. Certamente a conforto di una tale ipotesi sarebbe necessario che le oscillazioni fossero accompagnate da una lunga e sistematica serie di osservazioni meteorologiche, che purtroppo mi mancano. Noto incidentalmente a tal proposito che tutta l'estate del 1911 (inizio della fase progressiva), anche nelle giornate più serene, fu caratterizzata da uno strano intorbidamento dell'atmosfera, quale non avevo mai osservato nè prima nè negli anni successivi. E così per tutta l'estate del 1921 (inizio della fase regressiva) si verificò una eccezionale e forte ablazione, che si continuò persino nel tardo autunno, mentre la precipitazione nevosa invernale fu oltremodo esigua, quale non si ricordava a memoria d'uomo.

La conferma di una tale ipotesi sarebbe d'una importanza estrema, poichè noi saremo condotti, in base al principio attualistico, a ritenere che anche le grandi espansioni glaciali del Neozoico (fors'anche quelle del Precambrico, del Carbonico e del Permico) siano state l'effetto più che di una maggiore precipitazione nevosa rispetto all'attuale, di una notevole diminuzione nell'ablazione estiva. E così le fasi interglaciali avrebbero corrisposto ad altrettanti periodi con caratteristiche analoghe a quelli attuali di regresso, ma di più lunga durata.

Cadrebbero quindi completamente di per sè tutte le altre teorie glaciali e prima fra tutte la ormai poco sicura ipotesi orografica, mentre noi dovremo ricercare, come vuole il De Marchi (*Cause dell'era glaciale*, Pavia, 1895), la causa o le cause periodiche che produssero, non un abbassamento della media temperatura annuale, ma una minore radiazione solare, che, rendendo meno accentuata l'escursione annua della temperatura, diminuì di molto l'ablazione estiva.

Istituto Geologico della R. Università.
Torino, giugno 1924.

Apparecchio per la separazione dell'albumina dalla globulina per mezzo della osmosi elettrica

Nota di G. ALESSANDRO BROSSA
presentata dal Socio nazionale residente A. Pochettino

Le esperienze di Wiedemann hanno dimostrato che per azione della corrente i liquidi conduttori tendono a passare attraverso diaframmi porosi, con una velocità indipendente dal loro spessore, ma dipendente dalla loro natura. Questo argomento fu in seguito ripreso da Quincke, da Helmoltz e recentemente da Lamb, da v. Smoluchowski e da Perrin. La teoria dell'osmosi elettrica completamente svolta da quest'ultimo è quella oggi generalmente accettata.

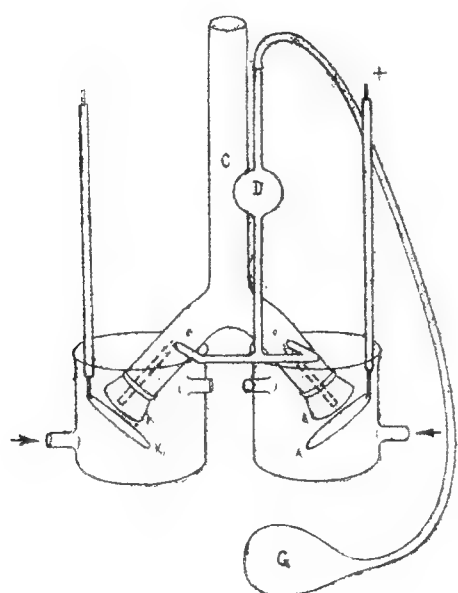
Dal punto di vista pratico, in questi ultimi anni, sono stati presi molti brevetti in applicazione alle teorie accennate; in essi vengono ingegnosamente sfruttati i principî e le esperienze di laboratorio e ciò specialmente dal conte Schwerin e dalla " Elektrosmotische Gesellschaft " da lui fondata.

Nel campo biologico apparecchi fondati sopra questi principî vennero presentati da W. G. Ruppel e da J. Reitstötter. A un consimile dispositivo si accenna in lavori di W. Pauli.

L'apparecchio da me studiato ha per scopo di separare quantitativamente le albumine dalle globuline del siero; inoltre soddisfa alle condizioni di poter lavorare su quantità piccolissime di liquido (2-3 cmc. di siero), condizione indispensabile per le ricerche cliniche alle quali io intendo adattare il mio dispositivo elettroosmotico.

Esso si basa sulle note, già accennate, esperienze di Ruppel e Reitstötter, che separarono le proteine del siero per via elettrolitica. A questo scopo vengono allontanati gli elettroliti pre-

senti nel siero per via elettrica, facendovi passare la corrente elettrica fra diaframmi adatti, in modo da aversi durante tutta la esperienza una reazione anfotera. Solo a questo modo è possibile il completo allontanamento degli elettroliti e la susseguente floculazione della globulina, condizione, come si vedrà poi, necessaria, ma non sufficiente per una floculazione quantitativa.

L'apparecchio consiste essenzialmente in un tubo di vetro a Y (*C*), le due branche (*c*, *c*) armate di membrane (*A*, *K*) stanno di fronte agli elettrodi (*A*, *K*). Questi consistono in 2 dischi metallici, di cui uno, l'Anodo, di platino, poichè all'anodo si svolge Cl che intaccherebbe gli altri metalli; il Catodo è di rame. Le due branche del tubo a Y, con gli elettrodi sono immersi in due bicchierini nei quali si ha un flusso continuo di acqua distillata.

I diaframmi (membrane) accennati dividono così l'apparecchio in tre sepimenti: uno spazio centrale, uno spazio anodico e un altro catodico. A questo modo il siero è completamente separato dall'acqua distillata, che risciacqua le membrane; e la corrente elettrica può liberamente circolare in tutto l'apparecchio.

Naturalmente la lunghezza del tubo, la ristrettezza della sua sezione e la poca conducibilità dei liquidi offrono una grande resistenza alla corrente, in modo che è necessaria una notevole tensione. Perciò, malgrado un voltaggio elevato, per la debole intensità di corrente la dialisi elettrica richiede un tempo relativamente lungo. Non sarebbe stato difficile mutare le condizioni dell'esperienza dando un'altra forma e altre dimensioni all'apparecchio, ma allora, trattandosi di un dispositivo relativamente piccolo, si avrebbero avute difficoltà ben più gravi per l'applicazione delle membrane, che nell'apparecchio descritto si possono fissare sicuramente in pochi minuti. Perchè il processo elettro-osmotico avvenga regolarmente è necessario che il liquido contenuto nel tubo *C* sia continuamente tenuto in movimento; condizione che, per la piccolezza dello strumento studiato, non poteva venir realizzata per mezzo di un comune agitatore.

Per risolvere semplicemente questo quesito ho dovuto aggiungere al mio dispositivo un tubo a T (*D*) che si termina in

due tubicini, sboccanti quasi al fondo del tubo *C*, di fronte ai due diaframmi. Facendo passare attraverso D una corrente d'aria, si ottiene un continuo rimescolamento del liquido contenuto in C. Ciò avviene per mezzo di una peretta di gomma, o automaticamente per mezzo di un tamburo di Marey, messo in azione da un eccentrico. Per impedire che, per i continui spostamenti che il liquido subisce, il liquido trabocchi nel tubo *C* e nel tubo *D*, si hanno bolle di sicurezza, una in *D* e l'altra in *C* (quest'ultima non venne disegnata nella figura).

È necessario che nello scuotere il siero, per mezzo della agitazione, non si formino bolle d'aria, chè altrimenti in tal modo le soluzioni di proteine potrebbero venir alterate. È noto infatti (Ramsden, Metcalf) che l'albumina viene assorbita alla superficie delle bolle d'aria e susseguentemente denaturata. Si potrebbe allora avere una sua parziale flocculazione unitamente alla globulina, perchè, come si sa, queste due sostanze hanno i punti isoelettrici molto prossimi. A parte l'alterazione che potrebbero subire le soluzioni dei proteidi, questo fatto porterebbe a scarti analitici molto notevoli.

Dal livello delle membrane all'origine della branca ascendente del tubo *C* si ha una capacità di circa 5 cmc.: queste dimensioni permettono di fare ricerche quantitative con quantità relativamente piccole di siero (2 cmc.), che vengono ulteriormente diluiti con acqua e con elettroliti.

La principale difficoltà che s'incontra in queste ricerche quando si vogliono allontanare completamente gli anioni e i cationi presenti in una soluzione sta nella scelta dei diaframmi.

Non voglio qui addentrarmi nel complesso meccanismo, nè nella teoria della carica elettrica che può assumere un diaframma di fronte ai varî elettroliti nelle varie condizioni sperimentali, della dipendenza cioè del processo elettrocinetico dalla natura della fase solida e della fase liquida, ma semplicemente limitare il problema a una trattazione empirica, adatta a una pratica soluzione della questione postami. È necessario provvedere a che il liquido da studiare (nel nostro caso siero) durante tutto il processo di dialisi elettrica rimanga praticamente anfotero; come vedremo poi, una leggerissima reazione acida non nuoce.

Queste condizioni si verificano quando le due membrane dell'apparecchio abbiano un differente potenziale elettrico, e più

particolarmente se la membrana che separa lo spazio anodico dallo spazio mediano è positiva, affinchè permetta il completo passaggio degli anioni della soluzione.

Da Perrin in poi furono studiati i più svariati diaframmi, e la loro carica di fronte agli elettroliti. Non è mio còmpito qui riferire queste esperienze: ricorderò solo un esperimento di Reitstötter. Egli fa l'elettrolisi di una soluzione 0,1 normale di NaCl fra due diaframmi di carta pergamena. Dopo un breve passaggio di corrente ottiene una reazione acida nello spazio mediano del suo apparecchio; ripetendo lo stesso esperimento con diaframmi di silice si ha nelle stesse condizioni una reazione alcalina. Continuando l'esperienza si ottiene da una soluzione 0,1 normale di NaCl una soluzione 0,05 normale di NaOH: come si vede, in questo caso il diaframma è completamente impermeabile agli anioni.

Io estesi le mie esperienze ad un certo numero di diaframmi, prima studiati isolatamente poi opportunamente appaiati; fra gli altri: carta pergamena, collodio steso su tessuti di filo o cotone, tessuti di seta e di lana opportunamente impregnati di varî cationi o di gelatina ecc.; e dosai nel liquido del tubo *C* gli $H^{\cdot}$, OH' e Cl' al principio e alla fine di ogni esperienza.

In ricerche fatte con coppie di membrane, quali: carta pergamena, lana o seta impregnata con cromo-gelatina; carta pergamena, lana o seta impregnata con gelatina al formolo ecc., ho avuto sempre come risultato finale, dopo 30′ di passaggio di corrente (120 volts, 25 milliampères), una reazione leggermente acida. Devo avvertire che in questa serie di esperienze non mi servivo del dispositivo di agitazione descritto, ma di agitazione manuale, per cui la mescolanza del liquido avveniva forse irregolarmente. Invece della pergamena quale membrana negativa, spesso usavo diaframmi di collodio montati su tela di filo o di cotone.

In queste mie ricerche notai l'importanza di un regolare lavaggio delle membrane con acqua distillata. Questo lavaggio deve essere rapido, ma non tanto rapido da allontanare completamente gli elettroliti formatisi nello spazio anodico o catodico, perchè altrimenti la corrente diminuirebbe troppo d'intensità, a danno dell'intero processo elettrolitico. È necessario che la conducibilità delle soluzioni diminuisca regolarmente senza sbalzi.

Osservando queste e consimili cautele si ottiene un'elettrolisi soddisfacente con una acidità finale piccolissima e una concentrazione di Cl′ minima.

Riferisco qui i risultati di una delle tante esperienze fatte con una soluzione di NaCl (0,4 °/₀ circa) compresa tra diaframmi di pergamena e di carta pergamena; questi diaframmi sono quelli che, dopo una laboriosa serie di ricerche, finii per adottare.

Il circuito è formato dall'apparecchio, da una resistenza variabile e da un milliamperometro. La temperatura è data da un piccolo termometro immerso in C.

TABELLA I.

Tempo	Temperatura	Volt	Milliampères
0′	28°	120	20
12′	37°	130	16
24′	35°	135	12
37′	33°	135	9
50′	31°	135	6
60′	28°	135	6

Dopo queste esperienze preliminari passai alle ricerche che a me particolarmente interessavano, cioè a quelle riguardanti il siero. Il siero per queste ricerche deve essere fresco e non presentare alla tintura di tornasole reazione alcalina, questo avviene spesso anche in sieri freschi, raccolti sterilmente, sempre in sieri conservati per qualche tempo in ghiacciaia.

Il siero è generalmente diluito in parti uguali con acqua distillata; alcune volte per condurre meglio la corrente conviene aggiungere un poco di cloruro di sodio. Ciò dipende dal contenuto in elettroliti del siero originale, secondo la sua provenienza e natura (siero di animali e sieri patologici). A ogni modo è necessario avere conducibilità tali per cui si possa cominciare l'esperienza con 25-30 milliampères, in modo da aversi in circa 30′ l'allontanamento quasi totale degli elettroliti e in meno di un'ora la loro completa scomparsa. La temperatura non deve salire troppo oltre i 40° per impedire un'alterazione dell'albumina (denaturazione).

Il comportamento del siero nella osmosi elettrica è diverso da quello di una semplice soluzione di NaCl di corrispondente

concentrazione: si ha una tendenza opposta a quanto si è verificato precedentemente, cioè tendenza alla formazione di alcali. Se non si hanno molte cautele, il liquido del tubo *C* darà fin da principio reazione alcalina; operando però nelle condizioni che io esposi la reazione rimane anfotera fino alla fine dell'esperienza.

Verso il termine del passaggio della corrente si constata assai facilmente la reazione del liquido e quella dei fiocchi di globulina in esso sospesi. Infatti sospendendo l'agitazione del liquido si ha: per reazione acida una cataforesi dei fiocchi al catodo, per reazione alcalina all'anodo e per reazione anfotera i fiocchi non si muoveranno.

Naturalmente si può, sempre che si voglia, correggere la reazione del liquido; in generale però io preferisco rifare l'esperienze con nuove soluzioni.

La ragione del diverso comportamento del siero e delle soluzioni di NaCl non ci deve sorprendere, poichè già da vecchie esperienze di Charpentier appare l'influenza delle proteine (gelatina) su ioni cromici: qui non voglio altro che accennare alla constatazione del fatto.

Ecco i risultati di una esperienza regolare, con conseguente reazione finale anfotera (al tornasole) e flocculazione *optimum* della globulina.

TABELLA II.

Tempo	Temperatura	Volt	Milliampères
0′	27°	105	22
10′	35°	125	22
15′	37°	135	20
25′	36°	135	15
35′	32°	135	8
45′	30°	135	5

Tutto il processo di osmosi elettrica qui esposto sta nel nostro caso a rappresentare una dialisi abbreviata, per cui invece di dializzare il siero per giorni e settimane si allontanano da esso tutti gli elettroliti presenti in meno di un'ora. A questo modo si separa dal siero la globulina (euglobulina) insolubile in acqua distillata e rimane in soluzione la sola albumina.

È l'allontanamento degli elettroliti condizione sufficiente per una separazione quantitativa dell'euglobulina? Questa affermazione si trova, pare, implicitamente nei varî autori che hanno trattato di questi argomenti. Secondo le mie esperienze invece per ottenere una flocculazione *optimum* delle globuline è necessario avere nel liquido una concentrazione finale di $H^{\cdot}$ diversa da quella del siero ($P_h = 7,35$), cioè una concentrazione prossima al punto isoelettrico della globulina ($P_h = 5,52$). Difatti la determinazione da me costantemente fatta delle concentrazioni degli idrogenioni, potenziometricamente o con indicatori, sulle soluzioni di albumina dopo l'allontanamento della globulina, mi ha sempre fatto constatare una concentrazione corrispondente al punto isoelettrico della globulina o assai prossimo ad esso.

Di più in esperienze fatte con l'apparecchio descritto o con altri consimili mi è spesso occorso di constatare che ad allontanamento quasi completo degli elettroliti e a reazione anfotera al tornasole, non corrisponde che una flocculazione minima di globulina. Questa flocculazione diventa completa per l'aggiunta di quantità sufficienti di acido, quando si raggiunga il punto isoelettrico della globulina. Qui accenno appena alla questione, salvo a ritornarvi con una serie sistematica di ricerche orientate in questo senso.

Il descritto apparecchio di osmosi elettrica permette facilmente le analisi dei componenti proteici del siero: facendo un'analisi dell'albumina prima e dopo dell'esperienza. Questa analisi può esser fatta con quantità piccolissime di sostanza con un micrometodo qualsiasi per la determinazione dell'Azoto o in via refrattometrica, o anche, quando non si esigano risultati troppo precisi, con uno dei tanti metodi di precipitazione dell'albumina, che viene poi centrifugata in tubi adatti precedentemente tarati (tubi di Nissl o consimili).

Torino – Chimica medica della R. Università.
Giugno 1924.

Una proprietà caratteristica di tre sistemi ∞^1 di superfici

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Torino)

presentata dal Socio nazionale residente C. Somigliana

---

1. — Il prof. Somigliana, riprendendo alcune considerazioni svolte da E. Laura sulla propagazione delle onde in un mezzo isotropo ([1]), ha dimostrata una proprietà di notevole interesse fisico, che geometricamente equivale al seguente teorema: *Una famiglia di superfici* PARALLELE, *tale che ogni funzione che sia costante sulle superfici della famiglia abbia il* Δ_2 *che goda della stessa proprietà, è necessariamente un sistema di piani paralleli, o di sfere concentriche, oppure di cilindri circolari coassiali* ([2]).

Io qui estendo questo teorema, dimostrando che è ancor vera la proposizione che si ha sopprimendo nel precedente enunciato la parola PARALLELE.

Senza soffermarmi sulla nuova portata che in base a ciò acquistano i teoremi della Nota citata in ([2]), faccio invece rilevare che per il teorema che qui dimostro, in base anche alla equazione della propagazione del calore, si ha che:

Gli unici casi in cui lo studio della propagazione del calore in un conduttore, si riduce ad un problema ad una sola dimensione, sono quelli (notissimi) in cui le superfici isoterme sono piani paralleli, o sfere concentriche, oppure cilindri circolari coassiali.

([1]) E. LAURA, *Sopra la propagazione di onde in un mezzo indefinito*, in " Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio ", Bocca, Torino, 1918, p. 253.

([2]) C. SOMIGLIANA, *Sulle relazioni fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica*, "Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. 53 (1919), p. 974.

2. — Sia $u = \text{cost.}$ una qualunque famiglia di superfici dello spazio, e $\varphi = \varphi(u)$ una qualunque funzione numerica del punto, costante sulle superfici di detta famiglia.

Cominciamo col supporre che quest'ultima sia una *famiglia di* LAMÉ: essa starà quindi con due altre famiglie $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$ in un sistema triplo ortogonale. Assunte u, v, w come coordinate curvilinee di punto nello spazio, il quadrato dell'elemento lineare prenderà la forma:

$$ds^2 = U^2\, du^2 + V^2\, dv^2 + W^2\, dw^2. \tag{1}$$

Le U, V, W sono tre funzioni delle u, v, w, che devono verificare le *6 equazioni di* LAMÉ: allora la (1) definisce il sistema triplo, e quindi pure la nostra famiglia ∞^1 di superfici, a meno di moti rigidi dello spazio [3].

Si ha poi [4]:

$$\Delta_2\, \varphi(u) = \frac{1}{UVW} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\right) \frac{d\varphi}{du} + \frac{1}{U^2} \frac{d^2\varphi}{du^2};$$

se si vuole che il secondo membro, qualunque sia φ, sia *funzione della sola* u, dovranno separatamente esser tali le espressioni:

$$\frac{1}{UVW} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\right), \qquad \frac{1}{U^2}.$$

Per la seconda può supporsi $U = 1$, bastando prendere, se ciò non fosse, come nuova variabile u la $\int U\, du$, con che non

---

[3] Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Spoerri (Pisa), vol. II (1903), § 408, p. 478. — Quelle *6 equazioni* sono la:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v\, \partial w} = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial w} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial U}{\partial w}$$

con le due analoghe, e la:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{W} \frac{\partial V}{\partial w}\right) + \frac{1}{U^2} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial u} = 0$$

e le due analoghe.

[4] Cfr. op. cit. in [3], vol. I (1902), p. 68, form. (25).

mutano le superfici $u = \text{cost.}$ In tal caso dovrà solo più aversi:

$$\frac{\partial}{\partial u} \log (VW) = \text{funzione della sola } u. \tag{2}$$

3. — Delle 6 equazioni di LAMÉ (5), nelle nostre ipotesi, una è verificata identicamente; altre due si riducono a:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 0 , \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = 0 ,$$

per cui forniscono:

$$V = Au + C , \qquad W = Bu + D , \tag{3}$$

essendo A, B, C, D *funzioni delle sole* v, w; le rimanenti tre diventano:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial w} = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial w} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v} \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{W} \frac{\partial V}{\partial w}\right) + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial u} = 0. \tag{6}$$

Distinguiamo tre casi a seconda che delle A, B, due, una o nessuna è nulla.

4. — Se è $A = B = 0$, la (6), in virtù delle (3), diventa:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{W} \frac{\partial V}{\partial w}\right) = 0 ,$$

e questa esprime che la forma differenziale quadratica:

$$V^2\, dv^2 + W^2\, dw^2$$

è *a curvatura nulla* (6). Poichè per le (3) le V, W ora non dipendono da u, così quella forma binaria (che è definita positiva)

(5) Cfr. nota (3).
(6) Cfr. op. cit. in (3), vol. I (1902), p. 98, form. (18).

si potrà mutare nella $dv^2 + dw^2$, facendo un cambiamento delle variabili v, w (con che non mutano le superfici $u =$ cost.) [7]. Con ciò l'elemento lineare dato dalla (1) si riduce all'elemento Cartesiano: $ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2$. Dunque in queste ipotesi *le superfici considerate* $u =$ cost. *sono piani paralleli.*

5. — Se è $B = 0$, $A \neq 0$, le (4), (5), in virtù delle (3), diventano:

$$\frac{\partial A}{\partial w} = 0 , \qquad \frac{\partial D}{\partial v} = 0 . \tag{7}$$

Per la seconda di queste equazioni, la $W = D$ è funzione della sola w, onde la si può supporre 1, prendendo, se ciò non fosse, la $\int W dw$ come nuova variabile w (con che non mutano le superfici $u =$ cost.). In tal caso la (2), per le (3), diventa:

$$\frac{A}{Au + C} = \text{funzione della sola } u,$$

per cui occorre che sia $C = kA$ con k costante. Sarà quindi: $V = (u + k) A$. Si può supporre $A = 1$ per la prima delle (7); e parimenti può supporsi $k = 0$, prendendo, se ciò non fosse, come nuova variabile u la $u + k$ (con che non mutano le superfici $u =$ cost.). Con ciò l'elemento lineare dato dalla (1) si riduce a $ds^2 = du^2 + u^2 dv^2 + dw^2$, elemento lineare nelle coordinate cilindriche. Pertanto nelle ipotesi fatte *le superfici considerate* $u =$ cost. *sono cilindri circolari coassiali.*

6. — Sia ora $AB \neq 0$. Potremo porre: $C = A\alpha$, $D = B\beta$, essendo α, β funzioni delle sole v, w. Le (3) diventano:

$$V = A(u + \alpha), \qquad W = B(u + \beta); \tag{8}$$

si ha quindi per la (2) che deve essere:

$$\frac{1}{u + \alpha} + \frac{1}{u + \beta} = \text{funzione della sola } u,$$

---

[7] Cfr. op. cit. in [3], vol. I (1902), p. 72.

e quindi $\alpha = \text{cost.}$, $\beta = \text{cost.}$ Allora, tenendo presenti le (8), si ha per le (4), (5):

$$\frac{\partial A}{\partial w}(\beta - \alpha) = 0 , \qquad \frac{\partial B}{\partial v}(\beta - \alpha) = 0 .$$

Ora non può essere $\frac{\partial A}{\partial w} = \frac{\partial B}{\partial v} = 0$, poichè, se ciò fosse, sarebbe per la (6): $AB = 0$, contro il supposto. Dovrà quindi essere $\alpha = \beta$, ed il valore comune di queste costanti lo si può supporre *nullo*, prendendo in caso contrario $u + \alpha$ come nuova variabile u. Pertanto le (8) si riducono semplicemente a:

$$V = Au , \qquad W = Bv . \tag{9}$$

Per le (9) la (6) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial w}\right) + AB = 0$$

e questa equazione esprime che la forma binaria $A^2 dv^2 + B^2 dw^2$ ha la curvatura $+1$ (8). Si potrà quindi mutare tale forma nella $dv^2 + \text{sen}^2 v\, dw^2$, operando un cambiamento delle sole variabili v, w (9). Con ciò l'elemento lineare dato dalla (1) si muta in $ds^2 = du^2 + u^2 dv^2 + u^2 \text{sen}^2 v\, dw^2$, elemento lineare nelle coordinate polari. Pertanto nelle nostre ipotesi *le superfici considerate* $u = \text{cost.}$ *sono sfere concentriche.*

7. — Sia ora $u = \text{cost.}$ una *qualunque* famiglia ∞^1 di superfici. Consideriamo due famiglie $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$ di superfici a quelle ortogonali. Se assumiamo le u, v, w come coordinate curvilinee, l'elemento lineare sarà dato dalla:

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2 + 2\Theta\, dv\, dw ;$$

$U\,du$ è la *distanza normale infinitesima* fra due consecutive superfici della famiglia $u = \text{cost.}$, considerata inizialmente.

---

(8) Cfr. loc. cit. in (6).
(9) Cfr. op. cit. in (3), vol. I (1902), p. 221.

Se ora, ragionando come al n° 2, imponiamo a $\Delta_2 \varphi(u)$ di essere costante per $u =$ cost., qualunque sia φ, si trova ancora che U non deve dipendere che da u. La $U\,du$ soddisfa quindi all'*equazione di* CAYLEY caratteristica per le famiglie di LAMÉ ([10]), onde la $u =$ cost. deve essere una *famiglia di* LAMÉ ([11]). Con ciò siamo ricondotti al caso trattato nei n[i] precedenti, onde la proprietà enunciata al n° 1 resta completamente dimostrata.

([10]) Cfr. op. cit. in ([3]), vol. II (1903), p. 486. — Tale *equazione* è lineare ed omogenea nelle derivate parziali rispetto a v, w, del 1° e 2° ordine, della suddetta *distanza normale infinitesima*.

([11]) Da quella condizione si potrebbe anzi dedurre direttamente che le $u =$ cost. sono superfici parallele.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di I. Guareschi).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., cxl–492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. *Dante e il Piemonte.*

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (viii–648 pp.).

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIX, Disp. 15ª, 1923-1924

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1924

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Giugno 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Pochettino, Boggio, Garelli, Pierantoni e il Segretario Mattirolo.

Il verbale della precedente adunanza è approvato senza osservazioni.

Scusa l'assenza il Presidente Senatore Ruffini.

Il Presidente aprendo l'adunanza dà il saluto del benvenuto ai nuovi Soci, bene augurando dalla loro cooperazione attiva ai lavori dell'Accademia. Alle parole del Presidente rispondono ringraziando i Soci testè eletti (Decreto 13 marzo 1924) Boggio, Garelli e Pierantoni.

Il Presidente presenta quindi all'adunanza l'elegante e ponderoso volume edito dalla " Società Medica Chirurgica di Bologna " nella ricorrenza del 1° Centenario della vita sociale, celebrato nel 1923.

Il volume (che porta il N. 247 della Serie), dedicato a ricordare le benemerenze della Società nei varii rami delle Discipline mediche, è accompagnato da una artistica medaglia commemorativa, che il Presidente presenta agli Accademici

esprimendo ringraziamenti al Comitato promotore e ordinatore delle onoranze centenarie.

Il Socio PANETTI fa omaggio di due sue pubblicazioni, edite in lingua tedesca, dai titoli:

1) *Experimentelle Bestimmung der Druckverteilung an rotierenden ebenen Flächen.*

2) *Laboratoriumsmessungen über das Dämpfungsmoment bei kleinen Schwingungen eines Flugzeuges.*

Questi lavori comparvero nelle *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik*, edite a cura di Kármàn e Levi-Civita.

Il Presidente ringrazia.

Il Socio SOMIGLIANA presenta quindi nel nome del signor Mauro PICONE una Nota dal titolo: *Una proprietà delle combinazioni di approssimazione intiere e trigonometriche per le funzioni continue.* Questa Nota è accolta per gli *Atti*, dopo che il Socio brevemente ne ha discorso.

Il Socio PONZIO presenta all'Accademia per la inserzione negli *Atti* una sua Nota dal titolo: *Sulle idrossigliossime.*

Questa Nota è seguìta da tre altre che il Socio PONZIO ha redatto colla cooperazione rispettivamente dei signori dottori V. BERNARDI, G. RUGGERI e G. B. SEMERIA. Le tre Note hanno i titoli seguenti:

1) *Sui perossidi delle diossime dei diacilperossidi.*

2) *Sul perossido della dibenzoilgliossima.*

3) *Sulla configurazione dell'Acido 2, 3 oleico.*

Le quattro Note sono accolte per la pubblicazione negli *Atti*.

Il Socio MATTIROLO infine presenta una sua Nota dal titolo: *I funghi raccolti nello Scioa e nei Galla dal Dr G. Negri e dal Rev. Padre Balbo nell'Uganda (Kenia)*, che viene accolta per gli *Atti.*

Dopo di che il Presidente, trattandosi dell'ultima riunione Accademica annuale, saluta i Soci augurando loro liete le ferie estive.

LETTURE

Una proprietà delle combinazioni d'approssimazione intiere e trigonometriche per le funzioni continue

Nota di MAURO PICONE, Professore nell'Università di Pisa.

Presentata dal Socio nazionale residente Somigliana.

1. — Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x definita nell'intervallo (a, b). Diremo che la funzione $f(x)$ *interseca lo zero* negli n punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ di (a, b), se: 1°) questi punti sono tutti interni all'intervallo (a, b); 2°) riesce $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0$; 3°) indicando con ϵ l'unità positiva o negativa, posto $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$, la funzione $f(x)$ prende nell'intervallo (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, n)$ anche valori del segno di $\epsilon(-1)^k$. Se la funzione reale $g(x)$ è del pari definita nell'intervallo (a, b), diremo che $f(x)$ e $g(x)$ *si intersecano* negli n punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, di (a, b) se la differenza $f(x) - g(x)$ interseca lo zero in questi punti.

Designeremo sempre con $\theta(x)$ una funzione reale della x, arbitrariamente fissata, sommabile (LEBESGUE) nel suo intervallo di definizione, non negativa e quasi ovunque non nulla. Sussistono i due seguenti teoremi:

I. *Se la funzione continua* $g(x) \equiv\mathrel{\mkern-14mu}| 0$, *periodica e di periodo* 2π, *è in* $(0, 2\pi)$ *e rispetto alla funzione* $\theta(x)$ *ortogonale alle* $2n+1$ *funzioni trigonometriche*

$$\cos kx, \qquad \operatorname{sen} kx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

se cioè verifica le $2n+1$ *equazioni*

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} \theta(x)\, g(x) \cos kx \, dx = \int_0^{2\pi} \theta(x)\, g(x) \operatorname{sen} kx \, dx = 0$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n),$$

essa interseca lo zero in $2n+2$ *punti dell'intervallo* $(0, 2\pi)$ *se* $g(0) = g(2\pi) \neq 0$, *in* $2n+1$ *punti dello stesso intervallo se* $g(0) = g(2\pi) = 0$.

II. *Se la funzione continua* $g(x) \not\equiv 0$ *è in* (a, b) *e rispetto alla funzione* $\theta(x)$ *ortogonale alle potenze* $x^0, x^1, ..., x^n$, *se cioè verifica le* $n+1$ *equazioni*

$$(2) \qquad \int_a^b \theta(x)\, g(x)\, x^k\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, ..., n),$$

essa interseca lo zero in $n+1$ *punti dell'intervallo* (a, b).

Le dimostrazioni dei due teoremi sono analoghe; esporrò quella del primo, che è meno semplice. Cominciamo dal ricordare che se $x_1, x_2, ..., x_{2\nu}$ sono 2ν arbitrarii punti dell'intervallo $(0, 2\pi)$, la funzione

$$T_\nu(x) = \prod_{1}^{2\nu}{}_i \operatorname{sen} \frac{x - x_i}{2}$$

è una combinazione lineare (a coefficienti costanti) delle funzioni trigonometriche $\cos kx$, $\operatorname{sen} kx$ $(k = 0, 1, ..., \nu)$, è cioè, come si dice, una combinazione trigonometrica d'ordine ν. Se gli stessi punti sono distinti e tutti interni all'intervallo $(0, 2\pi)$, la funzione $T_\nu(x)$ interseca lo zero in questi punti, laddove, posto $x_0 = 0$, $x_{2\nu+1} = 2\pi$, il segno di $T_\nu(x)$ nell'interno dell'intervallo (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, ..., 2\nu)$ è costantemente $(-1)^k$. Infine, dalle (1), se ne deduce

$$(3) \qquad \int_0^{2\pi} \theta(x)\, g(x)\, T_\nu(x)\, dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, ..., n),$$

quando si ponga $T_0(x) \equiv 1$, e comunque si prendano in $(0, 2\pi)$ i punti $x_1, x_2, ..., x_{2\nu}$.

Distingueremo due casi, secondochè è $g(0) = g(2\pi) \neq 0$, oppure $g(0) = g(2\pi) = 0$.

1° Caso: $g(0) = g(2\pi) \neq 0$. Potremo supporre $g(0) = g(2\pi) > 0$. Dalle (1) per $k = 0$ o dalle (3) per $\nu = 0$, se ne deduce che la $g(x)$ deve intersecare lo zero in almeno un punto ξ di $(0, 2\pi)$. In uno almeno degli intervalli $(0, \xi)$ o $(\xi, 2\pi)$ la funzione $g(x)$ prenderà pertanto valori negativi e poichè $g(0) = g(2\pi) > 0$, deve esistere, in $(0, \xi)$ o in $(\xi, 2\pi)$, almeno un ulteriore punto di intersezione di $g(x)$ con lo zero. Siano

x_1 e x_2 $(x_1 < x_2)$ i due punti di $(0, 2\pi)$, dei quali abbiamo accertato l'esistenza, in cui la $g(x)$ interseca lo zero, e consideriamo la combinazione trigonometrica

$$T_1(x) = \operatorname{sen} \frac{x - x_1}{2} \operatorname{sen} \frac{x - x_2}{2}$$

relativa a questi due punti. Se la $g(x)$ non intersecasse lo zero in altri punti all'infuori di x_1 e di x_2, si avrebbe $g(x)\, T_1(x) \geqq 0$ in $(0, 2\pi)$ e quindi, dalla (3) per $\nu = 1$, $g(x) \equiv 0$ in $(0, 2\pi)$. Esisterà quindi in almeno uno degli intervalli $(0, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, 2\pi)$, un ulteriore punto ξ di intersezione di $g(x)$ con lo zero. Sia, per esempio, ξ interno all'intervallo $(0, x_1)$, la $g(x)$ prenderà in $(0, \xi)$ anche valori di segno ϵ, in (ξ, x_1) anche valori di segno $-\epsilon$, in (x_1, x_2) anche valori di segno ϵ, ed infine in $(x_2, 2\pi)$ anche valori di segno $-\epsilon$; pertanto, poichè $g(0) = g(2\pi) > 0$, se $\epsilon = +1$ esisterà in $(x_2, 2\pi)$ un quarto punto di intersezione di $g(x)$ con lo zero, se $\epsilon = -1$ un tale punto esisterà in $(0, \xi)$. Siano x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ i quattro punti, dei quali abbiamo accertato l'esistenza, in cui la $g(x)$ interseca lo zero, e consideriamo la combinazione trigonometrica $T_2(x)$ relativa a questi quattro punti. Se la $g(x)$ non intersecasse lo zero in altri punti all'infuori di x_1, x_2, x_3, x_4, si avrebbe $g(x)\, T_2(x) \geqq 0$ in $(0, 2\pi)$ e quindi, dalla (3) per $\nu = 2$, $g(x) \equiv 0$ in $(0, 2\pi)$. Ecc.

2° Caso: $g(0) = g(2\pi) = 0$. Dalla (1) per $k = 0$ si deduce che la $g(x)$ deve intersecare lo zero in almeno un punto ξ di $(0, 2\pi)$. Se ciò avvenisse nel solo punto ξ, considerando la combinazione trigonometrica $T_1(x)$ relativa ai punti 0 e ξ, se ne dedurrebbe che $g(x)\, T_1(x)$ ha in $(0, 2\pi)$ sempre un segno determinato, quando non è nulla, e quindi, dalla (3) per $\nu = 1$, $g(x) \equiv 0$. Esistono pertanto in $(0, 2\pi)$ due punti x_1 e x_2 $(x_1 < x_2)$ di intersezione di $g(x)$ con lo zero. Se esistessero soltanto questi due punti, considerando la combinazione trigonometrica $T_1(x)$ ad essi relativa, se ne dedurrebbe che $g(x)\, T_1(x)$ ha in $(0, 2\pi)$ sempre un segno determinato, quando non è nulla, e quindi, dalla (3) per $\nu = 1$, di nuovo $g(x) \equiv 0$. Esiste pertanto in $(0, 2\pi)$ un terzo punto ξ di intersezione con lo zero. Se $g(x)$ intersecasse lo zero solamente nei punti x_1, x_2, ξ, considerando la combinazione trigonometrica $T_2(x)$ relativa ai

punti $0, x_1, x_2, \xi$, se ne dedurrebbe che $g(x) T_2(x)$ ha in $(0, 2\pi)$ sempre un segno determinato, quando non è nulla, e quindi, dalla (3) per $\nu = 2$, $g(x) \equiv 0$. Ecc.

2. — Dai teoremi I° e II° si deducono facilmente notevoli conseguenze. Si sa che si possono scegliere le costanti $a_h^{(k)}$ in maniera che, essendo sempre $a_k^{(k)} \neq 0$, le combinazioni trigonometriche

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & T_0 = a_0^{(0)}, \\ & T_1 = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} \operatorname{sen} x, \\ & T_2 = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} \operatorname{sen} x + a_2^{(2)} \cos x, \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & T_{2n-1} = a_0^{(2n-1)} + a_1^{(2n-1)} \operatorname{sen} x + a_2^{(2n-1)} \cos x + \dots \\ & \qquad\qquad \dots + a_{2n-1}^{(2n-1)} \operatorname{sen} nx, \\ & T_{2n} = a_0^{(2n)} + a_1^{(2n)} \operatorname{sen} x + a_2^{(2n)} \cos x + \dots \\ & \qquad\qquad \dots + a^{2n}_{(2n-1)} \operatorname{sen} nx + a_{2n}^{(2n)} \cos nx, \\ & \dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

siano a due a due fra di loro ortogonali nell'intervallo $(0, 2\pi)$, rispetto alla funzione $\theta(x)$. Detti *equivalenti* due numeri, reali o complessi, la cui differenza sia multipla di 2π, si sa pure che una combinazione trigonometrica d'ordine n non può possedere più di $2n$ radici non equivalenti. Ebbene, ciò posto, dal teor. I segue l'altro:

III. *Se le combinazioni trigonometriche* (4) *sono a due a due fra di loro ortogonali nell'intervallo* $(0, 2\pi)$ *e rispetto alla funzione* $\theta(x)$, *le due combinazioni trigonometriche* T_{2n-1} *e* T_{2n} *d'ordine* n *hanno precisamente* 2n *radici reali, distinte e non equivalenti.*

Ed invero, poichè $a_k^{(k)} \neq 0$ e

$$\int_0^{2\pi} \theta\, T_{2n-1}\, T_k\, dx = \int_0^{2\pi} \theta\, T_{2n}\, T_k\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, 2n-2),$$

se ne deduce che tanto T_{2n-1} quanto T_{2n} sono, in $(0, 2\pi)$ e rispetto alla $\theta(x)$, ortogonali alle funzioni trigonometriche $\cos kx$, $\operatorname{sen} kx$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$. E quindi (teor. I), per esempio, secondochè $T_{2n-1}(0) \neq 0$ oppure $= 0$, la combinazione T_{2n-1} interseca lo zero in $2n$ oppure in $2n-1$ punti dell'intervallo $(0, 2\pi)$.

In modo analogo, dal teor. II si deduce il seguente:

IV. *Se i polinomii* $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., *sono a due a due fra di loro ortogonali nell'intervallo* (a, b) *e rispetto alla funzione* $\theta(x)$, *essendo* P_n *effettivamente di grado* n (1) ($n = 0, 1, \ldots$), *ogni polinomio* P_n *ha precisamente* n *radici reali e distinte nell'intervallo* (a, b) (2).

Sia ora $f(x)$ la più arbitraria funzione continua e periodica, di periodo 2π, e consideriamo la *serie di* Fourier della $f(x)$ relativa alle combinazioni trigonometriche (4). Poniamo cioè

$$(5)\quad f(x) \sim c_0 T_0 + (c_1 T_1 + c_2 T_2) + \ldots + (c_{2n-1} T_{2n-1} + c_{2n} T_{2n}) + \ldots$$

$$(6)\qquad c_k = \int_0^{2\pi} \theta f T_k \, dx : \int_0^{2\pi} \theta T_k^2 \, dx, \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Porremo poi

$$U_0 = c_0 T_0, \qquad U_1 = c_1 T_1 + c_2 T_2, \ldots,$$
$$U_n = c_{2n-1} T_{2n-1} + c_{2n} T_{2n}, \ldots$$

e diremo $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ i termini della serie di Fourier considerata. Indicheremo con S_n la somma dei primi n termini della serie (5). In virtù della (6) si ha

$$\int_0^{2\pi} \theta(x) [f(x) - S_n(x)] T_k(x) \, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 2),$$

si ha cioè che la differenza $g(x) = f(x) - S_n(x)$ è in $(0, 2\pi)$ e rispetto alla $\theta(x)$ ortogonale alle funzioni trigonometriche $\cos kx$, $\operatorname{sen} kx$ ($k = 0, 1, \ldots, n - 1$) e pertanto il notevole risultato:

V. *Se la funzione* $f(x)$, *continua, periodica e di periodo* 2π, *non è una combinazione trigonometrica, la somma* $S_n(x)$ *dei primi* n *termini della sua serie di* Fourier *relativa alle combinazioni trigonometriche* (4), *interseca la* $f(x)$ *in* $2n$ *punti di* $(0, 2\pi)$ *se* $f(0) \neq S_n(0)$, *in* $2n - 1$ *punti di* $(0, 2\pi)$ *se* $f(0) = S_n(0)$.

---

(1) Con "effettivamente di grado n" intendiamo dire che il coefficiente della massima potenza x^n è in P_n diverso da zero.

(2) Questo teorema è notissimo. Cfr., per esempio, Jordan, *Cours d'Analyse* [2me édition, Paris, Gauthier-Villars, 1894], vol. II, n° 249.

In modo perfettamente analogo si ottiene il teorema:

VI. *I polinomii* $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$, *siano a due a due fra di loro ortogonali nell'intervallo* (a, b) *e rispetto alla funzione* $\theta(x)$, *essendo* P_n *effettivamente di grado* n $(n = 0, 1, \ldots)$. *Se la funzione continua* f (x) *non è un polinomio, la somma* S_n *dei primi* n *termini della serie di* FOURIER

$$(7) \qquad f(x) \sim c_0 P_0 + c_1 P_1 + \ldots + c_n P_n + \ldots,$$

$$(8) \qquad c_k = \int_0^{2\pi} \theta f P_k \, dx : \int_0^{2\pi} \theta \, P_k^2 \, dx , \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

della f (x) *relativa ai polinomii* $P_0, P_1, \ldots$, *interseca la funzione* f (x) *in* n *punti di* (a, b).

3. — Sia $f(x)$ la più arbitraria funzione reale della variabile reale x definita nell'intervallo (a, b), nel quale sono pure definite le funzioni

$$(9) \qquad f_0(x) \, , \, f_1(x) \, , \, \ldots, \, f_n(x) \, , \, \ldots$$

pur esse reali. Il problema (che ho preso a chiamare) dell'*approssimazione lineare* si pone al modo seguente: Determinare le costanti reali

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)}, \\ a_0^{(1)}, \; a_1^{(1)}, \\ a_0^{(2)}, \; a_1^{(2)}, \; a_2^{(2)}, \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_0^{(n)}, \; a_1^{(n)}, \; a_2^{(n)}, \; \ldots, \; a_n^{(n)}, \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \end{array}$$

in maniera che la combinazione lineare

$$F_n(x) = a_0^{(n)} f_0(x) + a_1^{(n)} f_1(x) + \ldots + a_n^{(n)} f_n(x) ,$$

al divergere di n, *approssimi* in (a, b) la funzione $f(x)$. Dico *puntuale* l'approssimazione se, in (a, b) $\lim | f(x) - F_n(x) | (n \to \infty) = 0$, la dico *globale*, rispetto alla *funzione peso* $\theta(x)$, se, supposte $f, f_0, f_1, \ldots$ misurabili e limitate in (a, b), si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \theta(x) \, [f(x) - F_n(x)]^2 \, dx = 0.$$

Chiamo *errore puntuale* la quantità $|f(x) - F_n(x)|$, *massimo errore puntuale* l'estremo superiore ρ_n in (a, b) di $|f(x) - F_n(x)|$. Dico *uniforme* l'approssimazione puntuale se $|f(x) - F_n(x)|$, al divergere di n, tende in (a, b) uniformemente a zero. Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'approssimazione puntuale sia uniforme è che il massimo errore puntuale ρ_n tenda a zero al divergere di n. Per ogni fissato valore di n, dico che $F_n(x)$ è la combinazione di *migliore approssimazione puntuale* se, fra tutte le possibili combinazioni delle $f_0, f_1, \ldots, f_n$, essa realizza il minimo valore per il massimo errore puntuale.

Supponendo misurabili e limitate in (a, b) le funzioni $f, f_0, f_1, \ldots$, chiamo *errore globale*, rispetto alla funzione peso $\theta(x)$, la quantità

$$\int_0^{2\pi} \theta(x) [f(x) - F_n(x)]^2 \, dx.$$

Per ogni fissato valore di n, dico che $F_n(x)$ è la combinazione di *migliore approssimazione globale*, rispetto alla funzione peso $\theta(x)$, se essa combinazione realizza il minimo valore per l'errore globale rispetto allo stesso peso.

Ponendo, in particolare, $f_n(x) \equiv x^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, si hanno le approssimazioni per polinomii o per *combinazioni intiere*. Ponendo $f_0 \equiv 1$, $f_{2n-1} \equiv \operatorname{sen} nx$, $f_{2n}(x) \equiv \cos nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ si hanno le approssimazioni per *combinazioni trigonometriche*.

Vogliamo ora porre i teoremi del n° 2 in relazione con taluni risultati, ormai classici, relativi all'approssimazione puntuale per combinazioni intiere o trigonometriche delle funzioni continue, che si trovano riuniti nei capitoli VI e VII del recente brillante libro del DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* [1]. Ci limiteremo a considerare le approssimazioni per combinazioni intiere, circostanze perfettamente analoghe verificandosi nei riguardi delle approssimazioni per combinazioni trigonometriche. Escluderemo perciò sempre, naturalmente, che la funzione $f(x)$ da approssimare sia essa stessa un polinomio.

Indicheremo con $\Pi_n(x)$ il polinomio di grado n (di TCHEBYCHEFF) di migliore approssimazione puntuale in (a, b) fra i

---

[1] Paris, 1919, Gauthier-Villars, Collezione Borel.

polinomii del detto grado (¹) per la funzione continua $f(x)$ e con τ_n il massimo errore puntuale relativo a Π_n. Ebbene si ha il teorema (Cfr. DE LA VALLÉE-POUSSIN, loc. cit., n° 56): *Il polinomio* $\Pi_n(x)$ *interseca la funzione* $f(x)$ *in* $n+1$ *punti di* (a, b) *detti* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1})$ *questi punti, posto* $x_0 = a$, $x_{n+2} = b$, *la differenza* $f(x) - \Pi_n(x)$ *prende in* (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ *anche il valore* $\epsilon\tau_n(-1)^k$.

Indicheremo con $Q_n(x)$ il polinomio di grado n nel quale consiste la somma dei primi $n+1$ termini della serie (7). Si ha il teorema di assai facile dimostrazione:

VII. *Il polinomio* $Q_n(x)$, *somma dei primi* $n+1$ *termini della serie* (7) *è, fra quelli di grado* n, *il polinomio di migliore approssimazione globale, rispetto alla funzione peso* $\theta(x)$, *per la funzione continua* $f(x)$. *Esso, precisamente come il polinomio* Π_n *di migliore approssimazione puntuale, interseca* (teor. IV) *la funzione* $f(x)$ *in* $n+1$ *punti dell'intervallo* (a, b).

Sono state rilevate le difficoltà che offre la costruzione del polinomio $\Pi_n(x)$ di migliore approssimazione puntuale per una assegnata funzione continua $f(x)$. I coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ del polinomio $Q_n(x)$ di migliore approssimazione globale rispetto al peso $\theta(x)$ si ottengono al contrario immediatamente minimizzando la forma quadratica in quei coefficienti

$$\int_a^b \theta(x)\,[f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_n x^n]^2\, dx,$$

risolvendo cioè un sistema, a determinante positivo, di $n+1$ equazioni lineari nelle $n+1$ incognite $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Ebbene, noi ci poniamo la questione seguente:

È possibile determinare la funzione peso $\theta(x)$ *in guisa che, qualunque sia* n, *riesca* $Q_n \equiv P_n$?

Lasciando per ora da parte tale questione, vogliamo intanto mostrare come il teor. VII, col concorso di uno dovuto a DE LA VALLÉE-POUSSIN, consenta di assegnare ulteriori infiniti numeri positivi che non superano il massimo errore puntuale τ_n relativo al polinomio Π_n di migliore approssimazione puntuale.

(¹) Fra questi polinomii annoveriamo anche quelli per cui taluni dei coefficienti a cominciare da quelli della massima potenza x^n sono nulli.

Secondo l'indicato teorema di DE LA VALLÉE-POUSSIN (loc. cit., n° 57) si ha che:

Se $Q_n(x)$ *è un qualunque polinomio di grado* n *che intersechi la funzione continua* $f(x)$ *negli* $n+1$ *punti* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1})$ *di* (a, b), *posto* $x_0 = a$, $x_{n+2} = b$, *e detto* σ' *il massimo fra i numeri positivi* σ *tali che la differenza* $f(x) - Q_n(x)$ *prenda in* (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$ *anche il valore* $\epsilon\sigma(-1)^k$, *riesce* $\sigma' \leqq \tau_n$.

Se ne deduce, evidentemente, in virtù del teor. VII, il seguente:

VIII. *Sia* $Q_n(x)$ *il polinomio di grado* n *di migliore approssimazione globale della funzione continua* $f(x)$, *rispetto alla funzione peso* $\theta(x)$ *e siano* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1})$ *punti di* (a, b) *di intersezione di* $Q_n(x)$ *con* $f(x)$, *diciamo* $\sigma_n[\theta(x)]$ *il massimo fra i numeri positivi* σ *tali che la differenza* $f(x) - Q_n(x)$ *prenda in* (x_k, x_{k+1}) *anche il valore* $\epsilon\sigma(-1)^k$. *Comunque varii* $\theta(x)$ *nella totalità delle funzioni sommabili in* (a, b), *riesce sempre*

$$\sigma_n[\theta(x)] \leqq \tau_n . \tag{10}$$

Giova tenere presente che (cfr. DE LA VALLÉE-POUSSIN, loc. cit., n° 56) se $\sigma_n[\theta(x)]$ coincide col massimo errore puntuale relativo al polinomio $Q_n(x)$, si avrà $Q_n(x) \equiv \Pi_n(x)$ e quindi $\sigma_n[\theta(x)] = \tau_n$.

Altri infiniti numeri positivi che non superano l'errore τ_n si ottengono, ovviamente, al variare di $\theta_n(x)$, tenendo conto soltanto che $Q_n(x)$ minimizza l'errore globale. Qualunque sia il polinomio $P_n(x)$ di grado $\leqq n$, detto ρ_n, il massimo errore puntuale a questo relativo, si ha

$$\int_a^b \theta(x)[f(x) - Q_n(x)]^2 dx \leqq \int_a^b \theta(x)[f(x) - P_n(x)]^2 dx <$$
$$< \rho_n^2 \int_a^b \theta(x)\, dx .$$

Ma è ben presumibile che la limitazione inferiore che, in particolare, così si ottiene per il massimo errore puntuale τ_n relativo al polinomio $\Pi_n(x)$ di migliore approssimazione puntuale, sia assai più larga della (10).

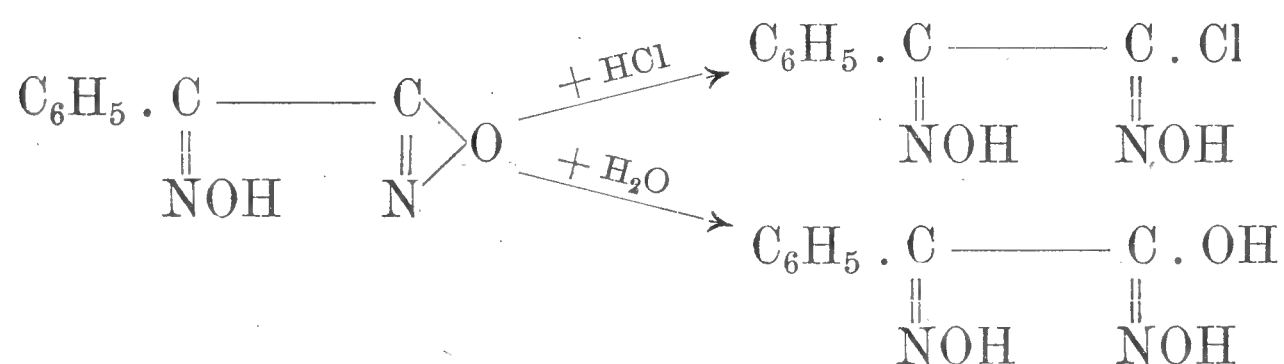
Pisa, 25 giugno 1924.

Sulle idrossigliossime

Nota del Socio nazionale residente GIACOMO PONZIO

La fenilclorogliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . Cl$, da me recentemente preparata [1] e delle cui proprietà non ho ancora ultimato lo studio, offre un notevole interesse per i rapporti che teoricamente la collegano coll'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile e colla fenilidrossigliossima.

Come risulta dallo schema

$$C_6H_5 . \underset{\underset{NOH}{\|}}{C} — \underset{\underset{N}{\|}}{C} \rangle O \begin{array}{l} \xrightarrow{+HCl} C_6H_5 . \underset{\underset{NOH}{\|}}{C} — \underset{\underset{NOH}{\|}}{C} . Cl \\ \xrightarrow{+H_2O} C_6H_5 . \underset{\underset{NOH}{\|}}{C} — \underset{\underset{NOH}{\|}}{C} . OH \end{array}$$

e tenendo presente che nelle reazioni di addizione del nitrilossido si originano sempre quelle che io chiamo *forme* α delle gliossime, l'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile $C_6H_5 . C(:NOH) . \overset{\diagup O \diagdown}{C = N}$ (ovvero $C_6H_5 . C(:NOH) . C \equiv N = O$) dovrebbe essere trasformato dall'acido cloridrico nella α-fenilclorogliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . Cl$ e dall'acqua in α-fenilidrossigliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . C(:NOH) . OH$.

Ora, mentre non è, in alcun modo, possibile addizionare acido cloridrico [2], Wieland e Semper [3] asseriscono che me-

(1) " Gazz. Chim. Ital. ", *53*, 25 e 708 (1923).

(2) Il nitrilossido non si altera nè riscaldato con acido cloridrico concentrato (dal quale cristallizza per raffreddamento), nè assoggettato in soluzione eterea all'azione dell'acido cloridrico gassoso secco.

(3) *Ann.* *358*, 58 (1907).

diante l'idrossido o l'etilato sodico si può addizionare una molecola di acqua, e trasformare in tal modo l'ossido dell'ossima del cianuro di benzoile (da essi erroneamente considerato come fenilfurossano [4]) in una fenilidrossigliossima instabile, della quale hanno però ottenuto il sale sodico ed il sale ramico.

D'altra parte io ho trovato [5] che facendo agire il carbonato sodico sulla soluzione eterea della fenilclorogliossima, invece di aver luogo la sostituzione del cloro coll'ossidrile, si ha eliminazione di due molecole di acido cloridrico da due molecole di gliossima e formazione della diossima del perossido della dibenzoilgliossima $2\,C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).Cl \xrightarrow{-2HCl} C_6H_5.C(:NOH).(C_2N_2O_2).C(:NOH).C_6H_5$, reazione da me interpretata ammettendo che, come prodotto intermedio, risulti la fenilidrossigliossima dei suddetti Autori.

Occorrendomi arrivare, per le ragioni esposte nella Nota XII [6], al fenilidrossifurazano $C_6H_5.(C_2N_2O)OH$, ho perciò creduto opportuno di assicurarmi se, variando le condizioni di esperienza, non fosse stato possibile ottenere la forma della fenilidrossigliossima, della quale il fenilidrossifurazano è il prodotto di anidrizzazione. Sono in tal modo giunto a stabilire un nuovo metodo di preparazione delle idrossigliossime, metodo che qui riferisco, premettendo quanto segue, onde chiarire la trattazione dell'argomento, il quale costituisce soltanto un capitolo delle ricerche che ho in corso sulla fenilclorogliossima e sui rapporti che collegano quest'ultima coll'ossido del nitrile dell'ossima del cianuro di benzoile e colla fenil-fenilidrazinogliossima $C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).NH.NH.C_6H_5$.

È noto che molte gliossime esistono in due *forme*, e che, secondo Tschugaeff [7], quelle forme che egli, adottando la teoria di Hantzsch e Werner, chiamava *sin* e che io distinguo col prefisso β, dànno origine coi sali di nichel a caratteristici *sali complessi* di colore giallo, aranciato, rosso o rosso-bruno, i

---

[4] Vⁱ Note XI e XII: " Gazz. Chim. Ital. ", *53*, 379 e 507 (1923).
[5] Nota XIV, " Gazz. Chim. Ital. ", *53*, 708 (1923).
[6] " Gazz. Chim. Ital. ", *53*, 507 (1923).
[7] " Zeit. anorg. ", *46*, 144 (1905); *Ber.* *41*, 1678 (1908); " Chem. Soc. ", *105*, 2187 (1914).

quali, come più tardi io ho dimostrato ([8]), risultano anche direttamente dal metallo per azione delle stesse gliossime in soluzione acquosa, e derivano da due molecole di gliossima per sostituzione di due atomi di idrogeno ossimico, uno per ciascuna molecola, con un atomo di nichel bivalente.

Gli acidi idrossamici esistono invece in una *forma* sola, alla quale si possono attribuire l'una o l'altra delle due strutture $R.C\langle^{OH}_{NOH}$ ed $R.C\langle^{O}_{NH.OH}$, ed hanno la proprietà di dare coi sali ramici dei *precipitati* verdi di costituzione non ben stabilita; proprietà che tuttavia non è caratteristica di tali acidi, essendo, fra l'altro, comune ad alcune diossime: p. es. alla α-metilbenzoilgliossima ([9]) $CH_3.C(:NOH).C(:NOH).CO.C_6H_5$, alla fenilclorogliossima ([10]) $C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).Cl$, alle diossime dei perossidi delle diacilgliossime ([11]) $R.C(:NOH).(C_2N_2O_2).C(:NOH).R$; ed a molte ossime: p. es. alla benzoinossima ([12]) $C_6H_5.CH(OH).C(:NOH).C_6H_5$, all'isonitrosoacetilacetone ([13]) $CH_3.CO.C(:NOH).CO.CH_3$, ecc.

Attualmente non dovrebbe, dunque, più essere possibile confondere le gliossime cogli acidi idrossamici; ma non è da meravigliare se Whiteley ([14]) avendo ottenuto, prima della comparsa dei classici lavori di Tschugaeff, il composto $CH_3.C(:NOH).C(:NOH).OH$, lo abbia considerato come *acido ossiminoacetilformidrossamico*, e che Wieland e Semper (loc. cit.) abbiano chiamato *acido ossiminobenzoilformidrossamico* il composto $C_6H_5.C(:NOH).C(:NOH).OH$. Occorre tuttavia osservare come in una Nota successiva la stessa Whiteley ([15]) riconobbe che il suo composto era una diossima e ne cambiò il nome in quello di *metilidrossigliossima*, per ragioni in perfetto accordo coi risultati dalle mie esperienze sul suo comportamento verso il nichel e verso i sali di questo metallo.

([8]) " Gazz. Chim. Ital. ", *51*, II, 213 (1921).
([9]) " Gazz. Chim. Ital. ", *52*, II, 151 (1922).
([10]) Mie esperienze inedite.
([11]) Idem.
([12]) Feigl, *Ber. 56*, 2083 (1923).
([13]) " Gazz. Chim. Ital. ", *52*, I, 288 (1922).
([14]) " Chem. Soc. ", *77*, 1046 (1900).
([15]) " Chem. Soc. ", *83*, 24 (1903).

Preparazione delle idrossigliossime.

Per preparare nel modo più semplice e con rendimento quasi teorico la metilidrossi- e la fenilidrossigliossima $CH_3 . C . (: NOH) . C (: NOH) . OH$ e $C_6H_5 . C (: NOH) . C (: NOH) . OH$ basta far agire sulla metilcloro- e sulla fenilclorogliossima $CH_3 . C (: NOH) . C (: NOH) . Cl$ e $C_6H_5 . C (: NOH) . C (: NOH) . Cl$ l'acetato sodico in presenza di acido acetico diluito, e, precisamente, una soluzione al 40 % di acetato sodico cristallizzato in acido acetico al 50 % [16].

Il reattivo che io propongo (e che si può anche ottenere sciogliendo gr. 6,3 di idrossido di sodio [17] in 100 cc. di acido acetico al 50 %) offre il vantaggio di permettere la sostituzione *diretta* del cloro coll'ossidrile in tutti i composti contenenti uno o più gruppi $-C\begin{matrix}\diagup Cl \\ \diagdown NOH\end{matrix}$ [18]. Con esso si possono per conseguenza preparare non soltanto le idrossi- e le diidrossigliossime dalle monocloro- e dalle diclorogliossime, ma anche gli acidi idrossamici $R.C(:NOH).OH$ dalle cloroaldossime $R.C(:NOH).Cl$ e gli acidi acilformidrossamici $R.CO.C(:NOH).OH$ dai cloroisonitrosochetoni $R.CO.C(:NOH).Cl$.

Il miglior modo di operare è il seguente. In 50 cc. di reattivo si introducono gr. 5 del cloroderivato [19] in polvere: se

---

[16] Come l'acetato sodico in presenza di acido acetico agisce, evidentemente, qualsiasi sale di una base forte con un acido debole in presenza di quest'ultimo che ne impedisce praticamente l'idrolisi; e, p. es., la soluzione di bisolfito sodico satura di anidride solforosa. Ma, a parte gl'inconvenienti che offre l'impiego e la preparazione di quest'ultimo reattivo, esso dà sempre un rendimento molto scarso e non è di applicazione generale.

[17] Ovvero gr. 8,8 di idrossido di potassio, poichè l'acetato potassico agisce in modo analogo a quello sodico.

[18] La sostituzione *indiretta* del cloro coll'ossidrile è già nota, e si eseguisce mediante l'acetato sodico o potassico anidri o l'acetato di argento, in presenza di acido acetico glaciale; però sempre col riscaldamento, il quale, nei casi di cui mi occupo, è da evitare. Si ottengono così dapprima gli acetilderivati degli idrossicomposti che si devono poi assoggettare all'idrolisi.

[19] Naturalmente si possono impiegare anche i bromoderivati, qualora questi siano più facilmente accessibili dei cloroderivati corrispondenti.

questo è solubile, la reazione avviene di per sè alla temperatura ordinaria; se è poco solubile od insolubile, si aggiungono anche 25-50 cc. di alcool e si agita, riscaldando, ove occorra, a 30°-40° per qualche tempo. Quando la sostituzione del cloro coll'ossidrile è completa, se si tratta di una idrossigliossima, si neutralizza con idrossido di sodio e si addiziona acetato di nichel; se si tratta di un acido idrossamico, conviene invece diluire con acqua ed addizionare acetato ramico. Nel primo caso si separa in quantità quasi teorica il sale complesso di nichel della gliossima; nel secondo, il composto ramico dell'acido idrossamico. I precipitati raccolti e lavati si decompongono in ultimo con acido cloridrico o solforico diluiti.

Col suddetto procedimento ho perfino potuto ottenere dal cloroisonitrosoacetone $CH_3 . CO . C (: NOH) . Cl$ l'*acido acetilformidrossamico* $CH_3 . CO . C (NOH) . OH$ non ancora conosciuto e non preparabile in nessun altro modo. Questo composto, il quale si può anche chiamare *acido piruvidrossamico* [20], offre un notevole interesse, sia perchè è il primo termine della serie degli acidi acilidrossamici $R . CO . C (: NOH) . OH$, sia perchè la letteratura dei suoi derivati (ottenuti finora soltanto indirettamente con metodi empirici) è, come quella della metilidrossi- e della fenilidrossigliossima, per la maggior parte errata [21], e richiede una completa revisione, il che farò in una prossima Nota.

Torino. - Istituto Chimico della R. Università.
Giugno 1924.

---

[20] non però *acido piruvilidrossamico,* perchè esso non contiene il piruvile $CH_3 . CO . CO —$, e, d'altra parte, si dice acido acetidrossamico $CH_3 . C (: NOH) . OH$ e non *acetilidrossamico.*

[21] P. es , il fenidrazone dell'acido piruvidrossamico fu scambiato coll'acido 2-fenil-1,3-osotriazolcarbonico, dal quale si credette di ottenere l'acido fenildrazinoacetico.

Sui perossidi delle diossime dei diacilperossidi

Nota del Socio naz. resid. Prof. GIACOMO PONZIO
e del Dott. VITTORIO BERNARDI

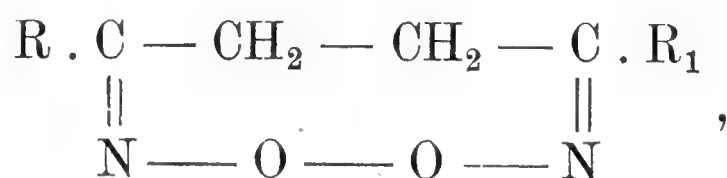
Escludendo dalla categoria dei cosidetti *perossidi delle diossime* i prodotti di deidrogenazione delle gliossime R . C (: NOH) . C (: NOH) . H (diossime di α-chetoaldeidi), i quali, come abbiamo dimostrato in precedenti Note [1], sono ossidi di nitrili di α-ossiminoacidi R . C (: NOH) . CNO, riteniamo che, indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla costituzione dei prodotti di deidrogenazione delle altre diossime, sia conveniente conservare per questi ultimi l'antica denominazione.

Ciò premesso, si comprende come si debba prevedere l'esistenza di varie classi di *perossidi*, a seconda che essi derivano dalle diossime di α-, di β-, o di γ-dichetoni, cioè dalle 1,2-diossime $R.C(:NOH).C(:NOH).R_1$, dalle 1,3-diossime $R.C(:NOH).CH_2.C(:NOH).R_1$ o dalle 1,4-diossime $R.C(:NOH).CH_2.CH_2.C(:NOH).R_1$.

Attribuendo infine, *per semplicità*, a tali *perossidi* le formole di struttura

$$\begin{array}{lcr} R.C & \text{———} & C.R_1 \\ \| & & \| \\ N & -O-O- & N \end{array}, \qquad \begin{array}{lcr} R.C & -CH_2- & C.R_1 \\ \| & & \| \\ N & -O-O- & N \end{array},$$

$$\begin{array}{lcr} R.C & -CH_2-CH_2- & C.R_1 \\ \| & & \| \\ N & -O-O- & N \end{array},$$

---

[1] " Gazz. Chim. Ital. „, *53*, 379, 507, 822 (1923).

e senza escludere, p. es., che l'aggruppamento — N_2O_2 — possa essere $-N\langle{}^{O}_{O}\rangle N-$, soggiungeremo che dei primi (i ben noti *perossidi di gliossime*) se ne conoscono molti; dei secondi si conosce soltanto il derivato

$$\begin{array}{ccccc} C_2H_5CO_2\,.\,C & — & CO & — & C\,.\,CO_2C_2H_5 \\ \| & & & & \| \\ N & —\;O\;— & & O\;— & N \end{array}$$

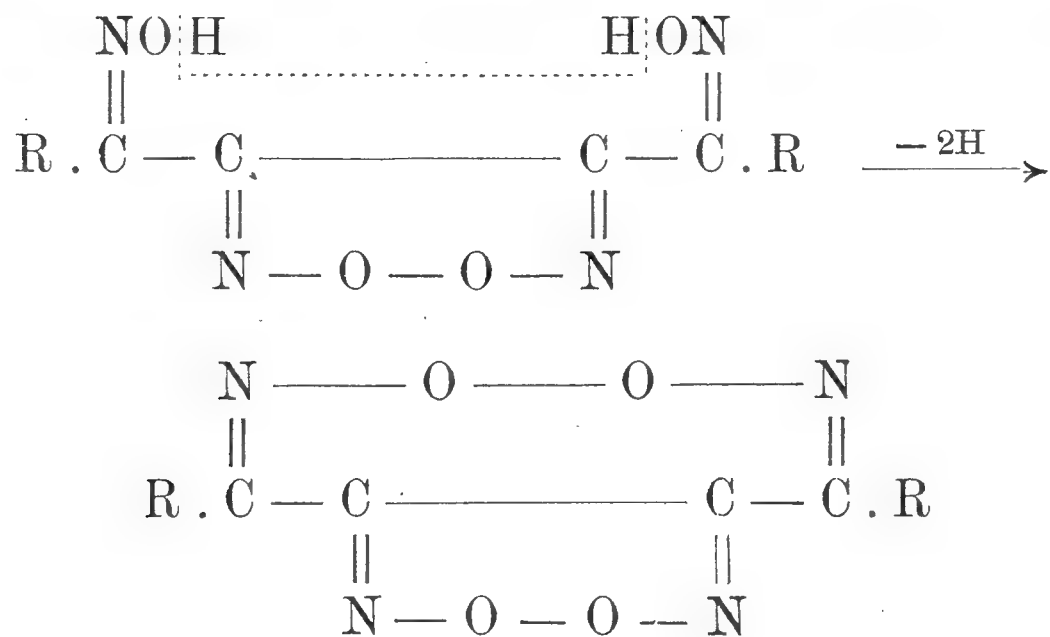
ottenuto da Henry e Pechmann ([2]) per azione dell'acido nitrico sull'estere dietilico dell'acido diossiminoacetondicarbonico $C_2H_5CO_2$. C (: NOH) . CO . C (: NOH) . $CO_2C_2H_5$, mentre degli ultimi nulla finora è noto.

Poichè ci pareva logico che al ciclo ottoatomico

$$\begin{array}{cccc} C — & C — & C — & C \\ | & & & | \\ N — & O — & O — & N \end{array}$$

si dovesse arrivare deidrogenando le diossime dei perossidi delle diacilgliossime R . C (: NOH) . $(C_2N_2O_2)$. C (: NOH) . R da noi descritte nella Nota XIV ([3]), abbiamo voluto provare se la reazione

$$\begin{array}{cccccc} NO\vdots H & & & & H\vdots ON & \\ \| & & & & \| & \\ R\,.\,C — & C & ——— & C & — C\,.\,R & \xrightarrow{-2H} \\ & \| & & \| & & \\ & N — O & — & O — N & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & N & —— O —— O —— & N & \\ & \| & & \| & \\ R\,.\,C — & C & ——— & C & — C\,.\,R \\ & \| & & \| & \\ & N — O & — & O — N & \end{array}$$

fosse praticamente effettuabile. E ricorrendo, come al solito, al tetrossido di azoto (ma anche all'acido nitrico ed al permanganato potassico) siamo riusciti ad ottenere senza difficoltà i primi due termini di una nuova serie di interessanti composti biciclici, cioè i *diperossidi delle 1,2,3,4-tetraossime* che più avanti descriviamo.

In questa occasione ritenemmo anche opportuno di assicurarci se la reazione che ci aveva servito a preparare dalle clo-

---

([2]) *Ber. 26*, 1001 (1897).
([3]) " Gazz. Chim. Ital. ", *53*, 708 (1923).

rogliossime le diossime dei perossidi delle diacilgliossime (loc. cit.) $2R . C (: NOH) . C (: NOH) . Cl \xrightarrow{-2HCl} R . C (: NOH) . (C_2N_2O_2) . C (: NOH) . R$ si potesse applicare alla preparazione di altri derivati dei perossidi $R . CO . (C_2N_2O_2) . CO . R$. Ed effettivamente, facendo agire il carbonato sodico sulla soluzione eterea del fenilidrazone del cloroisonitrosoacetone abbiamo ottenuto l'osazone del perossido della diacetilgliossima $2CH_3 . C (: N . NHC_6H_5) . C (: NOH) . Cl \xrightarrow{-2HCl} CH_3 . C (: N . NHC_6H_5) . (C_2N_2O_2) . C (: N . NHC_6H_5) . CH_3$ già conosciuto, ma del quale mancava qualsiasi prova che ne dimostrasse la struttura.

Diossima del perossido della diacetilgliossima $CH_3 . C (: NOH) . (C_2N_2O_2) . C (: NOH) . CH_3$. Per stabilire se questo composto, da noi ottenuto [4] trattando con carbonato sodico la clorometilgliossima $CH_3 . C (: NOH) . C (: NOH) . Cl$, fosse identico o no col composto $C_6H_8O_4N_4$ isolato da Behrend e Tryller [5] fra i prodotti dell'azione del cloridrato di idrossilamina sull'*olio* che risulta nella reazione fra l'acetone e l'acido nitrico, e che fu successivamente studiato da Steffens [6], il quale lo chiamò *composto di Tryller* lasciandone indeterminata la costituzione, abbiamo fatte nuove esperienze senza tuttavia giungere ad una conclusione, a meno di ammettere che in alcuni punti i lavori dei suddetti chimici siano completamente errati.

Il *composto di Tryller* fonde a 140° e dà un dibenzoilderivato fusibile a 155°, la nostra diossima fonde a 145° e dà un dibenzoilderivato fusibile a 160°; ambedue possono formare un cloridrato insolubile nell'etere e facilmente idrolizzabile; ma secondo Steffens (loc. cit.) il *composto di Tryller* scaldato con idrossido di sodio al 5 $^0/_0$ si trasforma in un'anidride $C_6H_6O_5N_4$, trattato con permanganato potassico si decompone in acido acetico ed in acido nitrico, e, secondo Behrend e Tryller (loc. cit.), per azione dell'acido nitrico fornisce un composto $C_6H_6O_5N_4$. La diossima del perossido della diacetilgliossima invece non forma anidride, e per azione dell'acido nitrico e del permanganato viene deidrogenata nel perossido, di cui diremo fra poco:

---

(4) " Gazz. Chim. Ital. ", *53*, 709 (1923).
(5) *Ann. 283*, 231 (1894).
(6) *Ann. 309*, 246 (1899).

non ci pare quindi logico che al *composto di Tryller* si continui ad attribuire (come è fatto nel " Beilstein „ ed in alcuni trattati di chimica organica) la formola $CH_3 . C (: NOH) . (C_2N_2O_2) . C (: NOH) . CH_3$, la quale indubbiamente ed esclusivamente spetta al nostro composto.

Osazone del perossido della diacetilgliossima $CH_3 . C (: N . NHC_6H_5) . (C_2N_2O_2) . C (: N . NHC_6H_5) . CH_3$. Risulta per azione del carbonato sodico sul *fenilidrazone del cloroisonitrosoacetone* $CH_3 . C (: N . NHC_6H_5) . C (: NOH) . Cl$ il quale fu già da uno di noi descritto in una vecchia Nota [7] e preparato, allora, per trattamento con fenilidrazina del cloroisonitrosoacetone $CH_3 . CO . C (: NOH) . Cl$ in soluzione alcoolica. Soggiungiamo ora che esso si ottiene molto più facilmente e con migliore rendimento (cioè senza che, come prodotto secondario, si origini cloridrato di fenilidrazina) aggiungendo a freddo al cloroisonitrosoacetone sciolto nell'acido acetico glaciale la quantità teorica di fenilidrazina e diluendo con acqua dopo qualche ora. Cristallizzato dal benzene si presenta in prismetti di leggero colore giallo bruno, fusibili a 127° con viva decomposizione, cioè ad una temperatura un po' più elevata di quella (123°) data precedentemente.

Trovato $^0/_0$:	Cl 17,05	16.90.
Per $C_9H_{10}ON_3Cl$ calc.:	16,79.	

Per trasformarlo nell'*osazone del perossido della diacetilgliossima* $CH_3 . C (: N . NHC_6H_5) . (C_2N_2O_2) . C (: N . NHC_6H_5) . CH_3$ lo si scioglie in etere, lo si agita con una soluzione acquosa al 5 $^0/_0$ di carbonato sodico, e, dopo aver lavato l'etere con acqua, si elimina il solvente e si cristallizza il residuo dall'alcool. Si presenta in prismi ben definiti, giallo-bruni, fusibili a 176° senza decomposizione.

Trovato $^0/_0$:	C 61,82	H 5,20	N 23,65.
Per $C_{18}H_{18}O_2N_6$ calc.:	61,71	5,14	24,00.

Questo osazone era già stato ottenuto da Sloan Mills [8] trattando con fenilidrazina l'*olio,* il quale risulta decomponendo

---

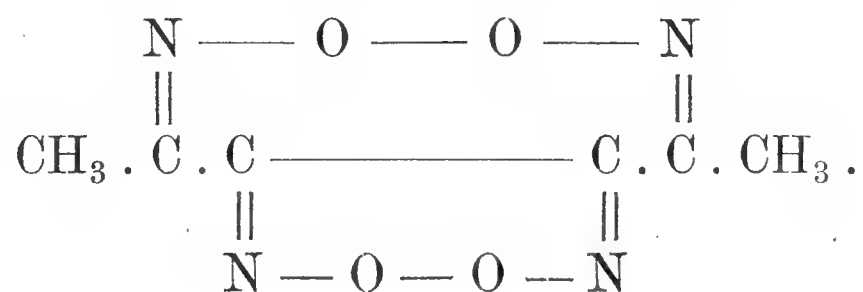
(7) " Gazz. Chim. Ital. „, *37,* II, 70 (1907).
(8) " Chem. News „, *88,* 228 (1903).

col calore il prodotto dell'azione del tetrossido d'azoto sull'isonitrosoacetone, e che, secondo detto Autore, contiene il perossido della diacetilgliossima $CH_3 . CO . (C_2N_2O_2) . CO . CH_3$: la preparazione col nostro metodo ne dimostra la struttura.

Poichè Sloan Mills (loc. cit.) non lo descrive, soggiungeremo che l'osazone del perossido della diacetilgliossima è poco solubile a caldo e meno a freddo nell'alcool; poco solubile anche a caldo in etere, cloroformio, benzene; solubile a freddo in acetone; insolubile in ligroina bollente e nell'idrossido di sodio.

Diperossidi di tetraossime.

Perossido della diossima del perossido della diacetilgliossima

$$\begin{array}{ccccccc} & N & - O - & - O - & N & & \\ & \| & & & \| & & \\ CH_3 . C . & C & \multicolumn{2}{c}{\text{———}} & C & . C . CH_3 . \\ & \| & & & \| & & \\ & N & - O - & - O - & N & & \end{array}$$

Si forma: *a)* trattando con tetrossido di azoto la soluzione eterea della diossima del perossido della diacetilgliossima $CH_3 . C (: NOH) . (C_2N_2O_2) . C (: NOH) . CH_3$, per il che si separa senz'altro cristallizzato; *b)* introducendo la diossima in una miscela di volumi eguali di acido nitrico $d = 1,40$ e di acqua, per il che ha luogo spontaneamente una moderata reazione e, mentre si svolgono composti nitrosi, il perossido si separa come polvere gialla. Questa dev'essere raccolta dopo 12 ore, altrimenti il rendimento (che è del 75 $^0/_0$ circa) diminuisce in seguito alla ulteriore azione dell'acido nitrico sul perossido stesso; *c)* aggiungendo poco a poco alla soluzione acquosa diluita della diossima una soluzione al 3 $^0/_0$ di permanganato potassico, per il che il perossido si separa dal liquido non appena questo si decolora [9].

---

[9] Sarebbe stato interessante vedere se per azione del tetrossido di azoto sulla tetraossima $CH_3 . (C : NOH)_4 . CH_3$ risulta il suddetto diperossido o quest'altro

$$\begin{array}{l} CH_3 . C \text{———} C - C \text{———} C . CH_3 \\ \quad\;\; \| \qquad\quad\;\; \| \quad\; \| \qquad\quad\;\; \| \\ \quad\;\; N - O - O - N \quad N - O - O - N \end{array}$$

, ma la tetraossima del dimetiltetrachetone non è conosciuta.

Nel primo caso il perossido della diossima del perossido della diacetilgliossima si ottiene, dopo lavatura con etere, perfettamente puro in laminette gialle splendenti fusibili a 187° con vivissima decomposizione [10]; nel secondo e nel terzo caso occorre cristallizzarlo una volta dall'alcool.

Trovato %:	C 36,39	H 3,49	N 28,06-28,58.
Per $C_6H_6O_4N_4$ calc.:	36,36	3,03	28,28.

La determinazione del peso molecolare in naftalene ha dato i seguenti risultati:

Trovato P.M.:	195-189.
Per $C_6H_6O_4N_4$ calc.:	198.

È quasi insolubile nell'acqua; discretamente solubile a caldo e poco a freddo in alcool, benzene, acetone; quasi insolubile a freddo in cloroformio, etere, ligroina.

Si scioglie a freddo nell'acido solforico concentrato con colorazione gialla la quale diventa verde per aggiunta di fenolo. Si scioglie a caldo nella soluzione diluita di carbonato sodico con colorazione rosso-bruna; acidificando poi il liquido si ha sviluppo di composti nitrosi.

Riscaldato brevemente all'ebollizione con acido cloridrico o solforico diluiti, fornisce una sostanza bianca [11], la quale, isolata per distillazione col vapore e cristallizzata dall'alcool acquoso, si presenta in aghi appiattiti fusibili a 75° senza decomposizione ed ha la formola $C_6H_6O_7N_4$.

Trovato %:	C 29,36	H 2,64	N 22,83.
Per $C_6H_6O_7N_4$ calc.:	29,27	2,44	22,77,

confermata dalla determinazione del peso molecolare in acido acetico.

Trovato P.M.:	243-246.
Per $C_6H_6O_7N_4$ calc.:	246.

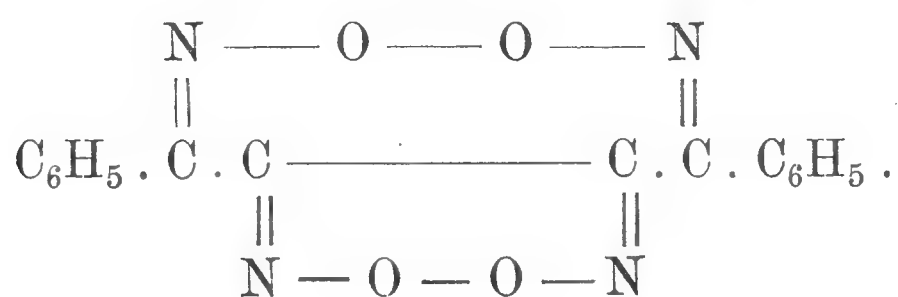
---

[10] L'analisi di questa sostanza presenta perciò grandi difficoltà.

[11] Contemporaneamente si formano ammoniaca, acido cianidrico ed acido ossalico.

La stessa sostanza si origina anche, ma lentamente e sempre con piccolo rendimento, per azione di detti acidi a freddo, e perfino per azione dell'acido nitrico, ed è per questo motivo che, come abbiamo già detto, il diperossido preparato coll'acido nitrico deve essere raccolto dopo 12 ore al massimo. Essa è solubile a freddo nei comuni solventi organici, salvo la ligroina, nella quale è discretamente solubile a caldo e pochissimo a freddo. È un po' solubile nell'acqua e facilmente volatile col vapore. Si scioglie nell'idrossido di sodio con colorazione gialla e nell'acido solforico concentrato senza colorazione, anche in presenza di fenolo. Nulla possiamo per ora dire sulla sua costituzione.

Perossido della diossima del perossido della dibenzoilgliossima

```
        N —— O —— O —— N
        ||             ||
C6H5 . C . C ———————— C . C . C6H5 .
           ||        ||
           N — O — O — N
```

Risulta sia per azione del tetrossido di azoto sulla soluzione eterea della diossima del perossido della dibenzoilgliossima $C_6H_5 . C(:NOH) . (C_2N_2O_2) . C(:NOH) . C_6H_5$, ed allora lo si ottiene senz'altro puro dopo una semplice lavatura con etere ove è insolubile; sia riscaldando brevemente la diossima con acido nitrico $d = 1,40$, nel qual caso conviene prima lavarlo con acido nitrico e poi con alcool bollente.

Si presenta come polvere gialla microcristallina fusibile a temperature comprese fra 162° e 168° a seconda del modo di riscaldamento.

Trovato $^0/_0$:	N 17,40.
Per $C_{16}H_{10}O_4N_4$ calc.:	17,39.

È praticamente insolubile anche a caldo nei comuni solventi organici e nell'idrossido di sodio; solubile a freddo nell'acido solforico concentrato con colorazione giallo-aranciata che passa al bruno per aggiunta di fenolo.

Torino – Istituto Chimico della R. Università.
Giugno 1924.

Sulla configurazione dell'acido 2,3-oleico

Nota del Dott. G. B. SEMERIA
presentata dal Socio nazionale residente G. Ponzio

Quanto è noto finora sulle proprietà chimiche dell'acido 2,3-oleico $CH_3 . (CH_2)_{14} . CH : CH . COOH$ non permette di stabilirne la configurazione, potendosi soltanto ritenere probabile che per la sua stabilità verso l'acido nitroso (1) esso appartenga alla serie elaidinica. Nè si riuscì di risolvere il problema ricorrendo alla determinazione delle costanti ottiche, poichè mentre Eykman (2) ha trovato che gli acidi oleico ordinario ed elaidinico $CH_3 . (CH_2)_7 . CH : CH . (CH_2)_7 . COOH$ presentano una esaltazione specifica della rifrazione e della dispersione

	t^o	$E\Sigma\alpha$	$E\Sigma_D$	$E\Sigma_\beta - \Sigma\alpha$	$E\Sigma_\gamma - \Sigma\alpha$
Acido oleico ordinario	78,4	+ 0,26	—	+ 3 %	—
Acido elaidinico . . .	80,5	+ 0,30	+ 0,30	+ 4 %	+ 2 %

Auwers (3) riscontrò per l'acido 2,3-oleico esaltazioni specifiche della rifrazione e della dispersione maggiori di quelle degli acidi oleico ordinario ed elaidinico

	t^o	$E\Sigma\alpha$	$E\Sigma_D$	$E\Sigma_\beta - \Sigma\alpha$	$E\Sigma_\gamma - \Sigma\alpha$
Acido 2,3-oleico	78,6	+ 0,57	+ 0,58	+ 14 %	+ 14 %

ed, estendendo le sue ricerche ad altri termini della serie degli acidi Δ_1-olefinmonocarbonici, riconobbe che l'esaltazione

(1) Ponzio, " Gazz. Chim. Ital. ", *35*, II, 135 (1905).
(2) " Rec. Trav. Chim. ", *12*, 162 (1893).
(3) *Ann.* *432*, 87 (1923).

non dipende dalla lunghezza della catena degli atomi di carbonio, e che per gli acidi col doppio legame in posizione 2,3 oscilla intorno al valore medio

$$E\Sigma_\alpha = + 0{,}83 \qquad E\Sigma_D = + 0{,}89.$$

Inoltre per ogni singola coppia di isomeri geometrici le esaltazioni specifiche differiscono di poco; ed in realtà se i valori delle esaltazioni specifiche della rifrazione e della dispersione degli acidi crotonico ed isocrotonico $CH_3 . CH : CH . COOH$ determinati da Eykman (4)

	t^0	$E\Sigma\alpha$	$E\Sigma_D$	$E\Sigma_\beta - \Sigma_\alpha$	$E\Sigma_\gamma - \Sigma_\alpha$
Acido crotonico .	78,7	+ 1,10	+ 1,15	+ 34 %	+ 38 %
Acido isocrotonico	21,8	+ 0,69	+ 0,71	+ 30 %	+ 36 %

appaiono alquanto diversi, bisogna osservare che le temperature d'esperienza sono pure molto differenti, e che eseguendo le correzioni per la temperatura sui valori di uno di essi e confrontandoli con quelli dell'altro, la differenza si riduce a poco.

D'altra parte, secondo Brühl, le forme stabili degli isomeri spaziali sono quelle aventi potere rifrangente e dispersione più elevata. Ciò effettivamente si verifica per molte coppie di acidi (non però per tutti i loro derivati, per esempio per gli esteri); ma in base alle osservazioni finora eseguite si deve ritenere che gli acidi olefinmonocarbonici isomeri geometrici abbiano uguale comportamento spettrochimico, come risulta dalla seguente tabella in cui sono riferiti i dati per gli acidi oleico ordinario ed elaidinico $CH_3 . (CH_2)_7 . CH : CH . (CH_2)_7 . COOH$ e per gli acidi erucico e brassidinico (5) $CH_3 . (CH_2)_7 . CH : CH . (CH_2)_{11} . COOH$ (*).

---

(4) Ricerche refrattometriche riferite da Holleman.

(5) Eykman, "Rec. Trav. Chim. ", *12*, 162 (1893).

(*) Secondo I. Lifschitz e Beek (" Kolloid Zeit. ", *24*, 61 (1920) il comportamento ottico dell'acido oleico ordinario in soluzione nell'alcool etilico è normale, ma i valori ottenuti da detti autori non si possono confrontare con quelli di Eykman e di Auwers (loc. cit.), i quali operavano sulle sostanze fuse.

	t^o	$E\Sigma\alpha$	$E\Sigma_D$	$E\Sigma_\beta - \Sigma\alpha$	$E\Sigma_\gamma - \Sigma\alpha$
Acido oleico ordinario	78,4	+ 0,26	—	+ 3 %	—
Acido elaidinico . . .	80,5	+ 0,30	+ 0,30	+ 4 %	+ 2 %
Acido brassidinico . .	57,1	+ 0,23	—	± 0 %	—
Acido erucico	80,9	+ 0,21	+ 0,22	+ 2 %	± 0 %

Per stabilire la configurazione dell'acido 2,3-oleico non si poteva, per conseguenza, che ricorrere alla criometria, utilizzando l'osservazione fatta da Bruni (7), secondo il quale il dimetilestere dell'acido succinico dà soluzioni solide col dimetilestere dell'acido fumarico e non con quello dell'acido maleico, osservazione che permise a detto Autore di enunciare la regola che un composto saturo dà soluzioni solide solamente coi corrispondenti composti etilenici di configurazione *trans* e non con quelli di configurazione *cis*.

Perciò mediante un depressimetro di Eykman graduato in ventesimi di grado (il quale permetteva l'apprezzamento del duecentesimo con una lente) ho anzitutto determinato la costante criometrica dell'acido 2,3-oleico preparato secondo le indicazioni di Ponzio (8) e fusibile a 59°. In detto acido ho successivamente sciolto benzile, naftalene ed acido benzoico da me accuratamente purificati, ed ecco i risultati ottenuti:

Solvente: acido 2,3-oleico.

Sostanza disciolta: benzile $C_{14}H_{10}O_2 = 210$.

c	abbassamento	K
1,2858	0,220	35,93
2,5074	0,425	35,59
3,6077	0,600	34,92
4,5281	0,750	34,86

Media 141,30 : 4 = 35,2.

(7) " Gazz. Chim. Ital. ", *30*, II, 59 (1900).
(8) " Gazz. Chim. Ital. " *34*, II, 77 (1904).

Solvente: acido 2,3-oleico.
Sostanza disciolta: naftalene $C_{10}H_8 = 128$.

c	abbassamento	K
1,0781	0,300	36,00
1,8337	0,510	35,60
2,5960	0,725	35,74
3,6381	1,025	36,03

Media 143,37 : 4 = 35,84.

Solvente: acido 2,3-oleico.
Sostanza disciolta: acido benzoico $C_7H_6O_2 = 122$.

c	abbassamento	K
0,9220	0,275	36,47
1,6311	0,485	36,31
3,1001	0,935	36,70
5,0122	1,475	35,90

Media 145,88 : 4 = 36,42.

Media generale: (35,20 + 35,84 + 36,82) : 3 = 35,8.

La costante criometrica, K = 35,8 dell'acido 2,3-oleico è dunque minore di quella del corrispondente acido saturo, lo stearico pel quale K = 45, e di quella dell'acido elaidinico per il quale K = 39.

Stabilita la costante criometrica dell'acido 2,3-oleico, ho determinato il peso molecolare di questo nell'acido stearico, impiegando il prodotto migliore fornito dalla ditta Kahlbaum e purificandolo ulteriormente col trasformarlo nell'estere metilico che fu distillato nel vuoto e quindi saponificato.

Dai dati criometrici qui sotto riferiti

Solvente: acido stearico, K = 45.
Sostanza disciolta: acido 2,3-oleico, M = 282.

	c	abbassamento	M
I)	0,9650	0,145	299
	1,7980	0,250	323
	3,0905	0,400	347
	3,9014	0,490	358
II)	1,2330	0,185	303
	2,6411	0,345	346
	3,0071	0,375	360
	5,0247	0,619	365

risulta che i pesi molecolari trovati per l'acido 2,3-oleico vanno crescendo dalle concentrazioni più piccole a quelle più grandi, essendo già anormali in entrambe le prove fin dalle concentrazioni minori.

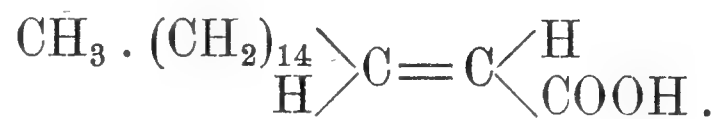
Anche da questi altri dati che si riferiscono alla determinazione del peso molecolare dell'acido stearico nell'acido 2,3-oleico

Solvente: acido 2,3-oleico, K = 35,8.
Sostanza disciolta: acido stearico, M = 284.

c	abbassamento	M
1,5533	0,175	317
2,0292	0,225	322
2,8563	0,270	378
3,8844	0,325	538

appare un'anomalia la quale, quantunque non molto forte per la prima concentrazione, cresce assai rapidamente per le concentrazioni successive.

Concludendo: siccome l'acido stearico dà soluzioni solide coll'acido 2,3-oleico, a quest'ultimo acido si deve attribuire la configurazione *trans* (fumaroide)

$$\begin{matrix} CH_3 . (CH_2)_{14} \\ H \end{matrix} \!\!>\! C = C \!<\!\! \begin{matrix} H \\ COOH \end{matrix} .$$

Torino - Istituto Chimico della R. Università.
Giugno 1924.

Sul perossido della dibenzoilgliossima

Nota del Dott. GUSTAVO RUGGERI
presentata dal Socio naz. resid. Prof. G. Ponzio

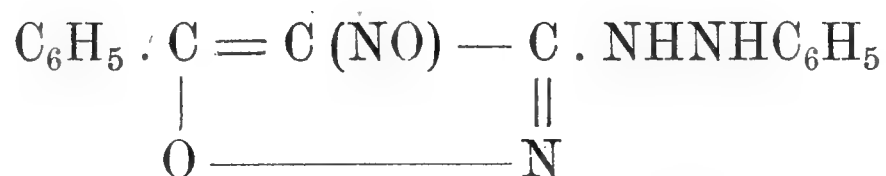
Malgrado che molti Autori si siano occupati del perossido della dibenzoilgliossima $C_6H_5 . CO . (C_2N_2O_2) . CO . C_6H_5$ (difenildinitrosoacile, dibenzoilfurossano), mancano tutt'ora dati esatti sul suo modo di formazione e sul suo comportamento verso la fenilidrazina.

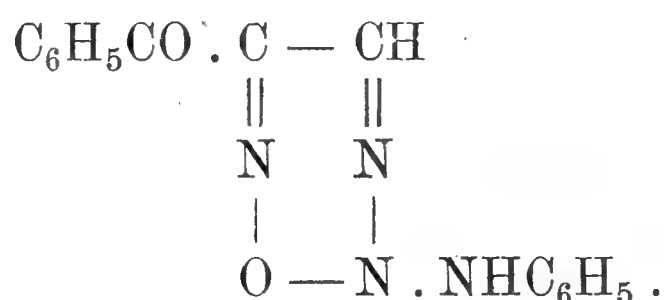
Si ammette bensì che quando esso risulta per azione dell'acido nitrico sull'acetofenone $C_6H_5 . CO . CH_3$ secondo il noto metodo di Hollemann [1], si passi, come prodotti intermedi, per l'isonitrosoacetofenone $C_6H_5 . CO . C(:NOH) . H$ e per l'acido benzoilmetilnitrolico $C_6H_5 . CO . C(:NOH) . (NO_2)$; ma effettivamente si è soltanto riconosciuto che il perossido della dibenzoilgliossima si ottiene anche trattando con acido nitrico il sale sodico dell'isonitrosoacetofenone [2], senza che sia mai stata data alcuna prova della supposta trasformazione preliminare di quest'ultimo in un acido nitrolico.

Così pure, se, in base alle asserzioni di Klingemann [3], si può ritenere che trattando con fenilidrazina il perossido della dibenzoilgliossima risulti benzoilfenilidrazina simmetrica $C_6H_5CO . NH . NHC_6H_5$, nulla si sa degli altri prodotti *diretti* della reazione, uno dei quali, tenendo conto delle ricerche di Wieland e Gmelin [4], dovrebbe essere la benzoilfenilidrazinogliossima

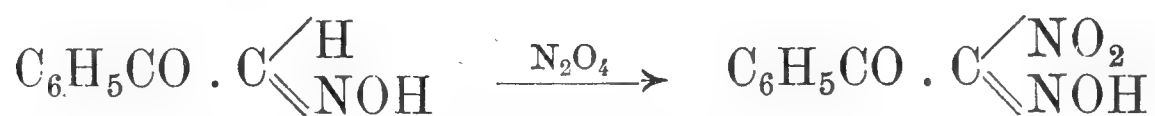
(1) " Rec. trav. chim. ,, *11*, 259 (1892) e *29*, 283 (1910).
(2) *Ber. 21*, 2837 (1888).
(3) *Ann., 269*, 130 (1892).
(4) *Ann. 375*, 297 (1910).

$C_6H_5 . CO . C(:NOH) C(:NOH) . NHNH . C_6H_5$ il cui anidroderivato, cioè il γ-fenilidrazino-β-nitroso-α-fenilisossazolo

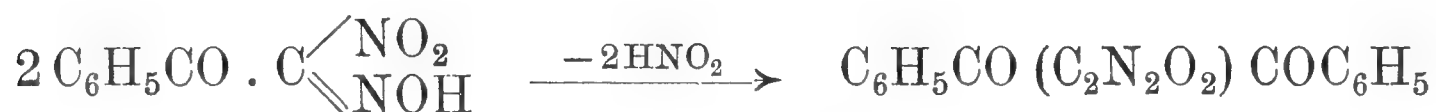
$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C = C(NO) - C . NHNHC_6H_5 \\ \quad\;\; | \qquad\qquad\quad \| \\ \quad\;\; O \text{———————} N \end{array}$$

fu forse già isolato da Boeseken ([5]), che lo considerò come l'anilide del benzoilisotriazossolo

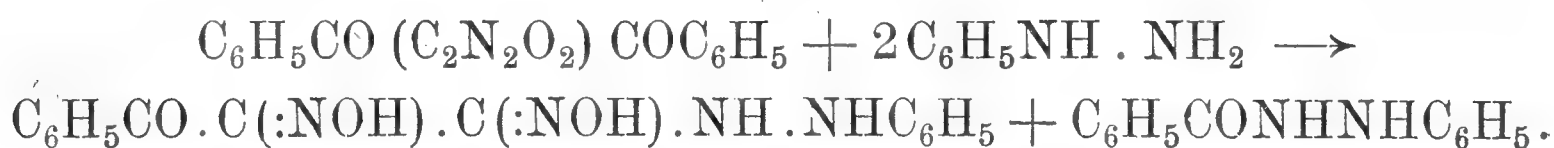
$$\begin{array}{l} C_6H_5CO . C - CH \\ \qquad\quad\;\; \| \quad\; \| \\ \qquad\quad\;\; N \quad N \\ \qquad\quad\;\; | \quad\;\; | \\ \qquad\quad\;\; O - N . NHC_6H_5 . \end{array}$$

Per colmare le suddette lacune ho pensato di studiare l'azione del tetrossido di azoto sull'isonitrosoacetofenone e di ripetere le esperienze di Klingemann e di Boeseken (loc. cit.); giungendo alle seguenti conclusioni:

1) il tetrossido di azoto trasforma l'isonitrosoacetofenone in acido benzoilmetilnitrolico

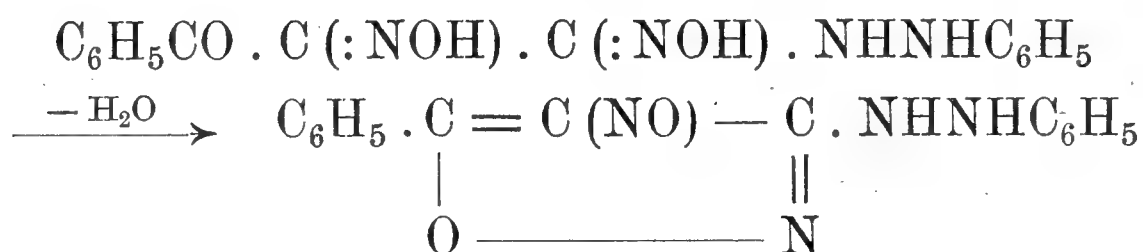
$$C_6H_5CO . C\begin{matrix}\diagup H \\ \diagdown NOH\end{matrix} \xrightarrow{N_2O_4} C_6H_5CO . C\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown NOH\end{matrix}$$

del quale ho ottenuto il benzoilderivato $C_6H_5CO . C\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown NO . COC_6H_5\end{matrix}$.

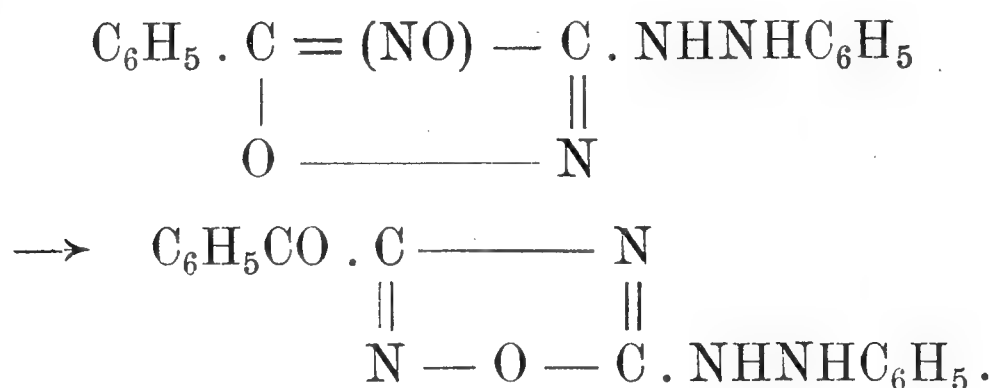
Il perossido della dibenzoilgliossima risulta dalla condensazione di due molecole di acido benzoilmetilnitrolico con eliminazione di due molecole di acido nitroso

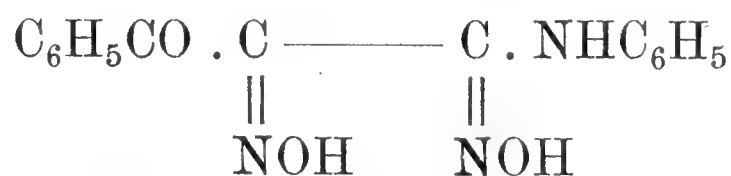
$$2\,C_6H_5CO . C\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown NOH\end{matrix} \xrightarrow{-2HNO_2} C_6H_5CO(C_2N_2O_2)COC_6H_5$$

2) il prodotto *diretto* della reazione fra il perossido della dibenzoilgliossima e la fenilidrazina è la benzoilfenilidrazinogliossima, la quale così risulta

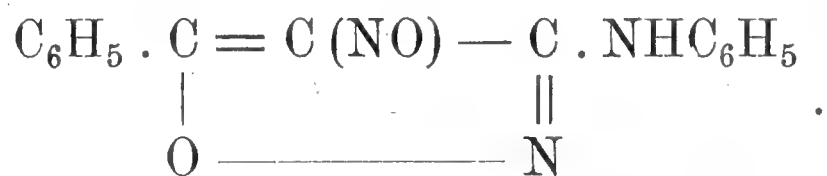
$$C_6H_5CO(C_2N_2O_2)COC_6H_5 + 2\,C_6H_5NH . NH_2 \longrightarrow$$
$$C_6H_5CO . C(:NOH) . C(:NOH) . NH . NHC_6H_5 + C_6H_5CONHNHC_6H_5 .$$

([5]) "Rec. trav. chim.", *16*, 318 (1897).

Essa è poco stabile e perde facilmente una molecola di acqua dando il γ-fenilidrazino-β-nitroso-α-fenilisossazolo

$$C_6H_5CO\,.\,C\,(:NOH)\,.\,C\,(:NOH)\,.\,NHNHC_6H_5$$
$$\xrightarrow{-H_2O} \quad C_6H_5\,.\,C = C\,(NO) - C\,.\,NHNHC_6H_5$$
$$\text{(O — N ring: C—O and C=N)}$$

il quale per riscaldamento con alcuni solventi organici si isomerizza in un'azossima, e precisamente nel 3-benzoil-5-fenilidrazino-furo-(ab_1)-diazolo

$$C_6H_5\,.\,C = (NO) - C\,.\,NHNHC_6H_5$$
$$\text{(O — N ring)}$$
$$\longrightarrow \quad C_6H_5CO\,.\,C \text{——} N$$
$$\| \qquad \|$$
$$N - O - C\,.\,NHNHC_6H_5\,.$$

La fenilidrazina si comporta dunque verso il perossido della dibenzoigliossima in modo analogo all'anilina, cioè come una base. È però da osservare che mentre io sono riuscito ad ottenere allo stato di purezza la benzoilfenilidrazinogliossima che più avanti descrivo, nè Boeseken, nè Wieland e Gmelin (loc. cit.) poterono isolare la benzoilfenilaminogliossima

$$C_6H_5CO\,.\,\underset{\underset{NOH}{\|}}{C} \text{——} \underset{\underset{NOH}{\|}}{C}\,.\,NHC_6H_5$$

ma soltanto il suo anidroderivato, il γ-anilino-β-nitroso-α-fenilisossazolo

$$C_6H_5\,.\,C = C\,(NO) - C\,.\,NHC_6H_5$$
$$\text{(O — N ring)}$$

D'altra parte, siccome secondo Sloan Mill [6] il perossido della diacetilgliossima $CH_3CO\,.\,(C_2N_2O_2)\,.\,COCH_3$ è trasformato

[6] " Chem. News „ *28,* 228 (1903).

dalla fenilidrazina dapprima nel fenilidrazone $CH_3CO . (C_2N_2O_2) . C (: NNHC_6H_5) . CH_3$ e poi nell'osazone $CH_3 . C (: NNHC_6H_5) . (C_2N_2O_2) . C (: NNHC_6H_5) . CH_3$, esiste evidentemente una notevole differenza nel comportamento dei due perossidi, la quale, come risulta da ricerche che ho in corso e che riferirò quanto prima, si manifesta pure verso altri reattivi del carbonile.

Azione del tetrossido di azoto sull'isonitrosoacetofenone. — Trattando gr. 10 di isonitrosoacetofenone $C_6H_5 . CO . C (: NOH) . H$, sciolto in etere anidro e raffreddato in miscela frigorifera, con gr. 3,2 ($^1/_2$ mol.) di tetrossido di azoto, il liquido si colora dapprima intensamente in bruno, poi in verde ed in ultimo diventa giallognolo. Lavando con acqua la soluzione ottenuta e lasciando evaporare l'etere all'aria si ottiene una massa pastosa che contiene l'acido benzoilmetilnitrolico $C_6H_5CO . C (: NOH) . (NO_2)$ e che introdotta in un essiccatore a vuoto svolge per qualche tempo composti nitrosi trasformandosi nel perossido della dibenzoilgliossima $C_6H_5CO . (C_2N_2O_2) . COC_6H_5$. Questo cristallizzato dall'alcool si ottiene subito perfettamente puro e fusibile a 87° senza decomposizione.

Nella reazione, che ha luogo con rendimento quasi quantitativo, non si formano tracce dell'isomero (o polimero), fusibile a 178°, il quale invece prende origine nella proporzione dell'8 % circa se si parte dall'acetofenone [7]. Inoltre il perossido preparato come è detto sopra cristallizza benissimo da qualunque dei comuni solventi organici, mentre, come è noto, quello greggio ha grande tendenza di separarsi liquido.

Benzoilderivato dell' acido benzoilmetilnitrolico $C_6H_5CO . C\begin{smallmatrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown NO . COC_6H_5\end{smallmatrix}$. Dopo aver lavato con acqua la soluzione eterea nella quale è avvenuta la reazione fra il tetrossido di azoto e l'isonitrosoacetofenone, si addiziona un eccesso di cloruro di benzoile e quindi, agitando e raffreddando in ghiaccio, si fa gocciolare una soluzione diluitissima di idrossido di sodio

---

(7) Hollemann, *Ber. 20,* 3360 (1887).

(al 2-3 %). Ogni goccia che cade provoca una comparsa fugace della caratteristica colorazione rosso sangue dei sali degli acidi nitrolici. Quando il liquido non si colora più, si aggiunge un eccesso di idrossido di sodio al 10 %, si lascia evaporare l'etere all'aria, si separa la massa pastosa giallo-verdastra che galleggia, la si lava prima con acqua, poi con alcool, ed infine la si scioglie in poco alcool bollente. Col raffreddamento cristallizza il *benzoilderivato dell'acido benzoil-metilnitrolico* $C_6H_5CO \cdot C\begin{smallmatrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown NO \cdot COC_6H_5\end{smallmatrix}$ in prismetti leggermente paglierini fusibili a 138° senza decomposizione.

Trovato %:	N 9,35.
Per $C_{15}H_{10}O_5N_2$ calc.:	9,39.

È solubile a freddo nel cloroformio e nell'acetone; molto a caldo e meno a freddo in alcool ed in benzene; quasi insolubile in etere; poco solubile a caldo e quasi affatto a freddo in ligroina.

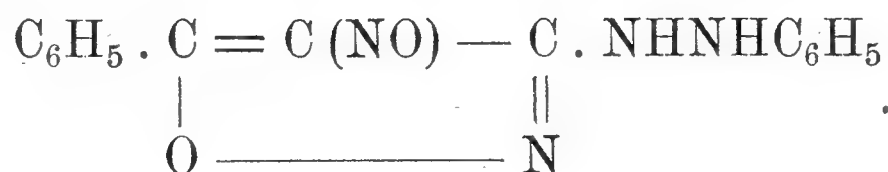
Benzoilfenilidrazinogliossima $C_6H_5CO \cdot C(:NOH) \cdot C(:NOH) \cdot NHNHC_6H_5$. Si sciolgono a caldo in 100 cc. di etere gr. 10 di perossido della dibenzoilgliossima $C_6H_5CO \cdot (C_2N_2O_2) \cdot COC_6H_5$, si raffredda in ghiaccio e si aggiungono gr. 7,5 di fenilidrazina (2 mol.). Ha luogo un leggero autoriscaldamento e dopo qualche tempo, dal liquido, che si è colorato in giallo, comincia a separarsi una miscela cristallina di benzoilfenilidrazina $C_6H_5CO \cdot NHNHC_6H_5$ e di benzoilfenilidrazinogliossima $C_6H_5CO \cdot C(NOH) \cdot C(:NOH) \cdot NHNHC_6H_5$, dalla quale per ripetute cristallizzazioni dall'alcool si ottiene la gliossima pura, in prismetti gialli fusibili a 138° con decomposizione.

Trovato %:	N 18,56.
Per $C_{15}H_{14}O_3N_4$ calc.:	18,79.

È discretamente solubile in etere; abbastanza solubile a caldo in alcool, cloroformio, acetone e benzene; quasi insolubile in ligroina.

Si scioglie negli idrossidi dei metalli alcalini con colorazione giallo-aranciata; è invece insolubile negli acidi diluiti.

γ-fenilidrazino-β-nitroso-α-fenilisossazolo

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \, . \, C = C\,(NO) - C \, . \, NHNHC_6H_5 \\ \qquad\quad | \qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\quad O \, \text{———————} \, N \end{array}$$

Riscaldando moderatamente la benzoilfenilidrazinogliossima con acido acetico glaciale, essa passa in soluzione ed il liquido si colora intensamente in rosso-bruno. Col raffreddamento si separano grossi aghi rossi i quali, raccolti e lavati prima con acido acetico e poi con alcool, fondono a 97° e perdono lentamente acido acetico già alla temperatura ordinaria, e più rapidamente se scaldati in stufa a 40°-50°, trasformandosi in γ-fenilidrazino-β-nitroso-α-fenilisossazolo, giallo aranciato, e fusibile a 106° con viva decomposizione

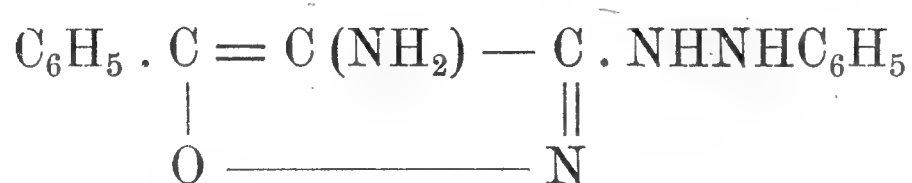
Trovato °/₀	N 20,12.
Per $C_{15}H_{12}O_2N_4$ calc.:	20,00.

L'isossazolo è solubilissimo in alcool, cloroformio e acetone; molto solubile a caldo e meno a freddo in alcool metilico e benzene; quasi insolubile in ligroina.

Si scioglie nell'idrossido di sodio diluito con colorazione giallo-aranciata; ma acidificando la soluzione si riottiene la benzoilfenilidrazinogliossima.

Come già ho detto, lo stesso composto era forse già stato ottenuto da Boeseken (loc. cit.), il quale lo ritenne l'anilide del benzoilisotriazossolo. Però egli asserisce che trattando con acido acetico glaciale l'olio sciropposo risultante per evaporazione dell'etere in cui eseguiva la reazione fra il perossido della dibenzoilgliossima e la fenilidrazina, risulta dapprima un *acetato* fusibile a 75° e trasformabile all'aria in una polvere gialla, la quale cristallizzata dall'alcool metilico fonde a 65°. I dati di Boeseken non collimano affatto coi miei e li ritengo errati, anche perchè questo Autore non aveva potuto disporre della benzoilfenilidrazinogliossima pura.

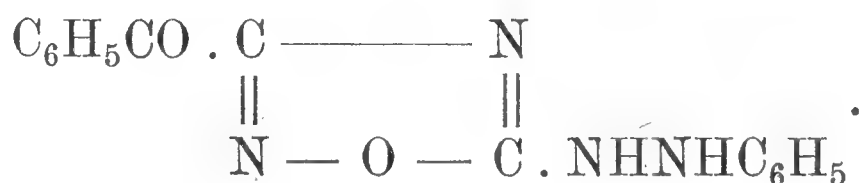
γ-*fenilidrazino*-β-*amino*-α-*fenilisossazolo*

$$
\begin{array}{l}
C_6H_5 . C = C(NH_2) - C . NHNHC_6H_5 \\
\quad\quad\;\; | \quad\quad\quad\quad\quad\;\; \| \\
\quad\quad\;\; O \text{ ———————— } N
\end{array}
$$

Si ottiene con rendimento quantitativo trattando con un piccolo eccesso di acido acetico glaciale e di polvere di zinco la soluzione alcoolica del nitrosoisossazolo raffreddata in ghiaccio. Diluendo con acqua, dopo filtrazione, precipita in fiocchi gialli, e purificato per soluzione in acido cloridrico e trattamento con acetato sodico, ed in ultimo cristallizzato dal toluene si presenta in squamette madreperlacee fusibili a 132° con decomposizione.

Trovato %:	N 21,37.
Per $C_{15}H_{14}ON_4$ calc.:	21,42.

È solubile a freddo in etere, alcool, cloroformio, acetone e benzene; poco solubile a caldo in ligroina ed in toluene e quasi affatto a freddo. È solubile negli acidi minerali diluiti, dai quali riprecipita neutralizzando la soluzione.

3-benzoil-5-fenilidrazino-furo-(ab_1)-diazolo

$$
\begin{array}{l}
C_6H_5CO . C \text{ ——————— } N \\
\quad\quad\quad\quad\;\; \| \quad\quad\quad\quad\; \| \\
\quad\quad\quad\quad\;\; N - O - C . NHNHC_6H_5
\end{array}
$$

Questa azossima si origina per isomerizzazione del γ-fenilidrazino-β-nitroso-α-fenilisossazolo. A tale scopo basta riscaldare per qualche tempo l'isossazolo con alcuni solventi organici e, nel miglior modo, far bollire in apparecchio a ricadere gr. 2 di isossazolo con 10 cc. di anidride acetica per un quarto d'ora. A reazione ultimata, cioè quando il liquido, che all'inizio è colorato intensamente in rosso, diventa giallo chiaro, si lascia raffreddare, si aggiunge acqua, si raccoglie e si lava la massa cristallina risultante e la si cristallizza dall'alcool bollente.

Il 3-benzoil-5-fenilidrazino-furo-(ab_1)-diazolo così ottenuto costituisce lunghi aghi gialli splendenti fusibili a 172° senza decomposizione.

Trovato %: N 19,94.
Per $C_{15}H_{12}O_2N_4$ calc.: 20,00.

È solubile a freddo in cloroformio, benzene e acetone ed un po' anche in etere; discretamente solubile a caldo e pochissimo a freddo in alcool, ligroina e acido acetico glaciale.

Non si scioglie negli idrossidi dei metalli alcalini e neppure negli acidi diluiti, verso i quali è stabile anche all'ebollizione.

Torino - Istituto Chimico della R. Università.
Giugno 1924.

Funghi africani raccolti dal Dott. Giovanni NEGRI nella Etiopia Meridionale (Scioa-Galla); e nell'Uganda (British East Africa) dal Rev. Padre Giovanni BALBO delle Missioni della Consolata di Torino

studiati dal Socio naz. resid. ORESTE MATTIROLO

La presente contribuzione micologica, si riferisce ad un piccolo manipolo di funghi, raccolti alcuni anni or sono in due distinte località africane: nell'Etiopia Meridionale (Scioa e Galla) e nell'Uganda (Africa Orientale Inglese) alle falde del Monte Kenia.

Il mio aiuto Dott. Giovanni Negri raccolse nella prima di dette località; mentre nella seconda, i funghi studiati, mi furono inviati dal molto Rev. Padre Giovanni Balbo delle Missioni della Consolata di Torino.

L'interesse che presentano alcuni di questi miceti mi ha indotto a pubblicarli, ciò che ho fatto altresì per invogliare i nostri Rev. Missionari, residenti in regioni ancora poco esplorate dal punto di vista scientifico, a perseverare nelle ricerche e a raccogliere materiali di studio, onde i micologi italiani possano efficacemente continuare l'opera dei loro insigni antecessori.

Del resto, è cosa giusta, che chi intende all'opera laboriosa del raccoglitore, in condizioni certe volte difficilissime, abbia la soddisfazione di vedere apprezzate le sue fatiche; perocchè l'unico premio e l'unico sprone a perseverare nelle ricerche è senza dubbio quello di vederle considerate, studiate, e rese quindi utili.

Ai nostri intrepidi Missionari della Consolata, che l'ideale religioso sospinge nelle più lontane e inospitali regioni, sostiene nelle più ardue lotte, possa essere bene accetto questo mio tenue omaggio di gratitudine per aver essi risposto così cortesemente alle mie sollecitazioni.

All'amico Dottor NEGRI possa il riconoscimento dell'opera sua di micologo, essergli gradevolmente accetto, come complemento al lavoro fitogeografico che fu lo scopo del suo viaggio nell'Etiopia Meridionale (1).

Sono lieto di dovere a questo modesto studio di alcuni miceti tropicali, la soddisfazione di una interessante corrispondenza coll'insigne micologo Abate G. BRESADOLA; e quella di conversazioni attraentissime col Sig. C. G. LLOYD di Cincinnati (Ohio), conoscitore profondo della micologia tropicale, che ebbi ospite gradito nel mio Laboratorio a studiarvi i funghi ipogei da me raccolti.

I miceti del Dottor NEGRI (giunti in condizioni da permetterne lo studio) sommarono a specie N. 15, delle quali due non ancora note.

Al Rev. Padre Giovanni BALBO delle Missioni della Consolata di Torino, devo la conoscenza di N. 18 specie, delle quali alcune, sebbene già note, sono della massima importanza.

A questi due miei collaboratori e agli amici Rev. Abate BRESADOLA e C. G. LLOYD che mi aiutarono coi loro consigli rendo le più cordiali azioni di grazie.

Torino, luglio 1924.

I.

Funghi raccolti dal Dott. Giovanni Negri (Scioa-Galla).

Agaricineae.

Galera Fries.

Galera paradoxa Mattirolo, Nuova Specie.

Questo curioso fungo fu da me dapprima ritenuto avere relazioni colle *Podaxacee* e colle *Secotiacee*, per ciò che, colle prime concorda per le parvenze esterne, e colle seconde per il

(1) V. G. NEGRI, *Appunti di una Escursione botanica nell'Etiopia meridionale.* Marzo-agosto 1909. Editi a cura del Ministero delle Colonie. Febbraio 1915.

fatto di presentare delle camere imeniali chiuse, come appare evidente nelle sezioni perpendicolari all'asse del cappello.

Lo studio accurato di numerosi esemplari, mi convinse di poi che l'occhio esercitato del micologo Abate BRESADOLA aveva ragione nel ritenere questo fungo un *Agaricineo*; e nel classificarlo fra le specie delle *Galerae conocephalae*, quantunque presenti delle interessanti particolarità, che (distinguendolo da tutte le *Galere* descritte nei repertori micologici) si riferiscono alla disposizione delle lamine imeniali.

Nel fungo etiopico, le lamine, pure decorrendo lungo la superficie interna del cappello, non sono regolarmente parallele fra loro, ma si anastomizzano così da dare l'impressione di un reticolo a maglie abbastanza strette e poco rilevate. La superficie interna del cappello, vista colla lente, ricorda la superficie alveolata della porzione imeniale di una *Morchella*, o meglio ancora l'*Arillode* della Myristica. Quello che avvicina questo tipo interessante di *Galera* ad una *Secotiacea* è il fatto che, sezionando trasversalmente le lamine, si notano nell'interno di molte di esse delle camere tappezzate dall'Imenio perfettamente uguale all'Imenio normale, che regolarmente riveste la superficie esterna delle lamine normali. Un'altra particolarità notevole è pure quella che le lamine stesse si presentano poco salienti, così che invece di lamine si potrebbero chiamare semplicemente rialzi.

Questa disposizione, per quanto io abbia cercato, non ha riscontro in alcuna altra forma nè di *Galera*, nè di *Naucoria*, nè di altri tipi consimili.

La porzione clavato-campanulata, corrispondente al cappello (che negli esemplari etiopici, raccolti dal NEGRI, e da lui conservati in alcool, non era ancora espansa), varia in lunghezza da 1 a 2 centimetri, come varia pure la lunghezza totale del fungo da 4 a 9 centimetri.

Il piede, colla superficie leggermente striata, è sottile, rigonfio alla base, cavo internamente.

I *Basidii bi-tetraspori* sono accompagnati da *Cistidii*, e portano spore, che nella loro forma ellipsoidea-acuminata sono perfettamente analoghe a quelle delle *Galere*. La media di molte misurazioni dà una lunghezza di 9,1 a 10,4 ed una larghezza di 5,2 a 5,5.

Il tessuto del fungo è abbastanza compatto, quasi si direbbe cartilagineo.

Non avendo esaminato altro che esemplari conservati in alcool, purtroppo non posso dare indicazioni sul colore naturale del fungo.

Noto soltanto che, tolti dall'alcool e lasciati essiccare, questi funghi lasciano vedere il piede di colore ombrino-chiaro non privo di piccole espansioni forforacee; mentre il cappello, che in fondo appare dello stesso colore, presenta numerose striature di colore nero; e, certe volte, ampie macchie dello stesso colore. Però non è lecito in tali condizioni emettere un giudizio definitivo sul colore normale della specie.

In tesi generale il fungo etiopico ricorda la ubiquitaria *Galera tenera* SCHAEFF e anche la *Galera lateritia* FRIES; ma se ne distingue più che agevolmente per la disposizione delle lamine, per le dimensioni, e anche per la colorazione delle spore, che nel nostro fungo si presentano molto più chiare.

Conclusione. — Dopo aver consultata tutta quanta la letteratura che mi fu possibile; dopo aver lungamente vagato nel *caos* delle insufficienti descrizioni e delle iconografie delle specie di *Galere*, ho dovuto convincermi che la forma abissinica raccolta dal Dott. NEGRI, rappresenta una forma nuova nella sua struttura, se non nelle esterne parvenze.

Tale mia convinzione deriva anche dalla considerazione che a nessun micologo, anche poco provetto, sarebbe sfuggita la forma *Podaxinea* del fungo, nè le particolarità che presenta l'apparato imeniale.

Per queste ragioni ho creduto dare al fungo etiopico il nome di *Galera paradoxa*, nella fiducia che qualche micologo, visitando l'altipiano etiopico possa controllare le mie osservazioni e riuscire a sistemare definitivamente una forma che si presenta degnissima di studio e che, secondo il mio parere, potrà avere, dal punto di vista filogenetico, non poca importanza per chiarire alcune questioni che si riferiscono alla derivazione delle forme fungine ad imenio definitivamente chiuso.

La *Galera paradoxa* fu dal NEGRI trovata nei pascoli dell'altipiano etiopico fra Balci ed Addis-Abeba (Scioa).

Galera paradoxa Mattirolo.

Fig. 1 e 2. — Aspetto della specie (Grand. nat.).
„ 3. — Sezione del cappello, visto dalla parte interna (Grand. nat.).
„ 4. — Aspetto dell'Imenio reticolato (Alquanto ingrandito).
„ 5 e 5 *bis*. — Sezione trasversale del cappello.
C - Superficie esterna del cappello.
I - Imenio colle camere imeniali chiuse.
P - Piede colla parte midollare vuota.
(Debole ingrandimento, disegno fatto coll'apparecchio di proiezione Leitz).
„ 6. — Spore, Obb. 8, Ocul. 2, Reichert.

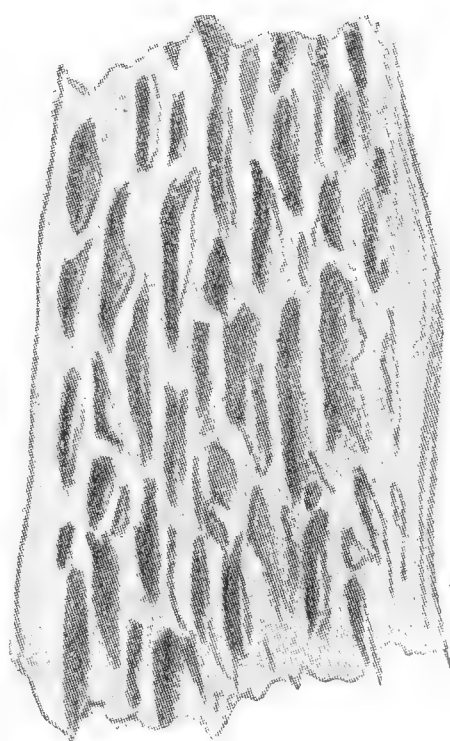



Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

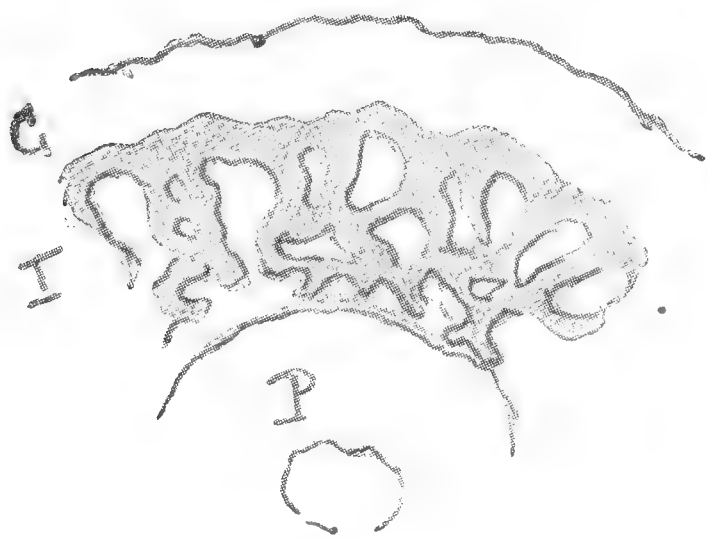
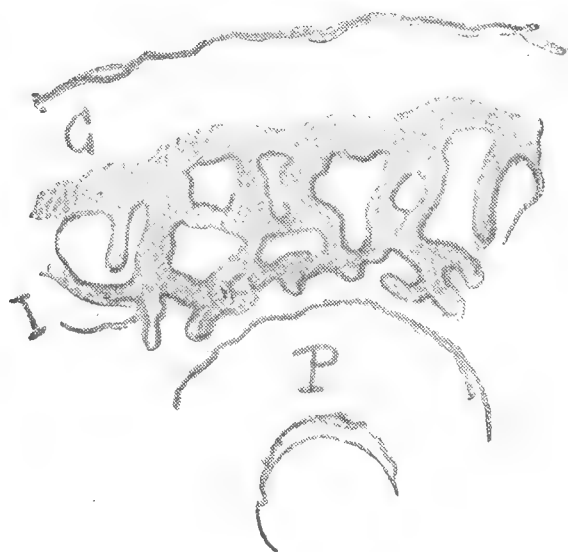



Fig. 5 Fig 5 *bis*

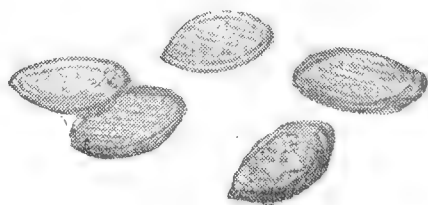



Fig. 6

Schizophyllum Fries.

Schizophyllum commune, FRIES, *Syst. Mic.* p. 333. — SACCARDO, *Syll.*, vol. V, p. 655.

Gli esemplari raccolti dal Dott. NEGRI appartengono a quella varietà nota sotto il nome di forma *multifidum*, che il BATSCH ha descritta in *Flor. Ceyl.*, N. 430. *Agaricus multifidus*, BATSCH, fig. 126.

Sui tronchi di una *Acacia*, non determinata, presso il Monte Posset nella Valle media dell'Hauasch.

Polyporeae.

Polystictus Fries.

Polystictus sanguineus (Linn.), Mey. Esq., p. 304. — FRIES, *Epicrysis-Syst Mycol.*, p. 444. — KROMBHOLZ, *Naturg. Abbil. der Schwämme*, fasc. I, p. 75, tab. V, fig. 5-6. — LINNÉ, *Spec., Plant.*, II, p. 1646.
= *Polystictus Regius* Miq. Tij. Wetensch., Amsterdam, 1852. p. 191. — SACCARDO, *Sylloge*, vol. VI, p. 229.

Questa specie, assai elegante per il colore caratteristico, nota, si può dire, di tutte le regioni tropicali (*India, Giava, Borneo, Filippine, Malacca, Sumatra, America Centrale e Meridionale, Africa, Nuova Zelanda, Tasmania, Isole del Mar Pacifico,* ecc., ved. *Sylloge*, loc. cit.); che la Medicina dei Segni (*Signatura rerum*) usò contro le emorragie interne e nelle ferite, differisce pochissimo dalla *Trametes cinnabarina* di FRIES, dalla quale però si distingue per la forma dimidiata-sessile e per avere i pori più grandi e più irregolari, mentre il loro tessuto è identico. Il BRESADOLA (in litt.) non sarebbe alieno di riunire le due specie, e di considerarle come sinonime.

Il fungo fu, dal Dott. NEGRI, raccolto sopra un ramo secco presso il Fiume *Catar* (Lago *Zuai*) nel mese di luglio 1909).

Fomes Fries.

Fomes rimosus Berk., Cent. I, n. 40. — FRIES, *Nov. Symb. Myc.*, p. 66. — SACCARDO, *Sylloge*, vol. VI, p. 161.

Questa specie, che apparve al NEGRI assai comune sui tronchi delle varie *Acacie*, fu da lui raccolta in località diffe-

renti: presso il guado dell'*Hauasch* sulla strada che dallo *Scioa* mette alla regione degli *Arussi-Galla*; sulla strada dall'*Assabot*, ai piedi dell'altipiano Harrarino a *Mulluh* e a *Miesso*; nell'agosto del 1909.

Il *Fomes rimosus* fu già notato della Gujana inglese; dell'America Meridionale; della Nuova Olanda e del Capo di Buona Speranza.

Trametes Fries.

Trametes torrida Bresad. (in Herbario).
= *Polystictus torridus* Fries, Epic., p. 490. — SACCARDO, *Sylloge*, vol. VI, p. 273 (Exemp. vetustum).

Nel deserto a Sud di *Fantalle*, poco lungi dal fiume *Hauasch* sopra un tronco d'*Acacia* abbattuta.

Luglio 1909.

Hexagonia Fries.

Hexagonia Klotzschii Berk. — BERK, *Exotic. Fungi*, p. 383, n. 2.
= *Polyporus sinensis Klotz* Linn., VIII, nec Fries. — SACCARDO, *Sylloge*, vol. VI, p. 357.

L'unico esemplare raccolto dal Dott. NEGRI, già molto avanzato nello sviluppo, vecchio cioè e privo in parte delle caratteristiche *sete*, fu esaminato, non solo da me, ma da due eminenti micologi, l'Abate BRESADOLA e il sig. C. G. LLOYD. Il primo riconobbe in esso una forma trametoidea, vetusta e depilata della *Hexagonia Klotzschii*; mentre il secondo lo ritenne invece rappresentante di una specie assai vicina, che egli ebbe dal Prof. PETCH raccolta nell'Isola *Maurizio* e alla quale diede il nome di *Hexagonia lignosa*.

Il LLOYD descrisse il suo fungo nell'ottobre del 1919 e ne diede anche una riproduzione fotografica, la quale concorda col tipo del nostro esemplare (*Mycological Notes*, vol. VI, p. 884, fig. 1525). La differenza tra le due specie, più che nei caratteri del *Pileo* sarebbero da riscontrarsi nel tipo della spora, sulla quale gli Autori citati hanno pareri differenti.

BERKELEY parla di spore *rotundato-hexagonis*; LLOYD scrive: *Spores not found*. Avendo esaminato le spore del mio esemplare, e avendole riconosciute di forma *rotundata*, leggerissima-

mente punteggiate, trasparenti, misuranti da 6 a 8 micron di diametro, ho creduto conveniente associarmi alla determinazione di BERKELEY, quantunque in un modo assoluto io non possa rifiutare la descrizione di LLOYD.

La ragione di questo mio dubbio dipende dal fatto che, disponendo di un unico esemplare e in condizioni un po' infelici, non mi posso peritare di portare giudizio definitivo.

La bella specie fortemente lignificata e zonata, venne trovata dal NEGRI sopra un ramo di una *Acacia* (non determinata) nelle *Savane dei Guraghe* nel paese dei *Galla-Arussi*. Giugno 1909.

BERKELEY, come il LLOYD, ebbero il fungo dall'Isola *Maurizio*.

Hydnaceae.

Irpex Fries.

Irpex flavus (*Kl.*) Linn., VIII, p. 488. — FRIES, *Epicris*, p. 522. — BERK, *Exot. Fung.*, p. 395.
= *Polyporus flavus* Jungh, Java, p. 46. — SACCARDO, *Sylloge*, VI, 486.

Gli esemplari studiati, sono un po' decolorati per essere troppo vecchi. Essi furono raccolti ai piedi del Monte *Ouloutou* nel paese dei *Galla-Arussi* nel maggio 1909.

Thelephoreae.

Lloydiella Bresadola.

Lloydiella Schomburghii (Berk.), BRESADOLA "Hedwigia", vol. LXI, 1915, p. 300.
= *Stereum* BERK., *Austral. Fung.*, n. 134.
= *Stereum retirugum* Cooke, Proc. Roy. Soc. Edim., 1882, n. 1346.

Questo fungo, che il BRESADOLA aveva trovato fra materiali raccolti alle Filippine, e che BERKELEY rinveniva in Australia, compare qui la prima volta per l'Africa, dove fu trovato dal NEGRI ai piedi del Monte *Ouloutou* il giugno 1909. La determinazione è stata convalidata dallo stesso Abate BRESADOLA, autore della specie.

Lycoperdaceae.

Hypoblema C. G. Lloyd.

C. G. Lloyd, *Mycological Notes*, 1903, n. 14, p, 140, Cincinnati, Ohio.
Hypoblema lepidophorum Lloyd, loc. cit.
Hypoblema pachyderma, Lloyd. *The Genera of Gastromycetes*, 1902, tav. II, p. 49.
Lycoperdon lepidophorum Ellis Collection (Lloyd, loc. cit., p. 140).
Bovista lepidophora (Ellis et Ev., Journ. Mycol., 1885, p. 88). — De-Toni, *Sylloge*, vol. VII, p. 103.
Lycoperdon pachyderma Pecks Collection (Lloyd, loc. cit.).
Calvatia pachyderma Morgan (Lloyd, loc. cit.).

La descrizione di Lloyd fu condotta sopra gli esemplari della Collezione di Ellis, conservati nel Museo di New York, ed ivi sotto il nome di *Lyc. lepidophorum.*

Hypoblema Negrii Mattirolo, Nova species.

Fra i materiali raccolti dal Dott. Negri nell'Etiopia Meridionale (Monte Ouloutou (Arussi-Galla) fra macchie di *Erica arborea* e *Protea abyssinica*) trovasi un esemplare di una *Lycoperdinea* avente dimensioni notevoli (misura circa 15 cent. di lunghezza, 9 di altezza, 7 di spessore).

La massa della gleba presenta colore umbrino-fuligineo (sembra una sfera di cioccolatte in polvere!) costituendo una strana grossa pallottola compatta, elastica, che al tatto dà la impressione di una finissima spugna, soffice, lanosa.

Il peridio, del quale non rimangono nell'esemplare altro che poche placche residuanti, è duro cartaceo, spesso, con frammenti che misurano più di un millimetro di spessore. Esso pare formato da tre strati, di cui l'interno a guisa di membrana sottilissima (pure di colore umbrino scuro) opaca, pare rivesta per alcun tempo la gleba, per frammentarsi poi come gli altri due strati nel periodo della maturazione completa, che lascia finalmente la massa globiforme della gleba in contatto coll'aria ambiente, e libera quindi di rotolare sul suolo, mossavi dal vento o dall'acqua, e di spargere così le spore eccezionalmente numerose.

Per questi caratteri la specie etiopica corrisponderebbe a quella minutamente descritta dal Lloyd, come rappresentante

del suo Genere *Hypoblema* col nome di *Hypoblema lepidophorum* (Vedi Lloyd, loc. cit. e figura); ma ne differisce, oltre che per i caratteri delle spore e del capillizio dei quali diremo, anche perchè in essa l'esoperidio non lascia nè scagliette nè pustole (*lepides*) come nel fungo descritto dal Lloyd ma si riconosce soltanto per la presenza di residui pulverulenti.

L'opinione emessa dal Lloyd a proposito del suo *Hypoblema*, che cioè " *we believe the plant has tree Peridie* „ e quanto si vede nel fungo etiopico, nel quale pure è parvenza di tre strati peridiali, ci ha consigliati a tentare di riconoscere se realmente questo fungo differisse dalla architettura peridiale propria alle *Licoperdacee*, le quali sono costantemente provviste di due soli strati peridiali distinti.

Quantunque le osservazioni meritino di essere confermate sopra materiali più adatti di quelli che erano a mia disposizione, credo tuttavia di poter ritenere che anche nel genere *Hypoblema* la natura segua la legge generale e che esso abbia solo un peridio duplice, e che, alla membrana avvolgente la gleba, non debbasi accordare valore di un terzo peridio.

Studiando infatti le varie scaglie peridiali ho constatato:

1° Un *esoperidio* dei caratteri del quale poco mi è concesso di dire perchè nel nostro individuo se ne riconosce l'esistenza soltanto dai residui pulverulenti;

2° Un *endoperidio*; questo è limitato verso l'esterno da un fascio di ife colorate in giallo, piene di un contenuto fortemente rifrangente, strettamente fra loro unite, decorrenti fra loro parallele.

Verso l'interno questo strato si continua in un ifenchima lasso, ricco cioè di lacune, formato da elementi incolori. Questo ifenchima (che costituisce la massa dell'endoperidio) è limitato verso l'interno da uno strato simile al primo. Ora è appunto questo strato limitante interno che sdoppiandosi abbandona sulla gleba la sottilissima membrana, formazione tardiva che si manifesterebbe dopo la costituzione e l'evoluzione della gleba.

Questo modo di comportarsi dell'endoperidio si osserva del resto anche nel genere *Lasiosphaera*, dove l'abbiamo potuto seguire meglio che nell'*Hypoblema*, avendo avuto a disposizione, fra i materiali raccolti dal Padre Balbo (v. pag. 732), un in-

dividuo giovane ancora, nel quale erano nettamente distinti *eso-* ed *endoperidio.*

Nei giovani stadii di sviluppo l'endoperidio (differenziato dall'esoperidio da uno strato di ife brillanti a decorso tortuoso) si continua colle reticolature o maglie della trama, riproducendo così temporaneamente l'architettura di una *Hymenogastrea*, colle camere imeniali ben distinte e tappezzate dai basidii; mentre un po' più tardi appare lo strato o fascia interna che lo distacca dalla gleba sulla quale abbandona una pellicola meno differenziata e assai più labile di quella i cui rimasugli si notano così distinti nel genere *Hypoblema*, e che perciò appare di origine identica.

Questo modo di comportarsi del peridio nei due Generi *Lasiosphaera* ed *Hypoblema*, che forse in avvenire, quando si avranno maggiori e più numerose ed esaurienti osservazioni, si potranno riunire in un unico Genere, ricorda quanto già il Resteiner (1) ha osservato nel Genere *Lycoperdon*, dove cioè: " *die Bildung (der innere peridie) sehr spät nach dem aufhören der Fonction des Bildungsgeflectes (der gleba) erfolgt* ".

Spore. — Le spore misurano 4,95 (media di 10 misure, con un *minimum* di 3,9 e un *maximum* di 5,2); sono di color bruno, minutissimamente granulate, in molte di esse è visibile ancora un tenuissimo residuo dello sterigma.

Capillizio. — Il capillizio intensamente colorato e ramificato è diviso in frequenti articoli da sètti relativamente vicini fra loro.

Tali articoli, a maturazione, si staccano e si rendono liberi; essi hanno forme varie e irregolari; alcuni si presentano quasi semilunari, altri ramificati, altri ingrossati irregolarmente, ecc., tutti però lasciano scorgere sulle loro faccie divisorie (in generale convesse) il poro-canale che metteva in comunicazione gli articoli fra loro prima del distacco, che ha luogo per un processo di liquefazione della sostanza che univa gli articoli nel primitivo capillizio.

Anche in questa specie numerosi cristallini di ossalato di calcio si notano liberi fra le spore ed i filamenti del capillizio.

---

(1) H. Resteiner, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Früchtkörper einiger Gastromyceten* " Botanische Zeitung ", 1892, vol. L, p. 859.

Nel capillizio si incontrano due tipi di filamenti; quelli più grandi misurano in media (10 misurazioni) uno spessore di micron 6,60; quelli invece più sottili una media di soli 3,02.

Gli articoli staccati sono molto più spessi, i più regolari hanno in media 8,45; mentre molti di essi raggiungono anche 9-10 e più micron.

Questi dati ci permettono un ulteriore confronto coll'*Hypoblema lepidophorum*, le cui spore hanno diametri di 5-6 e nel capillizio filamenti di 5 micron, i quali, come osserva il Lloyd sono quasi uniformi: (" *of a nearly uniform* " 5 micron diam.).

In conclusione: se l'*Hypoblema lepidophorum* concorda con la nuova specie per le parvenze generali del peridio; per il diametro delle spore e la mancanza di base sterile, ne differisce per il modo di staccarsi del peridio, per avere spore minutamente *granulate* e non *echinulate* e per possedere un capillizio a filamenti di due sorta, che si risolve in articoli liberi, ciò che io credo costituisca un fatto unico nelle *Lycoperdacee.*

Dal vicino genere *Lasiosphaera* differirebbe specialmente per la mancanza dell'involucro papiraceo ben definito avvolgente la gleba.

La frase diagnostica della nuova specie che, dedico con compiacenza all'amico Dottor Giovanni Negri, a ricordo del suo viaggio in Abissinia e delle sue benemerenze botaniche, alle quali dobbiamo la prima visione fitogeografica di una larga porzione della regione etiopica, potrebbe essere così redatta:

Hypoblema Negrii. Mattirolo, nov. spec.

Peridio umbrino-fuligineo, globoso vel depresso-globoso, magno (9-15 cent. et ultra); firmo, crasso (1-2 mill.) in fragmentis irregulariter rumpente.

Exoperidio evanido, sed tamen distincto.

Endoperidio crasso, primum unico, maturitate duplicato, membranam papiraceam, gleba circumvolvente, et cito laceram, efformante, maturitate in fragmentis divisam.

Capillitio absque basi sterili dichotomo-ramoso, septato, e duplici ordine filamentorum constituto, quorum majores 6,68, minores 3,02 micra diam. metuntur.

Sporis globosis, brunneis, leviter punctatis 5 micron circiter diametrum.

Haec mirabilis, insolita species ex Monte Ouloutou Avussorum, Doctori Johanni NEGRI, *Regii Horti Botanici Taurinensis Adjutor, de Flora* Etiopiae Meridionali *optime merito, libenter dico et dedico.*

Lycoperdon Tourn.

Lycoperdon hiemale Bul. — Champ. de France, p. 148 (1809), tav. 72. — VITTADINI, *Mon. Lycop.*, p. 190, tab. II, fig. 5. — Vedi *Bibliogr.* in PETRI, Gasterales in *Flora Italica Cryptogam.*

Due soli esemplari di questa specie, notoriamente ubiquitaria, furono raccolti dal NEGRI sull'altipiano dello Scioa nell'agosto 1909.

Sclerodermaceae.

Arachnion Schwein.

Arachnion album Schweinitz.

Questa specie molto interessante, fu dal NEGRI raccolta in differenti località dello Scioa e dei Galla, nell'agosto del 1909.

Il genere *Arachnion*, fondato dallo SCHWEINITZ nell'anno 1822 (*Synopsis fungorum Carolinae*, n. 14, tav. I, fig. 2) sopra materiale Nord-Americano, successivamente nell'anno 1843 indicato dal BERKELEY sotto il nome *Scoleciocarpus* (HOOK., *Journ.*, 147), fu poi trovato in poche specie nell'America del Sud, nell'Australia e nell'Africa del Sud.

Fatto stranissimo, la specie oggi ritenuta abbastanza comune in Africa, che il NEGRI raccolse nello Scioa, fu trovata dal micologo C. G. LLOYD di Cincinnati, fra i materiali (inviati a lui per la determinazione) stati raccolti dal molto Rev. Abate L. BADET, francese, in territorio di Salussola presso Biella (Novara): " *Wich is the first and only time the Genus has ever been known in Europa* " (C. G. LLOYD, *Mycol. Notes*, vol. II, pag. 253).

Il Rev. BADET inviava il materiale in America nell'estate del 1905.

Essendo io venuto a conoscenza della importante scoperta fatta dal LLOYD, intrapresi ricerche apposite nel territorio indicato e coll'aiuto di una mia gentile allieva, la Dottoressa INES

NEBBIA, feci raccogliere molto materiale in epoche differenti dell'anno; ma per quanto si sia ricercato, la specie indicata dal LLOYD non fu più rinvenuta (1).

Nell'accennare a questa specie, mi permetto interessare i micologi alla sua ricerca, ricordando loro che nessun carattere può meglio valere a farla riconoscere che la presenza degli sporangioli interni, per i quali agevolmente si distingue da qualunque *Lycoperdacea.* Si ricordi che la presenza degli sporangioli rinchiusi dal peridio fa assomigliare perfettamente questo fungo (di dimensioni assai piccole, da uno a due o tre centimetri) ad un sacchetto ripieno di piccolissimi granuli colorati in giallo quando sono maturi; ciò che il SACCARDO (*Sylloge*, vol. VII, pag. 150) esprime con queste parole: *Genus referens sacculum araneae ovolis repletum unde nomen.*

Scleroderma Persoon.

Scleroderma vulgare Horn. Vedi *Flora italica Cryptogama*, PETRI, *Gasterales*, p. 94 (Vedi ivi la Bibliografia e la Sinonimia).

Il NEGRI ha trovata questa specie ubiquitaria anche in Etiopia fra la ghiaia nel giardino della vecchia sede della Legazione Italiana ad Addis-Abeba il 30 luglio 1909.

Tulostomataceae.

Battarrea Persoon.

Battarrea phalloides (Dicks.). — PERSOON, *Synops.*, p. 129, tav, III, fig. 1. = *Lycoperdon phalloides* Dicks., Crypt. Brit., I, p. 24. — SACCARDO, *Sylloge*, vol. VII, p. 66.

Questo tipo di fungo, abbastanza comune in molte delle regioni mediterranee aventi *substratum* sabbioso-argilloso, del quale molte specie tropicali sono note come viventi sui termitai africani, fu dal NEGRI raccolto al Fantalle e lungo la strada tra Dirre-Daua e lo Scioa. Agosto 1909 (Vedi G. NEGRI, loc. cit., pag. 71).

---

(1) Potrebbe forse esserci stato scambio con altro materiale? Perdoni il LLOYD questa supposizione, che mi permetto esprimere solo dopo le lunghe infruttuose ricerche tanto in Piemonte che in Lombardia e dopo molte altre in Erbarii differenti.

Podaxineae.

Podaxon (Desv.) Fries.

Podaxon mossamedensis Welw. et Curr. — *Fungi Angolenses*, p. 288, tav. XIX, fig. 4-6 " Trans. of Linnean Society ", vol. XXVI. — Baccarini, *Sopra alcuni Podaxon della Somalia*, " Nuovo Giorn. botanico italiano ", vol. XXI, aprile 1914, p. 243. — Mattirolo, *Podaxon Ferrandii*, nuova specie della Somalia italiana " Annali di Botanica ", Roma, 1913, vol. XI, tav. X.

Questo fungo, ordinariamente psammofilo, figura erroneamente nel già ricordato lavoro fitogeografico del Negri (Vedi ivi pag. 71 nella Nota, N° 2) come *Pod. carcinomalis* (Linn.) Fries, Syst. Myc., III, pag. 62.

Anche questa specie fu raccolta sulla strada che da Dirre-Daua mette allo Scioa presso Fantalle sopra un termitaio abbandonato; nell'agosto 1909.

Uredineae.

Uredo Persoon.

Uredo Aloes Cooke, Grevillea, vol. XX, p. 16. — Saccardo, *Sylloge*, vol. XI, p. 227.

I sori di questo curioso ed interessante fungillo, invece che pallidi, come li descrive il Cooke, negli esemplari etiopici si presentano colorati in colore fosco; ma questa colorazione è evidentemente dovuta ai pigmenti (rosso di Aloe-nigrina, ecc., che sono prodotti di scissione dell'Aloina e dell'Emodina) diffusi nell'alcool nel quale erano conservate le foglie di un *Aloe* non determinabile, ospite dell'*Uredo*.

Le misurazioni delle Uredospore, notevoli per lo spessore grande della loro parete, diedero una media di: 34,5 per 25,3 microm. (media di quindici misure), la quale appare un po' più grande di quella segnata dal Cooke, che risulta di 25-30 × 20.

I pezzetti di foglie di *Aloe* affetti dall'*Uredo* furono raccolti a Cioba nell'altipiano di Mingiar nello Scioa.

L'*Uredo Aloes*, per quanto mi è risultato, non fu trovata finora altro che nell'Africa orientale, sul Mooi-River nel Natal, raccoltovi da J. M. Wood.

II.

Funghi raccolti dal Rev. Padre Giovanni Balbo delle Missioni della Consolata di Torino (Uganda - British East Africa).

Polyporeae.

Polyporus Mich.

Polyporus rufescens Fries, *System. Myc.*, I, p. 351. — Fries, *Hymen. Europ.*, p. 529. — Berk, *Outlin*, p. 231. — Saccardo, *Sylloge*, vol. IV, p. 78.

Questo esemplare fu determinato dal signor Lloyd.

La specie, secondo le note del Rev. Padre Balbo, può raggiungere dimensioni assai notevoli, di 30 e più centim. nella parte allargata; essa presenta un tessuto non gran che legnoso e di color bianchiccio.

Lloyd ritiene questa specie assai vicina al *Pol. heterosporus* di Fries (Vedi C. G. Lloyd, *Synopsis of te stipitate Polyporoids*, Cincinnati/Ohio-March 1912, Sect. *spongiosus*, pag. 157, fig. 456, 457, 458.

Il fungo fu raccolto sopra il tronco di un albero di *Tabernamontana* nella valle di Singhiso. 8 ottobre 1920.

Fomes Fries.

Fomes Fullageri Berck., *Challeng*, III, p. 54. — Saccardo, *Sylloge*, vol. VI, p. 190.

Il bello esemplare, la cui determinazione io devo all'autorità di Bresadola, fu trovato al colle di Nyere (20 febbraio 1910) sul Monte Kenia. Noto però che il tipo di questa specie non fu ritrovato nelle collezioni del Berkeley, come scrive il Lloyd nelle sue: *Synonyms, Mistakes, Species imperfectly Known, or not known at all*, ecc. (Vedi *Mycolg. Notes*, Vol. IV, pag. 280, in *Synopsis of the Genus Fomes*; January, 1915. No type Exists).

Fomes Fries (*Ganoderma* Karsten).

Fomes Curtisii Berk., *Kew. Garden. miscel.*, I, p. 101.
= *Ganodermus Curtisii* in Lloyd, *Micologikal Notes*, vol. III, *Synopsis of the Stipitate Polyporoids*. Cincinnati/Ohio, 1912, p. 102.

Questa specie è considerata dal Lloyd come la forma tropicale del comune *Ganoderma lucidum*.

Il giovanissimo esemplare dal Rev. Padre Balbo, raccolto sul Monte Ndua a circa 2500 m. sopra di un albero, non presenta ancora l'imenio perfettamente sviluppato; esso è assai chiaro di colore.

La determinazione fu sottoposta al parere competentissimo del signor Lloyd.

Polystictus Fries.

Polystictus flabelliformis Kl. in *Linnea*, 1833, p. 483. — Berkeley, *Exot Fugi*, p. 386. — Fries, *Epicris.*, p. 444. — Saccardo, *Sylloge*, vol. VI p. 216.

Alcuni esemplari, già un poco spelati, figurano nel materiale raccolto dal Padre Balbo. Questa bella e caratteristica specie, comune si può dire ovunque nei tropici, proviene dal Monte Ndua, nella regione del Kenia, dove fu raccolto a circa metri 2500 sopra tronchi di alberi morti (18 agosto 1914). La specie, molto più robusta, di dimensioni assai maggiori, caratterizzata dallo stipite nero, presenta però delle analogie col nostro comune *Pol. versicolor*.

Trametes Fries.

Trametes hispida Baglietto, secondo Fries, *Hymenomycetes Europaei*, p. 593.
= *Boletus favus* Bulliard, tav. 421. — Saccardo, *Sylloge*, VII, p. 3246.

Questo fungo, secondo l'opinione del Bresadola, è da identificarsi colla *Trametea gallica* di Fries. Vedi *Hymen. Europ.*, pag. 582.

La *Tram. hispida*, trovata a Ka-Sura a circa 1000 metri, fu già altra volta osservata nell'Africa sopra rami morti di piante differenti (Vedi *Sylloge*, loc. cit.).

Thelephoreae.

Stereum Pers.

Stereum vellereum Berk., *Flor. New. Zeal.*, p. 183.
= *Stereum hirsutum* (W), FRIES, *Epicr*, p. 549. — *Hym. Europ.*, 639, forma minore, secondo l'opinione di Bresadola. — SACCARDO, *Sylloge*, vol. VI, p. 579.

La specie fu raccolta nella foresta del Monte Kenia, a circa 2500 metri sul mare e più in basso a Kasura, a circa 1000 metri. 18 agosto 1914. È noto del resto come lo *S. hirsutum*, colle sue varietà, sia uno dei miceti ubiquitari più comuni.

Auricularineae.

Hirneola Fries.

Hirneola polytricha Mont. In *Bel. Ind. Orient. Cryptogam.*, p. 154 (*sub Exidia*)· — FRIES, *Flor. nat.*, p. 26.
Auricularia polytricha (Mont.). SACCARDO, *Misc.*, I 12, *Sylloge*, vol. VI, p. 766.

Questa che, oggi, non è più ritenuta come una rara specie, fu dal Bélanger la prima volta trovata nelle Indie orientali e di poi successivamente in molte regioni dell'America centrale; ma, da quanto mi risulta, non credo sia stata però finora rinvenuta in Africa.

Il Padre BALBO la raccolse sui rami secchi di una specie di *Cordia* (?) a circa 1300 metri sul mare, nella località detta *Moyna* (30 settembre 1894).

Il 2 novembre 1920 la rinvenne invece su rami di una *Erytrina* (?) a Kasasine e a Igane, nella Missione del Meru.

C. G. LLOYD, nel Volume IV delle sue *Mycological Notes* (nella Lettera N° 43 alla Nota 39) considera questa forma come la forma tropicale della comune *Hirneola Auricula-Judae.* Del resto, già SACCARDO aveva notato la sua affinità colla *Orecchia di Giuda.*

Anche questo fungo, secondo il SACCARDO, dovrebbe essere considerato commestibile, come lo è la sua congenere, la quale è da secoli oggetto di larga coltura, specialmente nella Cina.

Hirneola cornea (Ehrenb.), FRIES, *Fungi nat.*, p. 26.
Auricularia cornea Ehrenb., HOR, *Phys.*, tav. XXX, fig. 9. — SACCARDO, *Sylloge*, vol. VI, p. 768.

Questa specie, la cui determinazione è dovuta al Rev. Abate BRESADOLA, fu raccolta a 1300 metri a Moyna (Regione del Kenia) sopra rami di una pianta del genere *Cordia* (?).

Lycoperdaceae.

Lycoperdon Tourn.

Lycoperdon lilacinum (Mont. et Berk.). — SPEGAZZINI, *Fungi Argentini novi vel critici.* Buenos-Aires, 1899, n. 321, p. 297. — ID., *Fungi Argentini, additis nonnullis Brasiliensibus Montevideensibusque* (1881-82), p. 103, n. 254.
Sub Lycoperdon, Globaria lilacina (Mont. et Berk). — SPEGAZZINI, *Fungi Argentini*, p. 1, n. 110.
= *Bovista lilacina* Mont. et Berk., *Decad. of Fungi*, n. 59.
— *Calvatia lilacina*, C. G. Lloyd, *The Lycoperdaceae of Australia, New-Zealand.* Cincinnati/Ohio, april, 1905, p. 35, tav. 35, fig. 1.

Esemplare di circa 10 centim. di altezza; ma in cattive condizioni.

Il vento e le pioggie lo hanno privato della massima parte degli elementi della gleba, lasciando però intatta la parte basale plicato-sulcata. Il colore caratteristico della gleba residua e del peridio esternamente e internamente di colore fulvo-lilacino ; i caratteri delle spore e del capillizio, mi hanno permessa la determinazione di questa interessante specie raccolta dal Reverendo Padre BALBO nelle vicinanze della Missione di Meru, nella regione del Kenia.

Il *Lycoperdon lilacinum* è del resto una delle *Lycoperdaceae* ubiquitarie e nell'Africa Australe fu già trovata dal signor M. BOSCHBERG (V. SACCARDO, *Sylloge*, Vol. VII, pag. 126).

In Piemonte fu da me osservato a Mongrando di Biella nell'estate del 1921, sotto il nome di *Lycoperdon fragile* Vitt.; è pure ricordato, per la Lombardia e per il Piemonte, nella già più volte citata monografia del PETRI.

Bovistella Morgan (1899).

Bovistella aspera C. G. Lloyd.
= *Bovista aspera* Lév. " Champ. du Muséum Paris „ n. 234, p. 162.
Bovistella aspera Lloyd " The Lycoperdaceae of Australia „ New-Zealand, Cincinnati/Ohio, april 1905, p. 28, tav. 33, figg. 6, 7, 8, 9, 10.

La *Bovistella* (*Bovista*) *aspera* nota del Brasile, del Chilì, dell'Australia fu raccolta dal signor J. B. Pole Evans nell'Africa del Sud (Vedi Lloyd, *Letter* N. 56, Note 234, pag. 5).

Il Rev. Padre Balbo dice la specie comune nei campi, dove si raccolgono esemplari che raggiungono la grossezza di un uovo di gallina; quelli però inviati allo stato secco e molto deteriorati, non misurano più di uno a 2 cent. Il colore di questo fungo è giallo chiaro.

La determinazione è dovuta al signor Lloyd.

Lasiosphaera Reichardt (*Eriosphaera* Reichardt).

Lasiosphaera Fenzlii (Reichar.) Lloyd.
Eriosphaera Fenzlii " Reichardt Fungi „ p. 135, tav. XX, 3. — Saccardo, *Sylloge*, vol. VII, p. 56. — Lloyd, *Mycological Notes*, juli 1904, p. 191, tav. 19, p. 259.

Questa gigantesca *Lycoperdinea* (*the giant puff-ball*, come la definisce il Loyd) fu raccolta in parecchi esemplari nelle foreste del Monte Kenia a circa 3000 metri, il 16 settembre 1913. Gli esemplari, che dànno la impressione di grosse finissime spugne, misurano 15 e 13 cent. nel diametro maggiore, sono privi del peridio e la massa lanosa elastica, dolcissima al tatto, è tutta formata dallo sviluppo del capillizio, contenente infinità di spore e di piccoli cristallini di ossalato di calce che appaiono liberi nel campo del microscopio. Capillizio ferrugineo formato da filamenti esili biforcati (4-5 micr.). Le spore verrucolose, piccole, di color bruno, misurano circa 6-7 micr.

Questo tipo strano di fungo, assai vicino, se non identico al tipo indicato col nome generico di *Lanopila* Fries, e noto specialmente delle Indie orientali, è oggi stato riconosciuto in quasi tutte le regioni tropicali. Certamente sarebbe desiderabile che uno studio della storia di sviluppo delle specie appartenenti a questo Genere e ai vicini Generi *Lanopila* ed *Hypoblema* provve-

desse alla sistemazione scientifica di queste forme di Lycoperdi, che tanto interessano la curiosità dei viaggiatori, anche per le loro qualità organolettiche.

Geastreae.

Cycloderma Klotsch.

Cycloderma apiculatum A. L. " Journal of Botany „ 1895, p. 340. — Saccardo, *Sylloge*, vol. XIV, p. 257. — M. C. Cooke, *Re-Appearance of Cycloderma.* Grevillea, p. 95, tav. 160. — Patouillard " Bulletin de la Société Mycolg. de France „, vol. XIV, p. 195; vol. XV, p. 204; vol. XVI; p. 162, tav. VII, fig. 2-3.

Questa specie, che secondo ogni probabilità non sarebbe altro che un *Geaster*, del quale non è nota ancora la maniera di deiscenza, fu raccolto a 1300 metri, nella Valle del Singhiso, sul terreno, dove attrasse l'attenzione del Rev. Padre Balbo per il suo colore rancione e la sua perfetta somiglianza con un piccolo Lycoperdon.

Il *Cycloderma apiculatum* fu descritto la prima volta da Elliot e raccolto sui Monti del Rouwenzori.

Il genere *Cycloderma* è uno di quei Generi dei quali occorrerebbe raccogliere esemplari a distanza di tempo, per poter studiare il modo di deiscenza e segnare quindi la sua definitiva sistemazione.

Certo che il *Cycloderma*, se non è un *Geaster*, gli è tanto vicino che Patouillard (che però mantenne il Genere e ne descrisse nuove specie) così a suo riguardo si esprime:

" Il résulte (de ce qui précéde) que les deux genres *Cyclo-* " *derma* et *Geaster* sont extrêmement voisins et devraient peut- " être se fondre en un seul, dans lequel on conserverait *Cyclo-* " *derma* à titre de simple Section. Cette Section serait caractérisée „ par une déhiscence tardive et des divisions peu profondes „.

Fischer (in *Engler et Prantl*) pone il Genere *Cycloderma* fra quelli " ungenugend bekannt „, aggiungendo: " Theilweise dürfte " es sich hier aber auch vielleicht um Jugendzustände von Geaster " - Arten handeln „.

Sclerodermaceae.

Arachnion Schweinitz.

Arachnion Album Schweinitz (Per quanto si riferisce a questa specie interessantissima, valga ciò che è scritto a p. 725 di questa Nota).

L'*A. album* fu trovato nella Valle del Singhiso a 1300 metri nel novembre 1920.

Nidulariaceae.

Cyathus Haller.

Cyatus Poeppigii Tul. - Tulasne, *Monog. Des Nidular.* " Ann. Scien. Natur. „, 1844, p. 41.
= *C. plicatulus* Poepp (sec. Lloyd) *from Cuba Exic.*, n. 47. — C. G. Lloyd, *The Nidulariaceae.* Cincinnati/Ohio, decem. 1906, p. 15, tav. 105.

Questa specie, che presentemente appare come abbastanza comune nelle varie regioni tropicali, fu raccolta dal Rev. Padre Balbo nella Valle del Singhiso a circa 1300 metri, al colle Casasine, sul terreno, 18 maggio 1921.

La determinazione fu confermata dalla autorità di C. G. Lloyd, al quale ebbi la ventura di far vedere la specie durante il suo soggiorno nel mio Laboratorio a Torino.

Cyathus microsporus Tul. — Tulasne, *Monographie des Nidulariées*, " Ann. Scien. Nat. „, 1844, p. 73, tav. 6, fig. 8. — C. G. Lloyd, loc. cit., fig. 19, p. 27.

Presso la Missione di Meru sul Kenia in località non indicata. Questa specie è ritenuta assai rara nei tropici dal monografo Lloyd (Comun. verbale).

Finora il fungo è ricordato di S. Domingo, di Haiti; e del Brasile.

Pyrenomycetes.

Engleromyces P. Hennings.

Engleromices Goetzei P., Enn., *Fungi Africae orientalis* " Englers Jahrbucher ,, XXVIII, 1901. Leipzig, p. 327,
= *Colletomanginia paradoxa*, Hariet et Patouillard, *Sur un nouveau Genre de Champig, de l'Afrique orientale anglaise* " Comptes Renduu Acc. des Science ,, 1906, 22 janvier, pp. 224-26.
Id. Note sur le Genre *Colletomanginia* " Bulletin Société Myceel. de France ,, 1906, vol. XXII, p. 201. — Saccardo, *Sylloge*, vol. XVI, p. 452 — C. G. Lloyd, *Mycological Notes*, vol. V, " Synopsis of some Genera of the large Pyrenomycetes ,, Cincinnati/Ohio, Januari 1917, p. 15, figg. 856-857.

Questo stranissimo fungo, del quale sarebbe così curioso poter conoscere il ciclo di sviluppo, pare sia legato alla vegetazione dei Bambù, sui quali vive.

L'esemplare da me studiato, non è che una porzione di un grosso individuo. Secondo la indicazione del Padre Balbo, questi funghi possono raggiungere anche 30-40 centimetri di sviluppo; sono assai noti agli indigeni, che se ne servono come medicamenti per le più variate malattie.

L'*Engleromyces* è certo uno dei tipi più curiosi fra i Pyrenomyceti.

Xylariaceae.

Daldinia De-Notaris et Cesati.

Daldinia albozonata, Lloyd, *The large Pyrenomycetes*, II Paper Juli 1919, p. 25, Cincinnati/Ohio, fig. 1456.

Questo fungo, che il Reverendo Padre Balbo raccolse il 26 giugno 1915 sulla collina di *Kasasine*, nella regione Igane, nel Merù (Uganda), a circa 1300 metri, sopra le radici di una leguminosa indeterminata, sia per la forma, come per il colore e l'*habitat*, fu ritenuto quale un fungo ipogeo e come tale gelosamente conservato, quale rarità per la Flora idnologica tropicale.

Ma purtroppo, se a tutta prima, sia per la forma irregolarmente globosa, plicata, girosa o rugosa; sia per il colore nero

opaco a riflessi rossastri, questo fungo può ricordare perfettamente un *Melanogaster* essiccato, si distingue invece subito all'esame colla lente per le minutissime aperture periteciali che affiorano alla superficie superiore del fungo, e per la consistenza solida, carboniosa dello stroma, a strati concentrici bianchi e neri alternantisi regolarmente; ma sopratutto per la presenza di *Peritecii* e per il tipo delle spore; caratteri tutti che rivelano la sua pertinenza al genere *Daldinia* che i nostri De-Notaris e Cesati descrissero nel 1863. (*Schema di classificazione degli Sferiacei italici aschigeri,* comunic. della Società Crittogamologica Italiana, Genova, 1863, n. 4, pag. 197).

La specie africana presenta dei *Peritecii* ovali-oblunghi (60 × 24); o più o meno tondeggianti (48-54 × 30-36), nettamente limitati da una zona ben delineata fuliginea di ifenchima compatto, la quale verso l'interno del *Peritecio* è ricoperta dal rivestimento pellucido delle ife parietali, visibile però solo nei *Peritecii* meno evoluti.

Degli *Aschi* (essendo gli esemplari esaminati già troppo evoluti) appena si intravvede la forma lineare, la quale è segnata anche dall'ordine seriato che conservano le spore.

Le spore elittiche di colore fuligineo misurano 7-8 × 3,5-4 micron.

Per tutti questi caratteri gli esemplari del Padre Balbo corrispondono (quantunque non si presentino nè turbinati, nè provvisti di un piede distinto) a quelli che il Lloyd assegna alla sua *Daldinia albo-zonata* descritta sopra esemplari trovati da G. Zenker a Cameroum nell'Africa Orientale.

La specie è di piccole dimensioni; i campioni più grandi non raggiungono i due centimetri nel loro diametro maggiore ed appena toccano un centimetro di altezza. Mentre la maggior parte degli esemplari è perfettamente apoda, alcuni però mostrano un rudimento di piede; ma questo variare di forma non è raro, come è noto, in tutte le forme del Genere.

Quanto a forme conidifere non ho potuto accertarne la presenza, trattandosi di esemplari troppo maturi e quindi non più nelle condizioni adatte alla produzione di forme conidiche secondarie.

Ricordo però che nelle cavità periteciali si incontra frequente un micelio sottilissimo, accompagnato da forme conidiche

sferiche trasparenti, incolore, assai piccole (2,5 a 3,5 micron), che mi parvero in relazione con qualche fungillo saprofita, che, nelle condizioni nelle quali si presentavano, non mi fu possibile determinare.

Noto ancora che la *Daldinia albo-zonata* (a differenza delle sue congeneri) si lascia facilmente sezionare; messa in alcool, colora l'alcool intensamente in nero fulgineo.

Questa specie interessa particolarmente il micologo, per ciò che secondo ha riferito il Rev. Padre Balbo, è stata trovata sopra una radice e quindi in una stazione *nettamente ipogea*, ciò che finora non mi pare sia stato notato per nessuno dei tipi di *Pirenomiceti* a stroma allargato.

Myxomycetes.

Physarum.

Physarum leucopus Link. Diss. I. 1809, p. 27. — Lister A., *Monograph of the Mycetozoa*, London 1894, p. 39, tav. IV. — Saccardo, *Sylloge*, VII, I, 343.

Questa specie ubiquitaria, già osservata nell'Africa australe, fu trovata sopra frammenti di una foglia indeterminata (forse di un *Abutilon*?) nella valle del *Singhiso* a Kasiereri a 1300 m. il 26 dicembre 1920.

Dalle annotazioni del Rev. Padre Balbo risulta che il *Phisarum leucopus* è una specie assai diffusa in quelle regioni, dove operano i Missionari della Consolata, alle falde del *Kenia* in Uganda, e che ivi si trova in modo speciale sopra molte foglie di Generi differenti di piante.

APPENDICE

Oltre al materiale studiato, il Rev. Padre Balbo inviò pure a Torino tre piccoli *Agaricinei* essiccati ed una specie di *Boletus*.

Quantunque rovinati dai tarli, furono inviati al distintissimo micologo Abate Bresadola, che giudicò gli *Agaricinei* assolutamente indeterminabili (1). Il *Boletus*, del quale potè misurare le spore (6, 8, 9 × 4, 5, 6) indicò col nome di *Boletus etiopicus* (??), pure osservando, che gli esemplari troppo anneriti e consumati non permettevano una sicura determinazione.

Rinvenni pure due *Sclerozii*, una *Xylaria* giovane, priva ancora di *Peritecii* e quindi di spore; ed un piccolo *Pleurotus* che attrasse in modo particolare la mia attenzione perchè, essiccato, era esternamente simile ad una *Hirneola* secca.

Questo piccolo *Pleurotus* ha colore carnicino, consistenza carnosa; è coperto esternamente da un tomento fitto; presenta il contorno lobato col margine rovesciato e ben distinto; lamelle marginali corte, rade; cistidi a parete spessa, appuntati a cono, muricati, aventi la forma come di una penna da scrivere. Spore ellittiche 10-12 × 3-4.

Avendo a disposizione troppo scarso materiale (e ancora in condizioni inadatte), io mi limiterò a ricordare, che il fungo in questione presenta delle notevoli affinità col *Pleurotus sciadium* che C. Kalchbrenner ha pubblicato nel vol. IX della *Grevillea* (1880-1881) pag. 112, *Fungi Macowaniani*) raccolto su legni putridi sul Monte *Boschberg* all'altezza di 4000 piedi nell'Africa Australe.

La descrizione che lo Spegazzini fa nei suoi *Fungi Argentini* (*Pugil.*, IV, pag. 4) del suo *Pleurotus Hirneola* che egli de-

(1) Così pure alcuni *Miceti* inviati dal D. Negri, per le stesse ragioni non si poterono determinare.

finisce " *Species pulchella, uda, habitum cujusdam Hirneolae perfecte simulans* „ farebbe pensare anche ad una relazione della specie Spegazziniana colla nostra specie africana.

Questo *Pleurotus* fu raccolto a *Keja* nel Meru Centrale a circa 1100 m. (30 aprile 1921).

Infine devo ancora registrare un esemplare unico di un *Hymenomiceto*, tutto rovinato, che mi sembra di poter ritenere appartenga ad una *Lepiota*, giudicando dalle spore, dal tipo dei basidii, dalle porzioni ancora residuate e dalle indicazioni scritte sul biglietto accompagnatore, che dice essere il fungo in questione di colore bianco, non edule, sparso nei pascoli, dove raggiunge l'altezza sul suolo anche di 20 centim., e 20 centim. misura pure il cappello.

Nessuna idea ho potuto farmi della presenza e della disposizione delle lamine; mentre ho potuto riconoscere al microscopio dei basidi con due sterigmi abbastanza lunghi; e spore numerose di forma ovale trasparenti che misurano 10-12 $\times$ 6.

R. Orto Botanico della R. Università di Torino.
Luglio 1924.

Indice alfabetico delle Specie

N.B. I materiali, di cui è cenno nel testo, si conservano nelle Collezioni del *R. Orto botanico di Torino* a disposizione degli studiosi.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSI UNITE

Adunanza del 6 Luglio 1924

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci D'Ovidio, Peano, Guidi, Parona, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli e Mattirolo che funge da Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci De Sanctis, Einaudi, Schiaparelli, Patetta, Prato, Jannaccone e Solari.

Scusano l'assenza i Soci Pierantoni, Brondi, Vidari, Cian, Pacchioni e Valmaggi.

Il Segretario legge il verbale dell'adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica all'Accademia la lettera di ringramento a Lei diretta dal Socio nazionale G. B. Grassi, che l'Accademia nostra aveva felicitato nella occasione delle onoranze recentemente tributategli a Roma.

La parola è quindi concessa al Socio Tesoriere Prato che dà lettura del Bilancio consuntivo della R. Accademia per l'anno 1923.

Il Bilancio, illustrato con commenti orali e spiegazioni, tanto nelle cifre riguardanti la parte passiva quanto in quella attiva, viene approvato nelle sue cifre complessive a voti unanimi dell'Accademia.

Si passa quindi all'esame delle cifre che compongono il Bilancio preventivo per l'anno solare 1924. Il Socio Tesoriere legge e illustra le varie cifre segnate tanto nell'attivo quanto nel passivo.

Il Presidente apre la discussione sulla relazione finanziaria, ma nessuno chiede la parola; dopo di che mette ai voti l'approvazione del Bilancio stesso, la quale risulta accordata con voti unanimi.

Il Tesoriere dà quindi all'Accademia l'esatta situazione dei fondi che devono servire ai vari premii accademici.

Il Presidente trae quindi argomento dalla Relazione del Tesoriere per ringraziarlo, nel nome dell'Accademia, dell'opera illuminata data da lui agli interessi economici dell'Accademia, al che plaudono gli Accademici presenti.

Il Presidente rivolge infine un saluto ed un augurio di liete vacanze ai Colleghi, ricordando che questa è l'ultima adunanza ufficiale annuale dell'Accademia.

Gli Accademico Segretarii:
ORESTE MATTIROLO
GIOVANNI VIDARI

INDICE

DEL VOLUME LIX.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di **I. Guareschi**).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. ***Dante e il Piemonte.***

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Tip. Vincenzo Bona – Torino